جامعة النجاح الوطنية
كلية الدراسات العليا

أنواع تعاون طلبة الصف العاشر في حل مسائل إثرائية في مادة الرياضيات والصعوبات التي تواجههم وطرق التغلب عليها (دراسة نوعية)

إعداد

بيسان عمر عارف جرادات

إشراف

د.وجيه ضاهر

قدمت هذه الأطروحة استكمالاً لمتطلبات درجة الماجستير في أساليب تدريس الرياضيات بكلية الدراسات العليا في جامعة النجاح الوطنية في نابلس، فلسطين

2013م

أنواع تعاون طلبة الصف العاشر في حل مسائل إثرائية في مادة الرياضيات والصعوبات التي تواجههم وطرق التغلب عليها
(دراسة نوعية)

إعداد

بيسان عمر عارف جرادات

نوقشت هذه الأطروحة بتاريخ: 2013/11/11م، وأُجيزت.

أعضاء لجنة المناقشة:	التوقيع:
– د. وجيه ضاهر / مشرفاً ورئيساً	.....
– د. فطين مسعد / ممتحناً خارجياً	.....
– د. صلاح الدين ياسين / ممتحناً داخلياً	.....
– د. سهيل صالحة / ممتحناً داخلياً	.....

الإهداء

إلى المعلم الأول.. سيد الخلق.. الرسول الأكرم صلى الله عليه وسلم

للكريمين.. والديّ .. لأمي ذات الوفاء.. لأبي ذي العطاء..

لإخوتي... هامات الجبال... ثائر وأحمد وبلال

لأختيَّ... باقتا الورد... مجد وشهد

للقريب من ذاتي... زوجي العزيز وليد

لفلذة كبدي... ابني الغالي مؤمن

شكر وتقدير

الشكر لله أولاً.. فهو خير معين..

إلى أمي وأبي لعطائهما اللامحدود..

إلى زوجي الغالي وليد الذي وقف إلى جانبي طيلة هذا المشوار..

إلى الدكتور الفاضل وجيه ضاهر الذي لم يبخل لحظة بجهده..

وأتقدم بالشكر الكبير للطلاب والطالبات المشاركين في الدراسة، وإدارة مدارسهم لتلبيتهم طلب الباحثة بالمشاركة في البحث..

وإلى كل من قدم لي يد المساعدة لأنجز هذا العمل..

الإقرار

أنا الموقعة أدناه، مقدمة الرسالة التي تحمل العنوان:

أنواع تعاون طلبة الصف العاشر في حل مسائل إثرائية في مادة الرياضيات والصعوبات التي تواجههم وطرق التغلب عليها / دراسة نوعية

أقر بأن ما اشتملت عليه هذه الرسالة إنما هو نتاج جهدي الخاص، باستثناء ما تمت الإشارة إليه حيثما ورد، وأن هذه الرسالة ككل، أو أي جزء منها لم يقدم من قبل لنيل أية درجة علمية أو لقب علمي أو بحثي لدى أية مؤسسة تعليمية أو بحثية أخرى.

Declaration

The work provided in this thesis, unless otherwise referenced is the researcher's own work, and has not been submitted elsewhere for any other degree or qualification.

اسم الطالبة: Student's Name :

التوقيع: Signature:

التاريخ: Date:

فهرس المحتويات

الموضوع	الصفحة
الإهداء	ج
شكر وتقدير	د
الإقرار	هـ
فهرس المحتويات	و
ملخص الدراسة	ح
الفصل الأول: مشكلة الدراسة (خلفيتها وأهميتها)	1
مقدمة الدراسة	1
مشكلة الدراسة	2
أهداف الدراسة	4
أهمية الدراسة	5
أسئلة الدراسة	5
حدود الدراسة	6
مصطلحات الدراسة	6
الفصل الثاني: الإطار النظري والدراسات السابقة	8
الفصل الثالث: طريقة الدراسة وإجراءاتها	21
مجتمع البحث	21
لمشاركون في الدراسة	21
نوع البحث	22
إجراءات البحث	22
طريقة جمع المعطيات	22
طريقة تحليل المعطيات	23
أدوات البحث التطبيقية	29
اختبار صدق أدوات البحث التطبيقية	29
المسائل الإثرائية المقدمة للطلاب	30
الفصل الرابع: النتائج	33
أحداث تعلم المجموعات خلال حلهم السؤال الأول	33

أحداث تعلم المجموعات خلال حلهم السؤال الثاني	54
أحداث تعلم المجموعات خلال حلهم السؤال الثالث	70
أحداث تعلم المجموعات خلال حلهم السؤال الرابع	106
الفصل الخامس: النقاش	127
الفصل السادس: التوصيات	143
قائمة المصادر والمراجع	144
الملاحق	151
Abstract	B

أنواع تعاون طلبة الصف العاشر في حل مسائل إثرائية في مادة الرياضيات

والصعوبات التي تواجههم وطرق التغلب عليها

(دراسة نوعية)

إعداد

بيسان عمر عارف جرادات

إشراف

د. وجيه ضاهر

الملخص

هدفت هذه الدراسة إلى تسليط الضوء على تعاون طلاب الصف العاشر في حل مسائل إثرائية في الرياضيات، وذلك لمعرفة أنواع تعاونهم والصعوبات التي يواجهونها أثناء نشاطهم التعاوني ثم محاولة التغلب على هذه الصعوبات من خلال الإجابة عن السؤال الرئيس الآتي:

ما هي أنواع تعاون طلبة الصف العاشر أثناء قيامهم بحل أنشطة إثرائية في مجموعات تعاونية، وما أنواع الصعوبات التي تواجههم وكيف يتغلبون عليها؟

ولذلك قامت الباحثة باختيار أربع مجموعات من طلبة الصف العاشر بحيث كان هناك مجموعتان من الذكور ومجموعتان من الإناث، وقامت الباحثة بإعطائهم أسئلة إثرائية وطلبت من هذه المجموعات حل المسائل. قامت الباحثة بمراقبة ومتابعة تعاون الطلاب وأنواع هذا التعاون، ومناقشة الطلاب حول أفكارهم في بعض المواقف، وتصوير عملهم عند حل هذه المسائل ثم قامت بتحليل أحداث تعلم كل مجموعة من المجموعات الأربع، بحيث قامت بملاحظة سلوك الطلاب في كل من العمليات التعلمية التالية: قراءة المسألة، فهمها، تحليلها، استكشافها، التخطيط لحلها، تطبيق الخطة وأخيراً التحقق والتأكد من صحة الحل (Artzt & Armour-Thomas, 1992)

وقد أجابت الدراسة على الأسئلة الآية: (1) ما هي أنواع تعاون طلاب الصف العاشر الأساسي التي يستخدمونها أثناء استخدامهم الطريقة التعاونية في حل المسائل الإثرائية؟ (2) ما

هي أنواع الصعوبات التي يواجهها طلاب الصف العاشر الأساسي أثناء حلهم لمشكلات رياضية بطريقة تعاونية؟ (3) كيف يتغلب الطلاب على هذه الصعوبات؟

وتوصلت الباحثة إلى عدة نتائج أهمها أن الطلاب استخدموا التفاوض بشكل رئيس للتوصل إلى معاني تتعلق بالمسائل الرياضية وكذلك في محاولاتهم لحل هذه المسائل، وكذلك استخدموا التفاوض للوصول إلى قرارات معتمدين على أدلة تجريبية أحياناً وعلى شخص عارف أحياناً أخرى. وبالنسبة للحديث بين الذاتي فقد وجدت الباحثة العديد من المتفقات اللغوية التي استخدمها الطلاب أثناء تفاوضهم.

وحول الصعوبات التي واجهت المجموعات، فقد كانت في أغلب الأحيان من نوع نقص في التطور والتقدم في الحل، وكان الطلبة قد تغلبوا على هذه الصعوبات إما بالتفاوض بين أفراد المجموعة أو باللجوء للباحثة عندما لم يتمكن أي من أفراد المجموعة من مساعدة المجموعة لتخطي الصعوبة.

وتوصي الباحثة بعدة توصيات أهمها إجراء مزيد من الأبحاث الكيفية (النوعية) حول العمل التعاوني، وكذلك الأنشطة الإثرائية وتسليط الضوء عليها في الدراسات العربية حيث أن عدد الدراسات التي تعالج مثل هذا الموضوع كان قليلاً جداً، وإجراء دراسات حول حل الأنشطة باستخدام استراتيجية التعلم التعاوني، وكذلك تدريب الطلاب على حل الأنشطة الرياضية في مجموعات بحيث يتوصلون معاً إلى معاني رياضية وعلاقات ويفسرون ظواهر جديدة بحيث يستفيدون من خبرات بعضهم البعض، وتقترح الباحثة إدخال أنشطة إثرائية لمنهاج الرياضيات بحيث يحلها الطلاب كأنشطة من خارج الكتاب المقرر، وعمل آلية متابعة للطلاب تحثهم على حل مثل هذه الأنشطة، وتوعية الطلاب بضرورة هذه الأنشطة في تنمية تفكيرهم الرياضي ودورها في تطوير قدرتهم على حل المسائل، وتوصي الباحثة أيضاً بتوفير بيئة صفية ومدرسية غنية بمصادر تعلم الرياضيات.

الفصل الأول

مشكلة الدراسة (خلفيتها وأهميتها)

مقدمة الدراسة:

يصف محسن (2007) تدريس الرياضيات على أنه ليس أمراً يسيراً، فهو عمل شاق، وكثير المتطلبات، فمادة الرياضيات ليست سهلة التعليم أو التعلم، كما أنها تُعدّ – بالنسبة لكثير من الطلاب– غريبة، وغامضة، ومخيفة، ودروسها غير ممتعة، وثمة عوامل تجعل من هذه المادة أكثر صعوبة من غيرها: أولاً، هي ذات طبيعة مجردة أكثر من أي مادة أخرى، وثانياً، أن مواضيع الرياضيات متسلسلة فإذا حدث تقصير في فهم أي منها فإنه يؤثر على فهم الموضوع الذي يليه.

وإحدى الطرق التي يمكن أن تساعد في التغلب على صعوبة تعلم الرياضيات هي الاستعانة بطرق واستراتيجيات تدريس مختلفة، ومنها التعاون في مجموعات بين الطلاب.

فيصف السعيد (2007) التطور التاريخي الذي أدى إلى تبني طريقة التعاون بين الطلاب كطريقة تعلم. مع أوائل التسعينات من القرن الماضي بدأت حركة عالمية جادة لتطوير المناهج المدرسية وإعادة صياغتها وتضمينها الموضوعات والحقائق والمفاهيم المعاصرة، إلا أن هذا التطوير كان مقتصراً على المحتوى دون الاهتمام بطريقة التدريس داخل الصف حيث تحول أسلوب التدريس في معظم الحالات إلى تلقين أكثر من كونه تعليماً ذا معنى، وهذا النوع من التدريس لم يعد يفي بالكثير من متطلبات العصر. ولذلك فقد تأثر عدد كبير من البحوث والدراسات التربوية لهذه التطورات فاتجه البعض نحو استخدام التعلم التعاوني كأحد استراتيجيات التدريس غير التقليدية والفعالة جداً، حيث تقوم على التعاون وتؤدي إلى نتائج معرفية وغير معرفية بصورة أفضل من طرق التعلم التقليدية القائمة على التنافس.

ويؤكد عبد الفتاح (2010) ما ذكره الكاتبان السابقان، ذاكراً أنه استجابة للتغيرات والتطورات التي حدثت – في الآونة الأخيرة – في ميدان طرق التدريس بصفة خاصة وللتغلب على داء اللفظية التي يعاني منها التعليم، تم استحداث أساليب وطرائق جديدة للتعلم لمواكبة ثورة المعلومات وتنامي المعرفة في القرن الحادي والعشرين لمساعدة الطالب على النمو الشامل والمتكامل في كافة جوانب شخصيته. ومن أهم الطرق التي ظهرت في الثمانينيات إستراتيجية التعلم

التعاوني الذي يعد من أهم الاستراتيجيات التدريسية التي تعود بمردود تعليمي يحقق للطلاب مكاسب كثيرة منها: زيادة التحصيل الدراسي، ونمو المهارات الأكاديمية والاجتماعية وبناء اتجاهات إيجابية نحو المواد الدراسية وتحقيق الذات والتوافق الاجتماعي وزيادة الثقة بالنفس وبالآخرين وتنمية مفهوم ايجابي للذات، كما أن التعلّم التعاوني يقضي على الملل ويجعل المادة التعليمية مثيرة للتعلم ومشوقة ويخفف من انطوائية بعض الطلاب وينمي روح المحبة بين المتعلمين.

وتحديداً بالنسبة لتعليم وتعلم الرياضيات، في ضوء التغيرات التي حدثت في تدريس الرياضيات والنظرة الحديثة للتعليم أصبح الاهتمام منصباً على كل من المحتوى والطريقة لأنهما من أساسيات تدريس الرياضيات في العصر الحاضر (المالكي، 2002). وإحدى الطرق المقترحة لتعلم الرياضيات بشكل أكثر تفاعلاً هي التعاون.

وقد أشار ديفيدسن (Davidson, 1990)، ضمن أحد موضوعات الكتاب السنوي للمجلس القومي لمعلمي الرياضيات بالولايات المتحدة الأمريكية (National Council of Teachers of Mathematics – NCTM)، وتحت عنوان " التعليم التعاوني في الرياضيات من خلال مجموعات صغيرة"، أن طرق التعلم التعاوني داخل مجموعات صغيرة يمكن أن تطبق مع كل مستويات الطلاب العمرية، وكذا كل مستويات تعليم الرياضيات من المرحلة الابتدائية وحتى الدراسة الجامعية، والأكثر من ذلك أن العمل التعاوني في مجموعات صغيرة (Small Groups Working Cooperatively) يمكن استخدامه للعديد من الأغراض التعليمية مثل: مناقشة المفاهيم (Discussion of Concepts)، الاكتشاف/ الاستقصاء (Inquiry/ Discovery)، حل المسائل (المشكلات) (Problem Solving)، النمذجة الرياضية (Mathematical Modeling)، واستخدام التكنولوجيا (Using of Technology) ولا بد من تحليل النشاط التعاوني للطلبة من أجل تحقيق هذه الأغراض التعليمية بنجاح.

مشكلة الدراسة:

أصبح التربويون حديثاً يعتنون بالكيفية التي تمكن الطالب من تحقيق تعلم أفضل أكثر من عنايتهم بالكيفية التي تمكن المعلم من تقديم درس أفضل، ما أدى إلى الانتقال من الأنشطة التعليمية التي تتمحور حول المعلم مثل الإلقاء والمناقشة التي يقودها عادة المعلم إلى الأنشطة التي

تتمحور حول الطالب ومنها التعلم التعاوني الذي يسمح للطلاب بالمشاركة الفاعلة بدلاً من أن يكونوا متلقين سلبيين (الربيعي، 2011).

وبالرغم من التحديث والتطوير الذي طرأ على المناهج وكتب الرياضيات من أجل التركيز على المتعلم وجعله محور العملية التعليمية التعلّمية، إلا أن أساليب التدريس التي يتبعها بعض المعلمين ما زالت بوجه عام تقليدية، وغير فعالة. وفي كثير من الأحيان لا يحسن هؤلاء المعلمون استغلال وقت الحصة في تدريس منتج، أو علاج نواحي القصور والضعف عند الطلبة، ولا حتى تشخيصها أو الوقوف على أسبابها، ويؤدي هذا بدوره إلى ضعف التحصيل، وتعمق الاتجاهات السلبية نحو الرياضيات (أبو زينة، 1989).

ولذلك، فقد شجعت وزارة التربية والتعليم الفلسطينية ووكالة الغوث الدولية المعلمين على استخدام طريقة التعلم بنظام المجموعات التعاونية في التدريس، من خلال النشرات والدورات التدريسية التي أعطيت للمعلمين في الأعوام الماضية (أبو عطية، 1999) والتي تسعى الوزارة من خلالها إلى تطوير خبرة المعلمين في استخدام طريقة التعلم التعاوني.

ومن هنا، لا بد من التركيز على موضوع تحليل أنواع تعاون الطلاب أثناء النشاط التعاوني لحل مسائل إثرائية، إلا أن هذا الموضوع لم يلقَ اهتماماً كبيراً من الباحثين بشكل عام، والعرب بشكل خاص، ومن هنا جاءت هذه الدراسة التي تتحدد مشكلتها في الإجابة عن السؤال الرئيس الآتي:

ما هي أنواع تعاون طلبة الصف العاشر أثناء قيامهم بحل أنشطة إثرائية في مجموعات تعاونية، وما أنواع الصعوبات التي تواجههم وكيف يتغلبون عليها؟

والسبب في اختيار الباحثة لهذه المشكلة هي توصية مركز القياس والتقويم في وزارة التربية والتعليم الفلسطينية عام (1999/1998) بضرورة التركيز على الطرائق النوعية في تعليم الطلبة، لكي يتيح للمعلم أن ينوع أساليبه التدريسية لتتلاءم مع حاجات الطلبة وميولهم (حج يحيى، 2011)، ولعلّ أهم الطرائق النوعية طريقة التعلم التعاوني، وذلك لما تتيحه من فرصة للمعلم للتعرف بعمق إلى طرق تفكير الطلاب ومشكلاتهم وأنواع الصعوبات التي تواجههم، خاصةً إذا تم تدريب المعلم على تطبيق الخطوات الملائمة لهذه الطريقة في التعلم.

وكذلك تم التركيز في الجلسات التحضيرية لمؤتمر الرياضيات العالمي الخاص بتعلم وتعليم الرياضيات والذي عُقد في سنغافورة عام 1998م على ضرورة الابتعاد عن استخدام أسلوب المحاضرة في تدريس الرياضيات، والبحث عن طرق أخرى يكون محورها المتعلم والتي يشكل التعلم التعاوني أبرزها (المقدادي، 2006).

وبالإضافة لذلك، ترى الباحثة أن مناهج الرياضيات المدرسية الحديثة – وإن كانت تحوي عدداً من الأنشطة والمسائل التي يمكن تنفيذها بشكل تعاوني– فإنها لا تعطي أهمية كبيرة لتوضيح كيفية تنفيذ مثل هذه الأنشطة لتحقيق أفضل النتائج، وكذلك لا توضح دور المعلم فيها، فدوره ليس مراقبة انضباط الطلاب أثناء تنفيذ الأنشطة التعاونية والإشراف عليهم – كما يعتقد معظم المعلمين–، وإنما على المعلم مراقبة سلوك التلاميذ وكيفية بنائهم للمعلومة بشكل تعاوني، وطريقة تفكيرهم وتحليلهم للمعلومات المتوفرة ومن ثم التوصل للحلول النهائية لكي يتسنى له ليس فقط تقييم نتائج المجموعة التعاونية النهائية، وإنما تقييم كل طالب منفرداً ومعرفة مدى وكيفية إسهامه في النتائج التي توصلت لها المجموعة، وهذا ما لم تجده الباحثة في المدارس من خلال عملها كمدرسة. كما أن من أهم الأمور التي لاحظتها الباحثة أن الطلاب لا يستطيعون تمييز الصعوبة التي يواجهونها عند حل المشكلات، ولا يستطيعون التعبير عن المعلومة التي يحتاجونها، وهناك عدم تحقيق للأهداف المرجوة من العمل في مجموعات صغيرة نتيجة لعدم مقدرتهم على التفكير بشكل تعاوني والاستفادة من معلومات أفراد المجموعة بشكل بنّاء للتوصل لحل للمسائل، فبرزت الحاجة لتحليل سلوكيات الطلاب وتعاونهم وتفكيرهم في حل المشكلات.

أهداف الدراسة:

هدفت هذه الدراسة إلى تحليل كيفية تعاون طلاب الصف العاشر أثناء حلهم لمشكلات رياضية بطريقة تعاونية من خلال إعطائهم أسئلة إثرائية وملاحظة سلوكهم وأدائهم من خلال المراقبة المضبوطة، وملاحظة قيامهم بخطوات منتظمة عند مواجهة الطلاب لصعوبات معينة وتمييز هذه الصعوبات وتصنيفها بالاعتماد على نظريات تربوية، ومعرفة أنواع التعاون الذي يستخدمه التلاميذ.

أهمية الدراسة:

هناك عدد كبير من الدراسات التي تبحث في أثر استخدام استراتيجية التعلم التعاوني لجميع المراحل الدراسية والفئات العمرية وجميعها توصلت إلى أن المجموعات التي درست بطريقة تعاونية كان أداؤها أفضل من المجموعات التي استخدمت طرقاً أخرى، إلا أن الباحثة لم تجد دراسات عربية تتعلق بكيفية تعاون الطلاب ليتعلموا بشكل عميق مواضيع رياضية أو تتعلق بتحليل تفكيرهم التعاوني وكيفية التوصل للحلول والاستنتاجات بشكل تعاوني، وكذلك كيفية تمييزهم وتصنيفهم ومعالجتهم للصعوبات التي تواجههم أثناء تنفيذهم للمهمة التعاونية، من هنا اكتسبت هذه الدراسة أهميتها.

وتبرز الأهمية العملية للدراسة في أنها سوف تسهم في توضيح مفهوم التعلم التعاوني وأنواعه وفوائده والمشكلات التي تواجهنا عند تطبيقه. وهذا سوف يساعد معلمي الرياضيات على اتخاذ خطوات ملائمة لمساعدة الطلاب الذين يتعلمون بشكل تعاوني، كما ستشجعهم على استخدام هذه الطريقة في تعليمهم للرياضيات إذ سيصبحون أكثر وعياً لشروط نجاح عملية تعاون الطلاب لفهم مواضيع رياضية. بالإضافة إلى ذلك، الدراسة سوف تساعد المؤسسات التربوية كالمدارس وكليات التربية في إقامة دورات إعداد معلمين وتدريب المعلمين على استخدام التعلم التعاوني في صفوفهم.

أسئلة الدراسة:

- تحاول هذه الدراسة الإجابة عن الأسئلة التالية:
- ما هي أنواع تعاون طلاب الصف العاشر الأساسي التي يستخدمونها أثناء استخدامهم الطريقة التعاونية في حل المسائل الإثرائية؟
- ما هي أنواع الصعوبات التي يواجهها طلاب الصف العاشر الأساسي أثناء حلهم لمشكلات رياضية بطريقة تعاونية؟
- كيف يتغلب الطلاب على هذه الصعوبات؟
- ما هو رأي الطلاب بالعمل التعاوني لحل مسائل إثرائية؟

حدود الدراسة:

كانت حدود الدراسة كما يأتي:

1. ستركز هذه الدراسة على تحليل تعاون أربع مجموعات من طلاب الصف العاشر بحيث يكون هناك مجموعتان من الذكور ومجموعتان من الإناث مختارة من المدارس التابعة لمديرية التربية والتعليم في جنين.
2. سيتم إجراء الدراسة في الفصل الدراسي الثاني من العام الدراسي 2012-2013م.

مصطلحات الدراسة:

- التعلم التعاوني:

تقنية ينجز فيها التلاميذ أعمالهم كشركاء في جماعات صغيرة من خلال تناولهم أنشطة وأوراق عمل تساعد في عملية تعلم الدرس أو الموضوع المراد دراسته، ويتعلم التلاميذ بطيؤوا التعلم من المتفوقين بالمناقشة والحوار والمشاركة، وينشغل التلاميذ داخل كل مجموعة على حدة بالحسابات والتقديرات العملية، وبذلك يصبح التعلم التعاوني مساعداً لقياس مستوى التفكير ومهارات حل المشكلات والمهارات اللغوية والاجتماعية والأداء المستقبلي وانتقال المعرفة Klinzing, (2003).

- المسائل الإثرائية في الرياضيات:

مجموعة من المسائل الرياضية ذات طبيعة أكاديمية يُفضّل أن تكون شيقة، تستثير في التلاميذ الرغبة في دراسة المادة من ناحية وحبها والإبداع فيها من ناحية أخرى، ومن أمثلة هذه المسائل: الألغاز الذهنية والألعاب العقلية والطرائف الشيقة والمغالطات الرياضية والقصص التاريخية ذات الصلة بالرياضيات وموضوعاتها وعلمائها البارزين (Posamenter & Stepleman , 1991) .

أما المسائل الإثرائية في الدراسة الحالية فهي مسائل من خارج الكتاب المدرسي المقرر، وهذه المسائل تستثير فضول الطلاب وإيجابياتهم وتحفز مهارات التفكير لديهم من خلال ما تتيحه لهم من خبرات جديدة غير روتينية تتسم بالمرونة والعمق والاتساع ما يؤدي لتكثيف معلوماتهم وتعميق خبراتهم، وهي أيضاً مواقف تعليمية جديدة يتعرض لها المشاركون في الدراسة لأول مرة

وليس لديهم معلومات سابقة عنها، وقد سيقت هذه المسائل من أجل معرفة كيفية توصل الطلاب لبعض التعميمات الرياضية المتعلقة بالأعداد وكيفية إثبات هذه التعميمات رياضياً، وكذلك كيفية اكتشافهم لأنماط معينة في الأعداد.

الفصل الثاني

الإطار النظري والدراسات السابقة

سوف يتطرق هذا الفصل إلى القضايا التي تهتم بها مشكلة البحث وهي الصفات النوعية لتعاون الطلاب عند حلهم مسائل رياضية إثرائية. هذه القضايا هي التعلم التعاوني بشكل عام والتعلم التعاوني في صف الرياضيات بشكل خاص، وحل مسائل إثرائية.

ونعرض بدايةً مفهوم التعلم النشط الذي يتضمن أنواع كثيرة من التعلم يعد التعلم التعاوني أبرزها. فيمكن تعريف التعلم النشط بأنه التعلم الذي يعني ببساطة إشغال المتعلم بشكل مباشر ونشط في عملية التعليم ذاتها بمعنى التعلم بالأنشطة التي تنفذ داخل الصف، وإذا لم يكن الوضع والحالة هذه فإن تعلمه يقتصر على استقبال المعلومة اللفظية والمرئية بدلاً من المشاركة والتفكير والابتكار. (زامل، 2006)

التعلم التعاوني:

يعد التعليم التعاوني من الأساليب التدريسية التي دعت إليها الحركة التربوية المعاصرة بعد أن أثبتت نتائج البحوث والدراسات فاعليتها ودورها الإيجابي في رفع التحصيل الدراسي للمتعلمين وتنمية مهارات العمل الجماعي، فالمهارات التعاونية بحد ذاتها تُعدّ مخرجات تعليمية مهمة ترتبط بنجاح الطالب في حياته المستقبلية بما استطاع أن يمتلكه من توافق مع الآخرين نتيجة تعلمه هذه المهارات، فالتعلم التعاوني وما يحققه من مميزات وإيجابيات تنعكس بدورها على دافعية المتعلمين للتعلم.

وللتعلم التعاوني أهداف يشير إليها عبد الحميد (1999) قائلاً أن نموذج التعلم التعاوني يُستخدم لتحقيق ثلاثة أهداف تعليمية هامة على الأقل وهي:

1- تحسين التحصيل الأكاديمي (Academic Achievement) حيث يستهدف التعلم التعاوني تحسين أداء الطالب في مهام تحصيلية هامة، وقد أثبت مطوروه أن نموذج بنية المكافأة التعاونية يزيد من قيمة التعلم الأكاديمي عند الطلاب ويغير المعايير المرتبطة

بالتحصيل، وأن تركيز الجماعة على التعلم التعاوني يمكن أن يغير معايير ثقافة الطلاب أو يجعلها أكثر تقبلاً للامتياز في نهاية التعلم الأكاديمي.

2- تقبل التنوع والاختلاف أو الفروق بين الطلاب (Acceptance of Diversity)وهو التقبل الأشمل والأوسع لأناس يختلفون في الثقافة والمستوى الاجتماعي ومستوى القدرات والتحصيل، والتعلم التعاوني يتيح الفرص للطلاب ذوي الخلفيات المتباينة والظروف المختلفة أن يعملوا معتمدين بعضهم على البعض في مهام مشتركة، ومن خلال استخدام بنيات المكافأة التعاونية يتعلمون تقديرهم لبعضهم البعض.

3- تنمية المهارات الاجتماعية (Social Skill Development) حيث يضم التعلم التعاوني أهدافًا ومهارات اجتماعية متنوعة، وهو أن يتعلم الطلاب مهارات التعاون والتضافر والمناقشة والحوار والمشاركة والثقة بالنفس واحترام الآخرين وتقدير العمل التعاوني، ولعلنا نلاحظ أن هذه المهارات هامّة وضرورية في مختلف جوانب الحياة.

ويقول الفقي (2003) أنه إذا كان تعليم الرياضيات يهدف لمساعدة الطلاب على التفكير الرياضي وفهم العلاقات والارتباطات بين مختلف الحقائق والعمليات الرياضية، وتطبيق المعرفة الرياضية بصورة واضحة، فذلك يشجع على توظيف التعلم التعاوني في تعليم الرياضيات، فالمفاهيم والمهارات يمكن تعلمها بصورة أفضل كعمليات ديناميكية من خلال تفاعل نشط بين التلاميذ. وإضافة لذلك، يعد حل المشكلات الرياضية موقفاً يرتبط إلى حد كبير بنموذج التعلم التعاوني، حيث يتضمن نموذج التعلم التعاوني المراحل الآتية: موقف يتمكن فيه الطلاب من الاستجابة والمناقشة كمجموعة، تشخيص جماعي للموقف، مناقشة جماعية لصياغة المشكلة والفروض وتقويم وتعديل الإجراءات وتجريب الخطط وملاحظة النتائج المختلفة، تأمل جماعي للاستراتيجيات والأهداف ونتائج الخطوات السابقة، وهذه المراحل نفسها متضمنة في نموذج حل المشكلات. ويضيف الفقي (2003) أن تعلم الرياضيات داخل مجموعات صغيرة ينبغي أن يكون مبنياً على التعاون وذلك للتواصل بفعالية فيكتسب التلاميذ الثقة في قدرتهم الرياضية حيث يتم التشجيع المتبادل من قبل الزملاء في المجموعة، وهذا يشجع على استخدام استراتيجيات جديدة ومتنوعة في الحل، وكذلك تعميم أفكار جديدة وإيجاد طرق حل جديدة للمسائل.

ويشجع التربويون على استخدام التعلم التعاوني لما له من مميزات بالنسبة للطالب والمعلم، فالتعلم التعاوني كما يقول الطنطاوي (2002) يتيح الفرصة للطالب للمحاولة والخطأ والتعلم من خطئه، وإلقاء الأسئلة والتعبير عن رأيه دون حرج، والإجابة على بعض التساؤلات التي يطرحها زملاؤه، وعرض أفكاره على الآخرين. ومن ناحية أخرى، ينمي التعلم التعاوني القدرة الإبداعية لدى التلاميذ، وتطبيق ما يتعلمونه في مواقف جديدة، وكذلك ينمي القدرة على حل المشكلات، وزيادة تقبل الطالب لوجهات النظر المختلفة، ورفع مستوى اعتزاز الطالب بنفسه. وبالنسبة للمعلم، يقول محمد (2004) أن التعلم التعاوني يقلل من الفترة الزمنية التي يعرض فيها المعلم المعلومات على التلاميذ، ويقلل جهد المعلم في متابعة وعلاج التلميذ الضعيف، وهو أيضاً يقلل من بعض الأعمال التحريرية للمعلم مثل التصحيح، لأن كل مجموعة تقدم عملاً واحداً، وإضافة لذلك، فإن المعلم يمكنه متابعة (8) أو (9) مجموعات بدلاً من (40) أو (50) طالباً داخل الفصل.

إن التحليل النوعي لتعاون الطلاب أثناء ممارسة التعلم التعاوني لم يحظَ باهتمام كبير من الباحثين عموماً والعرب خصوصاً، وكذلك موضوع المسائل الإثرائية لم يلقَ اهتماماً كبيراً من الباحثين العرب، وبحدود معرفة الباحثة واطلاعها، لم تعثر على أية دراسة محلية واحدة بحثت في موضوع تحليل تعاون الطلاب أثناء حلهم لمسائل إثرائية في الرياضيات لذلك لجأت الباحثة لتحليل تعاون الطلاب خلال حل مسائل إثرائية مستخدمة في ذلك نظريتين:

أولاً: النظرية المجذّرة "Grounded Theory" (Strauss & Corbin, 1998) والتي استخدمتها الباحثة لوصف سلوك الطلاب أثناء النشاط التعاوني، وتصنيف هذه السلوكيات، ثم محاولة إيجاد علاقات فيما بينها. وتحتوي هذه النظرية على ثلاث مراحل: الترميز المفتوح، الترميز المحوري، الترميز المختار.

ثانياً: تحليل التعاون حسب:

كلارك وهيلم (Clarke & Helme, 1997) الذي يتناول تحليل التعاون ضمن خمس مركّبات هي:

1) التفاوض (Negotiation) والذي يخدم المجموعة في عدة أمور مثل التوصل إلى قرار أو التوصل إلى معنى.

2) المعنى (Meaning) مثل التوصل إلى معنى لمفهوم رياضي معين.
3) بين الذاتية (Inter-subjectivity) والتي تتناول المتفقات اللغوية في حديث الطلبة خلال نقاشهم.
4) مواقف عدم التيقن (Uncertainty situations) التي يواجهها الطلبة خلال حلهم للمسائل مثل عدم التيقن حول صحة خطوة معينة يريدون القيام بها
5) القرار (Resolution) الذي يتوصل له الطلاب بالاعتماد على أمر ما مثل "تجربة سابقة" أو "شخص عارف" أو غيرها، والشخص العارف قد يكون أحد أفراد المجموعة يمتلك معلومة مفيدة لهم، أو قد يكون المعلم في حال عجز أفراد المجموعة من التوصل لقرار بمفردهم.

جوز (Goos,1998) لتمييز نوع الصعوبة التي يواجهها الطلاب، حين يعملون بشكل مشترك، وكذلك تمييز طرق تغلب الطلاب على الصعوبة في المجموعة التعاونية.

وسيتم الحديث بشكل مفصل عن هاتين النظريتين (النظرية المجذرة وتحليل التعاون) لاحقاً عند حديثنا عن طريقة تحليل المعطيات.

ومن أجل تحليل التعاون الذي سعت له الباحثة، قامت بالاطلاع على دراسات وأبحاث تناولت كلاً من التعلم التعاوني والأنشطة الإثرائية وسوف تقوم الباحثة بتقسيم هذه الدراسات إلى محورين أساسيين:

1. دراسات تناولت طريقة التعلم التعاوني في الرياضيات.
2. دراسات تناولت استخدام الأنشطة الإثرائية في الرياضيات، وفيما يأتي عرض توضيحي لكل محور منها.

التعلم التعاوني في الرياضيات

أجرى الباحث الباز (2004) دراسة مشاراً إليها في السعيد (2007) هدفت إلى التعرف إلى أثر استخدام أحد طرق التعلم التعاوني (طريقة فرق التحصيل الطلابية) على تنمية مهارات التواصل الرياضي وكذلك على التحصيل الدراسي لدى عينة مكونة من (75) تلميذاً وتلميذة من طلبة الصف الثاني الإعدادي. ولتحقيق هذا الهدف العام تم بناء أداتين هما اختبار التحصيل الدراسي واختبار مهارات التواصل الرياضي. وتعرّض الطلاب في المجموعة التجريبية لمعالجة

تمثلت في دراسة وحدة تحليل المقادير الجبرية تعاونياً باستخدام طريقة (فرق التحصيل الطلابية)، بينما تعرض تلاميذ المجموعة الضابطة لدراسة نفس الوحدة بالطريقة التقليدية، وتم تطبيق اختباري البحث على طلبة المجموعتين التجريبية والضابطة قبل وبعد المعالجة التجريبية. تم استخدام نموذج التحليل الإحصائي سباعي المرحلة لتحليل الدرجات الخام للبحث ووفقاً لهذا النموذج تم اختبار كل فرض من الفروض بإتباع سبع مراحل، ونتج عن هذا التحليل وجود فروق ذات دلالة إحصائية عند مستوى (0.01) بين متوسطي درجات المجموعة التجريبية والمجموعة الضابطة في اختبار التحصيل الدراسي وكذلك في اختبار مهارات التواصل الرياضي لصالح المجموعة التجريبية.

وفي سياق متصل، قام الباحث يوسف (1998) بدراسة لمعرفة أثر استخدام طريقة التعلم التعاوني وفق نموذجين هما: نموذج جيجسو ونموذج التعلم الجمعي في تحصيل طلاب الصف التاسع الأساسي في مادة الرياضيات واتجاهاتهم نحوها. عينة الدراسة كانت (3) شعب وكان عدد طلابها (104)، وتم تقسيمها إلى شعبتين تجريبيتين استخدمت نموذجي التعلم التعاوني، وشعبة ضابطة استخدمت التعليم التقليدي. نتائج دراسته كانت: (1) وجود فروق ذات دلالة إحصائية في التحصيل تعزى إلى طريقة التعليم لصالح الطريقة التعاونية، و(2) عدم وجود فروق ذات دلالة إحصائية في تحصيل الطلاب الذين درسوا وفق نموذج جيجسو وتحصيل الطلبة الذين درسوا وفق نموذج التعلم التعاوني، و(3) عدم وجود فروق ذات دلالة إحصائية في الاتجاه نحو الرياضيات يعزى لطريقة التعلم.

ونرى أنّ الباحثين يوسف (1998) والباز (2004) أرادا معرفة فيما إذا كان هناك أثر لأنواع ونماذج مختلفة من التعلم التعاوني على تحصيل الطلاب في مادة الرياضيات باعتبار أن تحصيل الطلبة هو المؤشر الأكبر الدال على تحقيق أهداف التعلم. واتفق حسن (2001) في دراسته المشار إليها في (الديب، 2004) مع الباحثين السابقين في هدف دراسته الذي تمثل في معرفة أثر استخدام استراتيجية التعلم التعاوني في تدريس وحدة التناسب وتطبيقاته لطلبة الصف الخامس الابتدائي على تحصيلهم، وبقاء أثر التعلم، وتنمية التفكير الاستدلالي في هذه الوحدة مقارنة بنظائرهم الذين درسوا الوحدة نفسها بالطريقة المعتادة، وبالتحديد، اهتم حسن (2001) بجانب "تنمية التفكير الاستدلالي" باعتباره وسيلةً مهمة لتحسين تحصيل الطلاب، ولتحقيق أهدافه، اختار عينة

من إحدى المدارس الابتدائية التابعة لإدارة أسيوط التعليمية بمحافظة أسيوط حيث تم اختيار مجموعة من تلاميذ الصف الخامس الابتدائي في هذه المدرسة لتعليمهم وحدة التناسب. وتوصل إلى أن تلاميذ المجموعة التجريبية الذين درسوا وحدة التناسب وتطبيقاته باستخدام استراتيجية التعلم التعاوني تفوقوا على أقرانهم في المجموعة الضابطة الذين درسوا الوحدة ذاتها بالطريقة المعتادة عندما تقدمت المجموعتان للاختبار التحصيلي البعدي متفقاً بذلك مع كل من يوسف (1998) والباز (2004)، وفي هذه الدراسة تفوق الطلاب الذين درسوا بالطريقة التعاونية في القدرة على التفكير الاستدلالي، وتمكنوا من استبقاء المادة المتعلَّمة والاحتفاظ بها بشكل أفضل من الطلاب المجموعة التي درست بالطريقة المعتادة. ولم تسهم الطريقة المعتادة في تدريس وحدة التناسب وتطبيقاته في تنمية التفكير الاستدلالي.

وقام أوستن (Austin, 1995) المشار إليه في عمدة (2008) بدراسة مشابهة للدراسات العربية الثلاث السابقة كان هدفه منها معرفة أثر تطبيق التعلم التعاوني على التحصيل في مادة الرياضيات ومدى احتفاظ الطلاب بالتعلم ومهارات حل المشكلات والاتجاه نحو الرياضيات وطبق دراسته على طلاب الكلية خلال فصل دراسي كامل، وتوصل إلى أن طلاب مجموعة التعلم التعاوني كانت درجة تمتعهم بالتعلم أكبر، وزادت لديهم مهارات حل المشكلات بشكل أفضل، ومستوى تحصيلهم كذلك كان أعلى من المجموعة الضابطة الذين درسوا بأسلوب المحاضرة التقليدية، إلا أن الدراسة توصلت إلى عدم وجود فروق ذات دلالة إحصائية في تغير الاتجاهات نحو مادة الرياضيات بين طلاب المجموعتين التجريبية والضابطة.

من ناحية أخرى هناك دراسات اهتمت بإثبات أفضلية التعلم التعاوني على التعلم التنافسي في الرياضيات، باعتبار أن الطلاب عندما يعملون معاً، فإنهم يستفيدون من خبرات بعضهم البعض ويتشاركون في بناء المعلومات بدلاً من التنافس في الإنجازات الفردية. فمثلاً قامت أبو عميرة (1997) بتجريب استخدام استراتيجيتيّ التعلم التعاوني الجمعي والتعلم التنافسي الجمعي في تعليم الرياضيات لدى طلاب المرحلة الثانوية العامة، وأظهرت نتائج هذه الدراسة فاعلية التعلم التعاوني الذي أبدى فيه التلاميذ تفوقهم على أقرانهم الذين تعلموا باستخدام طريقة العرض في اختبار حل المشكلات اللفظية في مادة الرياضيات، وبينت الباحثة أبو عميرة (أعلاه) فاعلية العمل الجماعي

والتعاوني الذي تم بين الطلاب والحوار والمناقشة التي أظهرت نتائج إيجابية في حل المشكلات اللفظية في الرياضيات. كذلك أجرى جونسون وجونسون (1995) دراسة كان من أبرز نتائجها أن العمل التعاوني ضمن الفريق يساعد في تحفيز التعلم ذي المعنى والذي يتحقق من خلال التفاعل، وحل المشكلات، والحوار، والتعاون والمشاركة. ومما توصلت له الدراسة أن تصميم التعلم التعاوني يسهم في بناء المعرفة المتأصلة في الخبرات الاجتماعية في بيئة التعلم التعاوني ضمن فريق (Vygotsky,1978).

التعلم التعاوني لا يؤثر فقط على المنافسة التعلمية بين الطلاب وإنما أيضا على تقويمهم الذاتي، وذلك كما يدعي روس ورولهيزر وهوبوم (Ross, Rolhiser & Hoaboam, 1997)، وقد قاموا بدراسة هدفت إلى التعرف إلى تأثير التقويم الذاتي على تحصيل تلاميذ المرحلة الابتدائية في الرياضيات في بيئة التعلم التعاوني، وتمت هذه الدراسة على عينة من طلاب الصفين الخامس والسادس بلغ عددها (300) طالب يدرسون أحد الموضوعات الرياضية داخل حجرة دراسية يسودها المناخ التعاوني مدة بلغ قدرها أسبوعين، ومن النتائج المهمة التي توصل لها روس ورولهيزر وهوبوم (أعلاه) قلة احتياج الطلاب للمساعدة من خارج المجموعة التعاونية، وارتفاع مستوى التحصيل لديهم، وانخفاض معدل القلق والرهبة من الاختبارات التقليدية لديهم.

أما الباحث تارم (Tarim, 2009) فوظف نظرية الذكاء المتعدد في التعلم التعاوني في دراسته لمعرفة آثار طريقة التعلم التعاوني مدعومة بنظرية الذكاء المتعدد على تحصيل طلاب الصف الرابع الابتدائي الأتراك في مادة الرياضيات وقدرتهم على فهم وحفظ المادة. وكانت عينة دراسته (150) طالباً الذين تم تقسيمهم إلى مجموعتين تجريبيتين (استعملت طريقة التعلم التعاوني المدعوم بنظرية الذكاء المتعدد، ومجموعتين ضابطتين (استعملت الطريقة التقليدية في التعليم)، وتم استخدام كلاً من الأدوات الآتية: اختبار التحصيل في مادة الرياضيات، مخزون الذكاء المتعدد ونموذج المعلومات الشخصية كأدوات لقياس الدراسة. وتوصل الباحث تارم (أعلاه) إلى أن طريقة التعلم التعاوني المدعومة بنظرية الذكاء المتعدد لها تأثير أكبر على التحصيل الأكاديمي من الطريقة التقليدية في التعليم، أما فيما يتعلق بنتائج الحفظ، تبين أنه لا تأثير لطريقة التعلم التعاوني المدعوم بنظرية الذكاء.

ومن جانب آخر، هناك دراسات عديدة بحثت في أثر التعلم التعاوني في مواد مختلفة غير الرياضيات واتفقت نتائجها مع نتائج تطبيق التعلم التعاوني في الرياضيات، فمثلاً الباحث عبيدات (2000) قام بدراسة سعى فيها إلى استقصاء أثر استخدام التعلم التعاوني والخريطة المفاهيمية في الفهم المفاهيمي لطلبة الصف السابع الأساسي في مادة العلوم مقارنة بالطريقة التقليدية فتوصل إلى: (1) وجود فرق في الفهم المفاهيمي عند طلبة الصف السابع الأساسي بين المجموعة الضابطة والمجموعة التجريبية يعزى إلى طريقة التدريس وكان لصالح المجموعة التجريبية والتي استخدمت التعلم التعاوني، و(2) عدم وجود فروق في الفهم المفاهيمي عند طلبة الصف السابع الأساسي بين المجموعة الضابطة والمجموعة التجريبية تعزى إلى الجنس، و(3) عدم وجود فروق في الفهم المفاهيمي عند طلبة الصف السابع الأساسي بين المجموعة الضابطة والمجموعة التجريبية تعزى إلى التفاعل بين الطريقة والجنس.

استخدام الأنشطة الإثرائية في الرياضيات

أجرت الباحثة رمل (2010) دراسة هدفت إلى الكشف عن فاعلية الأنشطة الإثرائية في تنمية التفكير الإبداعي من خلال تنمية قدرة الطلاقة، المرونة، الأصالة، التفاصيل، والتفكير الإبداعي ككل، كما هدفت إلى فحص تحسين التحصيل الدراسي من خلال تحسين المستوى المعرفي في مادة الرياضيات لدى تلميذات الصف الخامس الابتدائي الموهوبات بالمدارس الحكومية في مدينة مكة المكرمة، واستخدمت رمل (أعلاه) منهجاً شبه تجريبي واختارت 10 مواضيع دراسية في وحدة الكسور من مقرر الرياضيات للصف الخامس الابتدائي. عينة الدراسة كانت 50 طالبة من طالبات الصف الخامس الابتدائي الموهوبات بالمدارس الحكومية في مدينة مكة المكرمة، وشكلوا مجموعتين، إحداهما تجريبية درست باستخدام الأنشطة الإثرائية المعتمدة على الألغاز والمشكلات الرياضية غير الروتينية، أما المجموعة الأخرى فهي مجموعة ضابطة درست باستخدام الأنشطة العادية المصاحبة للكتاب المدرسي، وكلا المجموعتين خضعت لاختبار التفكير الإبداعي واختبار التحصيل الدراسي المعد من قبل الباحثة في وحدة الكسور. أظهرت نتائج الدراسة فاعلية الأنشطة الإثرائية في تنمية التفكير الإبداعي والتحصيل الدراسي في مادة الرياضيات لدى طالبات الصف الخامس الابتدائي الموهوبات بالمدارس الحكومية في مكة المكرمة، حيث تفوقت طالبات المجموعة

التجريبية على نظيراتهن في المجموعة الضابطة في متوسط درجات التفكير الإبداعي والتحصيل الدراسي البعدي.

كما قام الباحث الخضر (2000) بدراسة مشابهة لدراسة رمل (2010) هدف فيها إلى التعرف على فاعلية استخدام الأنشطة الإثرائية في تدريس الرياضيات على التحصيل الدراسي والتفكير الإبداعي لدى تلميذات الصف الأول المتوسط بمنطقة القصيم بالمملكة العربية السعودية، حيث تكونت عينة دراسته من 60 طالبة من طالبات الصف الأول المتوسط بمنطقة القصيم، وقسم هذه العينة إلى مجموعتين تجريبية وضابطة، وخضعت المجموعتان لاختبار تحصيلي واختبار تورانس الإبداعي، وتوصل الخضر (2000) بعد تحليل نتائج دراسته إلى تفوق المجموعة التجريبية مقارنة بالضابطة في درجات الكسب في اختبار التفكير الإبداعي واختبار التحصيل الدراسي، مؤيداً بذلك ما توصلت له رمل (2010).

أما السعيد (2002) فتناول في دراسته فئة مختلفة عن الفئة التي تناولتها رمل (2010) فاهتم بدراسته بالطالبات على اختلاف مستوياتهن التحصيلية، وقام بإعداد برنامج إثرائي قائم على أنشطة إثرائية لطالبات متفاوتات في تحصيلهن الدراسي في مبحث الرياضيات، وكان الهدف من هذه الدراسة تحديد الأنشطة الإثرائية التي يمكن استخدامها لتحقيق الأهداف التربوية، كما هدفت الدراسة إلى فحص اختلاف درجة استفادة التلميذات من البرنامج الإثرائي باختلاف مستويات القدرة على التحصيل الدراسي لديهن. بعد تطبيق الدراسة أظهرت النتائج أن الطالبات ذوات التحصيل المتدني في الرياضيات قد استفدن من برنامج الأنشطة الإثرائية الذي قدمه الباحث لهن في الرياضيات بنفس المستوى الذي استفدن منه الطالبات ذوات التحصيل العادي في الصف العادي.

ويساعد التعلم التعاوني أيضاً في تنمية مهارات حل المشكلات، ليست المشكلات الرياضية فحسب، بل المشكلات الحياتية اليومية وذلك لأنه يربط ما يتعلمه الطالب في المدرسة بحياته في الواقع من خلال التعلم في مجتمع تعاوني مصغر، ما يؤدي للوصول لتعلم ذي معنى، وهذا ما يؤكده الباحثان بوسامنتر وستيبلمان (Posamenter and stepleman , 1991) بعد قيامهما بدراسة تجريبية في السويد هدفا منها إلى معرفة أثر الوحدات الإثرائية المقدمة للطلاب على تحسين مهاراتهم في حل المشكلات، حيث قام الباحثان بإعداد مجموعة من الأنشطة الرياضية على صورة وحدات إثرائية

مصغرة، وكان عدد هذه الوحدات 113 وحدة إثرائية، وتناولت هذه الوحدات فروع الرياضيات المختلفة، ومن أهم الموضوعات التي تناولها البرنامج في وحداته الإثرائية هو تطبيقات الرياضيات في الحياة اليومية، والطموح وحب الاستطلاع، والإبداع في حل المشكلات. وقد صنف الباحثان هذه الوحدات حسب: فرع الرياضيات الذي تنتمي له، ومستوى القدرة الرياضية لدى الطالب الراغب في دراستها، وموضوع الرياضيات الذي تدور حوله.وقد اختار بوسامنتر وستيبلمان(1991) عينتهما الدراسية من طلاب الصفوف الثاني وحتى الثامن وبلغت (120) طالب وطالبة وتم تطبيق البرنامج عليهم مدة فصل دراسي كامل، وأظهرت نتائج دراستهما فروقاً واضحة بين المجموعتين التجريبية والضابطة في أداء الطلاب لصالح التجريبية في مجال مهارة حل المشكلات.

وتوصلت الباحثة جوشا (Joshua, 1993) إلى نتائج متفقة مع ما توصل له بوسامنتر وستيبلمان (أعلاه) في دراسة تجريبية أجرتها في ألمانيا قامت فيها بإعداد برنامج بالأنشطة الإثرائية المناسبة لتدريس الرياضيات للطلاب في مراحل التعليم العام، وقامت جوشا بتطبيق هذا البرنامج على جميع الطلاب في كافة المستويات بمن فيهم ذوو الصعوبات التعليمية في مادة الرياضيات، وكذلك ذوو التحصيل المتدني، واحتوى البرنامج الذي طبقته الباحثة (أعلاه) على أنشطة إثرائية متنوعة المحتوى والمستوى، وكذلك متنوعة في الموضوع الرياضي الذي تتناوله. وتم تحديد الطالب المستهدف من كل نشاط إثرائي من حيث: مستوى القدرة الرياضية المناسبة للاستفادة من النشاط الذي يقدمه البرنامج، وعمر الطالب الزمني بحيث تم تصنيف الأنشطة الإثرائية إلى أربعة مستويات (أ، ب، ج، د) متدرجة حسب عمر الطالب الزمني، وتم تخصيص أربعة كتب للأنشطة الإثرائية بواقع كتاب واحد لكل مستوى من تلك المستويات الأربعة، وتم تطبيق البرنامج على طول الفصلين الدراسيين الأول والثاني. وبعد انتهاء تطبيق البرنامج، توصلت جوشا إلى نتائج مشابهة لما توصل له بوسامنتر وستيبلمان (1991)، حيث أظهر الطلاب تحسناً واضحاً في أدائهم ليس في حل المشكلات في الرياضيات فحسب، بل في كافة المواد الدراسية، وكذلك في التعامل مع مشكلاتهم الحياتية ما يؤكد أثر التعلم التعاوني في تحقيق التعلم ذي المعنى.

وبشكل مرتبط بالمشكلات الرياضية بالتحديد، قام هاولي وأولسون(Dale R. Hawley & David H. Olson, 1995) بدراسة تجريبية أجريت في الولايات المتحدة الأمريكية في ولاية الينوي، حيث

طبقت هذه الدراسة على ثلاثين زوجاً من طلاب المرحلة المتوسطة ممن لديهم صعوبات في الرياضيات بشكل عام، وفي حل المسائل بشكل خاص. سعى الباحث (أعلاه) في دراسته هذه إلى معرفة فعالية برنامج الأنشطة الإثرائية في زيادة القدرة على حل المشكلات في المسائل الرياضية اللفظية لدى الطلاب الذين طبق عليهم هذا البرنامج، فقام بتقسيم الطلاب إلى مجموعتين، الأولى تجريبية تطبق برنامج الأنشطة الإثرائية عليهم، والثانية ضابطة درست المسائل بالطريقة الاعتيادية، وتوصلت الدراسة إلى أن المجموعة التي خضعت للتدريب والبرنامج الخاص بالأنشطة الإثرائية أظهرت فروقاً كبيرة في بعض المتغيرات المهمة– مقارنة بالمجموعة الضابطة– من خلال قدرتهم على التعامل مع المسائل اللفظية وتحديد معطيات المسألة وحلها. ومما أظهرته النتائج أيضاً، أن 98% من المشاركين أظهروا مستويات عالية من الرضا عن المشاركة في البرنامج، وجميعهم أوصوا بمشاركة الآخرين من زملائهم في البرنامج.

وأجرى الباحث تشانسلر (Chanceller, 1992) دراسة تجريبية في ولاية واشنطن في أمريكا قام فيها بإعداد مجموعة من الأنشطة الإثرائية المتعددة في المحتوى والمستوى من الصف الثاني وحتى الثامن تم توزيعها على الأسابيع الدراسية حيث كان لهذه الأنشطة خطة تسير بالتوازي مع الخطة الدراسية الاعتيادية، حيث تضمنت هذه الأنشطة مشكلاتٍ رياضية مفتوحة النهاية، وألعاباً رياضية ذكية تجعل الطلاب منشغلين معظم وقت الدرس بأعمال ممتعة، وكانوا يقومون بها بطريق فردية أو تعاونية، وطبق الباحث (أعلاه) دراسته مدة فصل كامل، وأظهرت نتائجها تحسناً ملحوظاً لدى طلاب عينة الدراسة في مجال حل المشكلات في المسائل الرياضية متفقاً بذلك مع نتائج الباحثان هاولي وأولسون (Hawley & Olson,1995).

وفي مجال تنمية التفكير الإبداعي بشكل عام، قام الباحث العقيل (2011) بإجراء دراسة حدد هدفه فيها بمعرفة أثر استخدام أنشطة علمية إثرائية مقترحة في تنمية عمليات العلم التكامليّة والتفكير الإبداعي لدى التلاميذ الموهوبين في المرحلة الابتدائية بشكل عام لدى التلاميذ الموهوبين في الصف السادس الابتدائي، كما هدف إلى معرفة رأي التلاميذ الموهوبين في أثر استخدام الأنشطة العلمية الإثرائية في تنمية عمليات العلم التكاملية ومهارات الإبداع لديهم. استخدم الباحث (أعلاه) المنهج التجريبي الحقيقي القائم على تصميم المجموعة الضابطة مع اختبار قبلي واختبار بعدي، وتكونت

العينة من (50) طالباً من طلاب الصف السادس الابتدائي الملتحقين في برامج الرعاية المسائية في مركز الرياض لرعاية الموهوبين، وتضمّنت الأدوات أنشطة علمية إثرائية مقترحة (من إعداد الباحث) تم تصميمها وبناؤها وفق برنامج رعاية الموهوبين المدرسي المعتمد من قبل وزارة التربية والتعليم. كما تضمّنت الأدوات اختبارًا لقياس عمليات العلم التكاملية، استمرَّت تجربة البحث ثمانية أسابيع، وكان من أبرز النتائج وجود فروق دالة إحصائياً بين متوسطات درجات التلاميذ في المجموعة التجريبية والضابطة لصالح المجموعة التجريبية وذلك بالنسبة لاختبار التفكير الإبداعي البعدي، ووجود تأثير كبير للأنشطة العلمية الإثرائية المقترحة على مهارات التفكير الإبداعي، ومما توصلت له الدراسة تأكيد التلاميذ على الدور الفعّال للأنشطة العلمية الإثرائية المقترحة في اكتسابهم لمهارات عمليات العلم ومهارات التفكير الإبداعي، أما الطلاب أنفسهم فقد أكدوا على أهمية العمل الجماعي التعاوني، وأنه من المكاسب الحقيقية خلال تنفيذهم للأنشطة العلمية الإثرائية المقترحة، كما أكَّدوا على أن من أبرز إيجابيات الأنشطة العلمية الإثرائية هي تنوّع المهارات المستهدفة في تلك الأنشطة، إضافة إلى تنوّع المحتوى العلمي وأساليب العرض والتقديم.

ومن بين الدراسات كان دراسات اهتمت بمادة العلوم على اعتبار أنها توفر مجالاً واسعاً لتطبيق أنشطة إثرائية عديدة، فقد أجرى إسماعيل (2003) دراسة كان هدفه فيها قياس فعالية الأنشطة العلمية الإثرائية المقترحة في مادة العلوم في تنمية قدرات التفكير الابتكاري لدى التلاميذ المتفوقين في مادة العلوم في المرحلة الإعدادية، فقام الباحث (أعلاه) بتقديم اختبار لقياس قدرات التفكير الابتكاري (الطلاقة، المرونة، الأصالة) في العلوم لدى التلاميذ المتفوقين، وفحص فعالية الأنشطة العلمية الإثرائية في تنمية التفكير الابتكاري لدى التلاميذ المتفوقين في مادة العلوم بالمرحلة الإعدادية. اختار الباحث (أعلاه) عينة من التلاميذ المتفوقين في الصف الثالث الإعدادي من مدارس التعليم الإعدادي بإدارة حلوان التعليمية في محافظة القاهرة، وقام بتقسيمها إلى مجموعة تجريبية تم تقديم الأنشطة الإثرائية لها ومجموعة ضابطة لم تقدم لها أنشطة إثرائية. وقد توصل الباحث (أعلاه) إلى وجود فرق ذو دلالة إحصائية عند مستوى الدلالة (0.01) بين متوسطي درجات تلاميذ المجموعة التجريبية والمجموعة الضابطة في قدرة الطلاقة والمرونة والأصالة والتفكير الابتكاري في التطبيق البعدي لاختبار قدرات التفكير الابتكاري في وحدة العلوم الإثرائية لصالح المجموعة التجريبية مما يشير إلى فعالية الأنشطة الإثرائية المقترحة.

وكذلك أجرى عبد السلام (2001) دراسته محاولاً فيها معرفة أثر استخدام حقيبة تعليمية لأنشطة إثرائية في مادة العلوم في تنمية مهارات الاستقصاء العلمي لدى التلاميذ المتفوقين في الصف الثاني الإعدادي، وأثر الحقيبة التعليمية في تنمية مهارات الاستقصاء العلمي لدى الذكور والإناث، وتبحث وجود تفاعل بين الجنس (ذكور/إناث) والمجموعة (تجريبية/ضابطة). الباحث (أعلاه) استخدم المنهج التجريبي، فقسم عينة الدراسة إلى مجموعتين، الأولى مجموعة تجريبية تتكون من (32) طالب وطالبة من الطلاب المتفوقين في الصف الثاني الإعدادي وهذه المجموعة استخدمت حقيبة تعليمية لأنشطة إثرائية في العلوم، أما المجموعة الثانية فهي مجموعة ضابطة تكونت من (29) طالب وطالبة من الطلاب المتفوقين في الصف الثاني الإعدادي ولم تستخدم الحقيبة التعليمية للأنشطة الإثرائية التي استخدمتها المجموعة التجريبية في العلوم. طبق الباحث (أعلاه) الدراسة على المجموعة التجريبية لمدة ثمانية أسابيع تم خلالها دراسة الأنشطة الإثرائية الموجودة في الحقيبة التعليمية، وأظهرت نتائج الدراسة فعالية الحقيبة التعليمية لأنشطة إثرائية في تنمية مهارات الاستقصاء العلمي لدى الطلاب المتفوقين في الصف الثاني الإعدادي، وكذلك أظهرت عدم وجود أثر للجنس على نمو مهارات الاستقصاء العلمي، وأيضا عدم وجود تفاعل بين الجنس (ذكور/إناث) والمجموعة (تجريبية/ضابطة).

من خلال استعراض الدراسات السابقة العربية والأجنبية، نلاحظ أن جميع تلك الدراسات توصلت إلى فاعلية كلٍّ من التعلم التعاوني واستخدام الأنشطة الإثرائية في زيادة تحصيل الطلاب وتنمية مهارات التفكير لديهم، والدراسة الحالية تسعى لمعرفة نوعية لأنواع التعاون الذي يستخدمه الطلاب أثناء نشاطهم التعاوني والصعوبات التي تواجههم عند تطبيقها، وبالتالي مساعدة المعلم والطلاب في تمييز الصعوبة التي يواجهها الطلاب؛ لأن تمييز نوع الصعوبة والمشكلة سيكون الطريق إلى التغلب على هذه الصعوبة ما يؤدي لتحقيقٍ أفضل لأهداف التعلم التعاوني وأهداف الأنشطة الإثرائية المرجوّة.

الفصل الثالث

طريقة الدراسة وإجراءاتها

يوضح هذا الفصل الطريقة والإجراءات التي اتبعتها الباحثة في دراستها وكذلك مجتمع البحث والمشاركين في الدراسة، ونوع البحث المستخدم.

مجتمع البحث:

يتكون مجتمع الدراسة من جميع طلاب الصف العاشر الأساسي في المدارس الحكومية في محافظة جنين في الفصل الدراسي الثاني من العام (2012م- 2013م).

المشاركون في الدراسة:

تم إجراء الدراسة على عينة مكونة من أربع مجموعات من طلبة الصف العاشر بحيث كان هناك مجموعتان من الذكور ومجموعتان من الإناث، وتكونت كل مجموعة من أربعة طلاب تحصيلهم الأكاديمي في مادة الرياضيات عال (85% فما فوق).

وهذه العينة تندرج تحت "العينة الغنية" أو "عينة الحالات الغنية" والتي تشكل أحد أنواع العينات في أسلوب البحث الكيفي (النوعي)، فالحالات التي تتناولها الدراسة النوعية تكون غنية بالمعلومات، وتظهر الظاهرة فيها بوضوح ولكن ليس بشكل متطرف، مثل التلاميذ ذوي التحصيل المرتفع.

واختارت الباحثة الصف العاشر لأن الطلاب يتعرفون على طريقة التعبير عن الأعداد الزوجية والفردية باستخدام الرموز وكذلك يتعلمون درس "طرق البرهان" الذي يوضح لهم كيفية إثبات بعض التعميمات والظواهر المتعلقة بالأعداد في الفصل الدراسي الأول من الصف العاشر حسب المنهاج الفلسطيني.

وأما السبب في اختيار الباحثة مجموعتي ذكور ومجموعتي إناث فهو محاولة التنويع في اختيار أفراد العينة، حيث أن المدارس الفلسطينية يكون التعليم فيها غير مختلط، ولذلك لجأت الباحثة لاختيار مجموعات من الجنسين.

نوع البحث:

هذا البحث يعتمد على منهج البحث الكيفي (دراسة حالة)، فأسلوب دراسة الحالة يقصد منه الوصول إلى فهم عميق لحالة معينة. وفي هذه الدراسة، فإن الباحثة تلقي الضوء على تعاون طلبة الصف العاشر في حل أنشطة إثرائية عن طريق دراسة حالة أربع مجموعات، وتكون دراسة الحالة في وضعها وسياقها الطبيعيين. وهو أيضاً منهجٌ تستخدم الباحثة فيه النظرية المجذّرة في تحليل أنواع تعاون الطلاب أثناء قيامهم بحل الأنشطة الإثرائية. وتكمن أهمية استخدام المنهج الكيفي في هذه الدراسة في أن البحث سيهتم بمعرفة كيفية تعاون الطلاب في المجموعات التعاونية، ونوع الصعوبات التي يواجهونها ومن ثم كيفية التغلب على هذه الصعوبات.

إجراءات البحث:

قامت الباحثة بتمرير الأسئلة الإثرائية على المجموعات المشاركة في الدراسة بحيث مررت كل سؤال بشكل منفرد حتى يتسنى ملاحظة الطلاب من حيث تعاونهم وأنواع هذا التعاون، وسجلت الباحثة محادثات الطلاب وتعلمهم التعاوني ودونت الملاحظات بما يتعلق بهذا التعلم وخاصة أنواع التعاون والصعوبات التي تواجه المجموعة بشكل عام، أو الصعوبة التي يواجهها أحد أفراد المجموعة أثناء نشاطهم التعاوني، بالإضافة إلى طرق تغلبهم على هذه الصعوبة.

وأما البيئة التي اجتمعت فيها كل مجموعة مع الباحثة فكانت غرفة من المدرسة (المكتبة)، وتم ترتيب جلوس الطلاب على شكل مجموعة بحيث كان الطلاب مقابل بعضهم البعض.

طريقة جمع المعطيات:

استخدمت الباحثة الوسائل التالية لجمع معطيات البحث:

- الملاحظة: حيث قامت الباحثة بتصوير أعمال الطلاب أثناء عملهم في المجموعات التعاونية، لإضفاء الحيوية على الدراسة مما يسهل على القارئ استيعاب الموقف التعلمي، وكذلك تسجيل مناقشات الطلاب صوتياً أثناء تعاونهم، ومن ثم كتابة ما لاحظته أثناء مراقبتها للنشاط التعاوني حتى يتسنى تحقيق أهداف البحث المتمثلة في معرفة أنواع تعاون

الطلاب في توصلهم لحلول المشكلات الرياضية والصعوبات التي يواجهونها وكيفية تغلبهم على هذه الصعوبات.

- دور الباحثة خلال الملاحظة:

تركت الباحثة الطلاب يعملون بمفردهم، وكانت تتدخل في بعض الأحيان أثناء الملاحظة للتأكد من امتلاك الطلاب لمعلومة ما عندما لا يتضح للباحثة من نقاش الطلاب أنهم يمتلكون معلومة معينة وهذا الأمر ساعد في عملية التحليل، أو للتأكد من معرفة الطلاب لتفسير خطوة ما قاموا بها، أي لماذا قاموا بخطوة ما دون غيرها، وكذلك عندما تتوجه أحد المجموعات للباحثة "كشخص عارف" للتغلب على صعوبة ما واجهتهم مثل نقص في فهم المسألة، وتدخلت عند أحد المجموعات لتصحيح مفهوم رياضي خاطئ ولكن بعد أن أنهت المجموعة نقاشها حول المعلومة وذلك كي لا يكون تدخلها مؤثراً في النتائج.

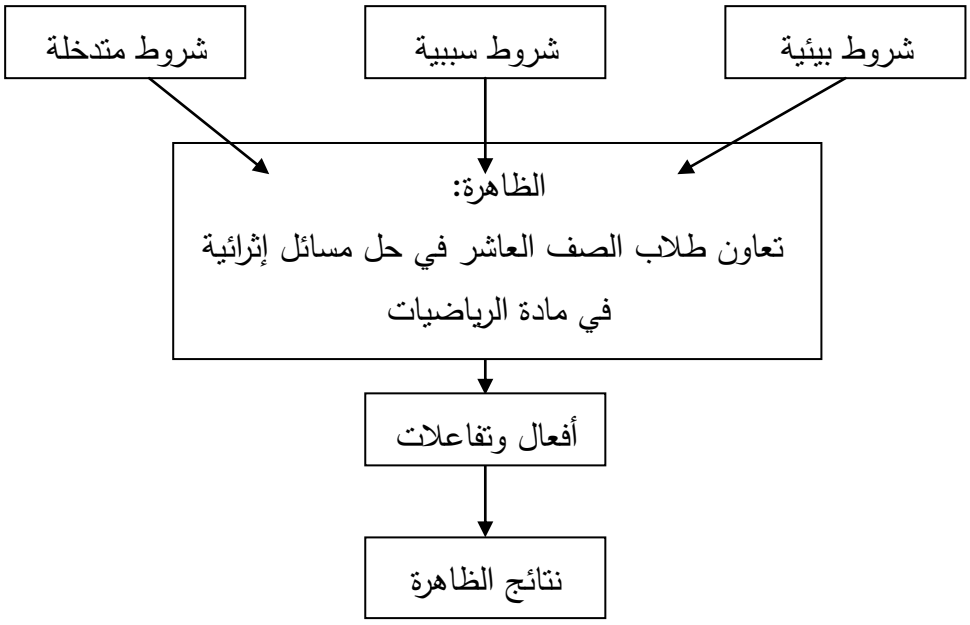
- المقابلة: قامت الباحثة بمقابلة الطلاب في كل مجموعة خلال حلهم للسؤال المقدم لهم وناقشتهم في بعض الأوقات حول السؤال لمعرفة كيفية تمييزهم للحل ووصولهم له، وكيفية تغلبهم على الصعوبات التي واجهتهم، وكذلك قامت الباحثة بمقابلة الطلاب بعد انتهاء النشاط التعاوني من أجل معرفة ملاحظاتهم حول النشاط التعاوني بحد ذاته من حيث تعاون الأفراد مع بعضهم البعض للتوصل للحل أم عدم تعاونهم.

طريقة تحليل المعطيات:

في طرق تحليل معطيات البحث، اعتمدت الباحثة على نظريتين: (1) النظرية المجذّرة "Grounded Theory" (Strauss & Corbin, 1998)، و (2) تحليل التعاون حسب كلارك وهيلم (Clarke & Helme, 1997) من ناحية، ومن ناحية أخرى حسب جوز (Goos, 1998).

النظرية الأولى: النظرية المجذرة

النظرية المجذرة ومركباتها ممثلة في الشكل1.



شكل1: مركبات النظرية المجذرة

استخدمت الباحثة هذه النظرية لوصف سلوك الطلاب أثناء النشاط التعاوني، وتصنيف هذه السلوكيات، ومحاولة إيجاد علاقات فيما بينها. وتحتوي هذه النظرية على ثلاث مراحل:

1. الترميز المفتوح (Open coding): في هذه المرحلة قامت فيها الباحثة بمراقبة حديث الطلاب ومناقشاتهم أثناء وبعد النشاط التعاوني وذلك بهدف البحث عن كلمات وجمل تظهر وتتكرر في أقوالهم بشكل مستمر وتدل على حدوث التعلم التعاوني، أو تدل على أنهم بحاجة لطلب المساعدة من أحد الزملاء أو من المعلم.
2. الترميز المحوري (Axial coding): بعد تصنيف السلوكيات في ثيم، وضعت الباحثة المتشابه منها معاً، حيث قامت الباحثة بتقسيم الكلمات والجمل التي جمعتها في مجموعات واختبرت أوجه التشابه والاختلاف فيما بينها، ثم وضعت الكلمات والجمل التي تشير إلى سلوكيات متشابهة (الثيم) معاً (في فئة واحدة). كذلك قامت الباحثة باختبار العلاقات بين هذه الفئات حسب السياق الذي تظهر فيه، وظروف ظهورها.

3. الترميز المختار (Selective coding): بعد ترتيب التصنيفات والتصنيفات الفرعية المنبثقة منها (التصنيفات الفرعية) والعلاقات فيما بينها، حاولت الباحثة معرفة أي من هذه التصنيفات (الثيم) تؤدي للأخرى في محاولة لبناء تصور حول الظاهرة قيد الدراسة (تعاون طلاب الصف العاشر في حل مسائل إثرائية في مادة الرياضيات).

ما سبق أدّى إلى بناء تصور حول الظاهرة، ضمن هذا التصور وُصفت الفئات والفئات الفرعية من عدة جوانب:

1. الظاهرة وهي الحدث الرئيس أو الفكرة الرئيسة.
2. الظروف السببية وهي مجموعة الخصائص والثيم التي أدت إلى ظهور غيرها من الخصائص والظروف.
3. الظروف السياقية وهي مجموعة الخصائص التي تعود للظاهرة وتكوينها.
4. ظروف متدخلة مرتبطة بالظاهرة والتي تسهل أو تعيق ظهور الأفعال والتفاعلات المرتبطة بالظاهرة.
5. أفعال وتفاعلات تدل على حدوث الظاهرة، وهي أيضا توجه الظاهرة.
6. نتائج الأفعال والتفاعلات.

النظرية الثانية: نظرية التعاون

هناك نموذجان في نظرية التعاون اعتمدت عليهما الباحثة: نموذج كلارك وهيلم (Clarke & Helme, 1997) ونموذج جوز (Goos، 1998).

1- نموذج كلارك وهيلم (1997):

اعتمدت الباحثة ثانياً على مركبات تحليل التعاون حسب كلارك وهيلم (Clarke & Helme, 1997). هذه المركبات هي: التفاوض (Negotiation)، المعنى (Meaning)، بين الذاتية (Inter-subjectivity)، مواقف عدم التيقن (Uncertainty situations)، القرار (Resolution). سوف نعرض صفات كل من هذه المركبات أدناه:

التفاوض (Negotiation):

التفاوض معرف على أنه العملية الدائرية التي في محورها التحليل، التفكير الانعكاسي والتمثيل، حيث الهدف من كل هذه الأفعال هو الاتفاق بين المتفاوضين. هذا يعني أننا في بحثنا عن عملية التفاوض في العمل الطلابي التعاوني نحن نبحث عن وجود الأفعال السابقة.

المعنى (Meaning):

المعنى يفترض وجود مجتمع معين، هدف وموقف معين. لذلك في بحثنا عن المعاني التي تظهر نتيجة العمل التعاوني للمجموعة التي تتعلم الرياضيات فإننا نبحث بالأساس عن تأثير المجتمع والهدف والموقف على عملية تعلم وتعاون الطلاب ليصلوا إلى اتفاق حول مفهوم رياضي معين. وهذا يعني أننا لا ننظر إلى الكلمة المفردة في كلام الطلاب وإنما إلى الجملة وإلى العلاقة بين الجمل للطلاب المختلفين.

بين الذاتية (Inter-subjectivity):

دور بين الذاتية في التفاوض يظهر في اعتماد التفاوض على اللغة أو على الأقل على عملية التواصل بين أفراد المجموعة، وهذا يشجع على تحليل هذا الدور خلال تعلم الرياضيات التعاوني من قبل مجموعات طلاب صغيرة. يمكننا القيام بهذا التحليل عبر البحث لغوياً عن جمل الطلاب التي تبين اعتمادهم على متفقات لغوية بينهم.

مواقف عدم التيقن (Uncertainty situations):

سنبحث عن الفئات التالية الخاصة بمواقف عدم التيقن، ولكن هذه الفئات ليست شاملة ويمكن أن نجد غيرها:

- عدم تيقن بخصوص حقيقة أو صحة مصطلح، مثلا: لماذا نستخدم الحرف V للسرعة؟ ما دخل السرعة (Speed) بهذا الحرف؟
- عدم تيقن بخصوص الشكل الصحيح لفعل أو لسيرورة، مثلا: كيف يمكن القيام بحل هذه المعادلة؟
- عدم تيقن بالنسبة لمعنى مصطلح أو فعالية، مثلا: كيف يمكن للرسم البياني أن يكون تحت الصفر؟ كيف يمكن للسرعة أن تكون سالبة؟
- عدم تيقن بالنسبة لشكل التمثيل الملائم، مثلا: كيف يمكن تمثيل السرعة بيانياً؟

- عدم تيقن بالنسبة لفعل رياضي،

مثلا: أخبرني إن كان حلي للمعادلة صحيحاً.

القرار (Resolution):

سنبحث عن الفئات التالية الخاصة بمواقف القرار، ولكن هذه الفئات ليست شاملة ويمكن أن نجد غيرها:

- القرار بالاعتماد على الأدلة التجريبية.
- القرار بالاعتماد على شخص عارف (المعلم أو طالب آخر).
- القرار بالاعتماد على نص.
- القرار بالاعتماد على تجربة سابقة.

2- نموذج جوز (1998):

اعتمدت الباحثة أيضاً على مركبات تحليل التعاون حسب جوز (Goos ،1998) في تسجيل ملاحظاتها وجمع المعطيات وكذلك في تحليلها، حيث استغلت ظاهرة "الأعلام الحمراء" الموصوفة في النظرية أعلاه لكي تميز نوع الصعوبة التي يواجهها الطلاب، حين يعملون بشكل مشترك، وكذلك لكي تميز طرق تغلب الطلاب على الصعوبة في المجموعة التعاونية. ظاهرة الأعلام الحمراء تحدث حين يكتشف أحد طلاب المجموعة التعاونية أنهم لا يتقدمون في عملية التعلم، لاحظوا خطأً حسابياً، أدركوا أن ما توصلوا إليه يخلّ بشروط المشكلة، أو أنه لا يحمل معنى مقبولاً. نحن نتعرف على هذه المواقف التي تتميز بظاهرة الأعلام الحمراء من خلال إشارات وتحذيرات يصدرها الطلاب تحمل العديد من المعاني والتي وصفناها سابقا، إضافة إلى مواقف أخرى، مثل الحاجة للتوقف عن الحل إذا شعر الطالب أنه فقد التركيز في الحل أو شعر أنه تائه، أو عندما يدرك الطالب أنه لم يفهم توضيح المعلم للموضوع أو المسألة، وقد يرفع الطالب العلم عندما يدرك أن استخدامه

لطريقة ما لن توصله للحل الصحيح. تقول جوز (أعلاه) أن "الأعلام الحمراء" تفيد أيضا في التعرف على محفزات ما وراء الإدراك للطلاب أثناء قيامهم بنشاط تعاوني.

تصف جوز (أعلاه) بعض الاستجابات المناسبة لكل نوع من أنواع الأعلام الحمراء.

الأعلام والاستجابات الملائمة لها مبينة في جدول1.

جدول1: أعلام حمراء واستجابات ممكنة لها حسب جوز (1998)

العلم الأحمر "Red Flag"	**الاستجابة المناسبة**
نقص في التقدم والتطور في الفهم أو الحل	مراجعة مدى مناسبة الطريقة المستخدمة في الحل واتخاذ قرار إما بالبقاء على الطريقة المستخدمة أو بالتخلي عنها.
تحديد خطأ ما	فحص وتصحيح الحسابات
نتائج غير صحيحة أو غير معقولة	فحص الحسابات، التحقق من استراتيجية الحل

قامت الباحثة بمراقبة سلوك الطلاب أثناء نشاطهم التعاوني لتمييز وتحليل مثل هذه المواقف والمشكلات التي تحدث لدى الطلاب، كما قامت بتسجيل تعلم الطلاب وتحليل هذا التعلم حسب النظريتين الموصوفتين أعلاه. بشكل أكثر تحديداً، نظرت الباحثة في الأدوار التحادثية للطلاب التي سجلتها صوتياً ومن ثم قامت بتمييز النشاط ما وراء المعرفي الذي يندمج به الطالب.

وأما أنواع الأفعال الإدراكية، ما وراء الإدراكية والأدائية التي حاولت الباحثة تمييزها لدى الطلاب من خلال الملاحظة والتسجيلات والمقابلات هي:

اقتراح فكرة جديدة للحل ويتضمن: تمييز معلومة تفيد في حل المسألة، أو ذكر طريقة بديلة للوصول للحل.

1) قيام الطلاب بالتحقق من سمة معينة للحل مثل: فهم أحد الطلاب للمشكلة التي يواجهونها، أو توصله لإمكانية استخدام استراتيجية ما أو عدم الإمكانية لعدم فائدتها، أو الوصول لنتائج دقيقة للمسألة، أو إصداره حكماً بعدم دقة نتائج الحل.
2) قدرة الطلاب على تمييز استخدام الأعلام الحمراء "Red Flags".
3) غياب القدرة على التحقق من النتائج التي تظهر عند الطلاب أثناء حل المسألة.

4) توصل الطلاب لحلول تناقض التوقعات التي وضعوها قبل الحل.

5) حالات نقص الخبرة في الحسابات البسيطة والمركبة (مهارات الطلاب الحسابية في الحل الذي يحوي عملية حسابية واحدة أو أكثر من عملية حسابية في آن واحد مثل مشكلة الطلاب في تمييز الأولوية في العمليات الحسابية).

التحليل السابق سيأخذ بعين الاعتبار مراحل حل المشكلة: القراءة، الفهم، التحليل، الاستكشاف، التخطيط، التطبيق، التحقق، الانتقال من خطوة لأخرى (من مرحلة لأخرى) أثناء الحل.

الباحثة واعية أن أدوات البحث ليست جديدة ولكنها واعية أيضا أن بها فئات وثيماً لم تبحث بدرجة كافية في تعلم الرياضيات ولذلك تريد استغلالها من أجل تحليل تعاون الطلاب في حل مسائل رياضية بشكل كيفي، وهو جانب تقريباً لم ينتبه له الباحثون العرب في التربية الرياضية. الباحثة تطمح أن تجدد الاهتمام بالتحليل الكيفي لتعلم الطلاب للرياضيات وبذلك تسهم في فهم قضية مهمة ولكن غير واضحة بشكل كبير، وأحد جوانب هذه القضية هو الجانب التعاوني.

أدوات البحث التطبيقية (المسائل الإثرائية):

أدوات البحث عبارة عن مجموعة من المسائل الإثرائية تدور حول موضوع الأعداد والتعامل معها لتنمية تفكير الطلاب وتطوير تعاملهم مع الأعداد وإدراك العلاقات بينها، وهذه المسائل الإثرائية عددها أربعة، اختارتها الباحثة من الموقع الإلكتروني المختص في الإثراء الرياضي والتابع لجامعة كامبردج (http://nrich.maths.org/frontpage).

اختبار صدق أدوات البحث التطبيقية:

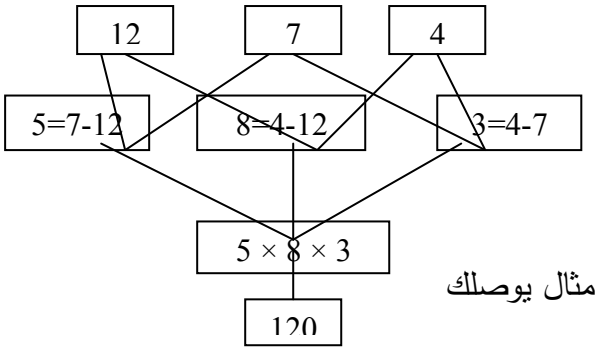
اختارت الباحثة المسائل الإثرائية من الموقع الإلكتروني المختص في الإثراء الرياضي والتابع لجامعة كامبردج (http://nrich.maths.org/frontpage) بما يتناسب مع أهداف البحث، ثم عرضتها على المشرف للتأكد من صحة صياغتها وترجمتها، وكذلك عرضت الباحثة المسائل على مجموعة من معلمي ومعلمات مبحث الرياضيات للصف العاشر للتأكد من امتلاك الطلاب للخبرات السابقة اللازمة لحل المسائل. وقد أعطى المعلمون والمعلمات ملاحظات تخص صياغة الأسئلة تم العمل بها من قبل الباحثة.

المسائل الإثرائية المقدمة للطلاب:

السؤال الأول:

خذ أي ثلاثة أعداد مختلفة، ثم احسب الفروق بين كل عددين من هذه الأعداد، أي أنه سيصبح لديك ثلاثة نواتج من الفروقات، الآن اضرب هذه الفروقات الثلاثة مع بعضها ولاحظ الناتج. مثل: 4، 7، 12. الفرق بين 4 و 7 هو (3)، الفرق بين 7 و 12هو (5)، الفرق بين 4 و 12 هو (8). ناتج ضرب هذه الفروقات هو 3 × 5 × 8 = 120

خذ ثلاثة أعداد جديدة وأجرِ نفس العملية ولاحظ الناتج، كرر الخطوات لأعداد جديدة ولاحظ الناتج في كل مرة...

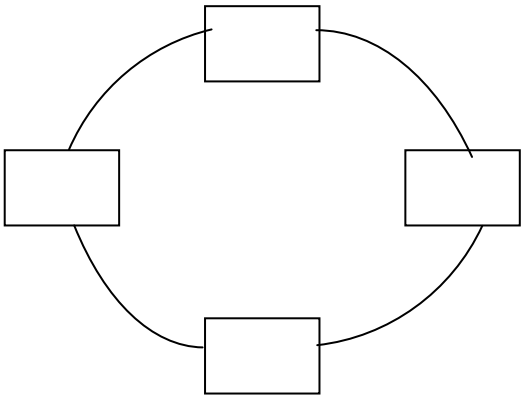


- ماذا تلاحظ؟
- هل تعتقد أن هذا صحيح دائماً؟
- إذا كانت إجابتك نعم، كيف تفسر هذا؟
- وإذا كانت إجابتك لا، فهل تستطيع إعطاء مثال يوصلك لنتائج معاكسة؟

حاصل ضرب عددين زوجي وفردي هو عدد.....

حاصل ضرب عددين فرديين هو عدد.....

السؤال الثاني:



اختر أربعة أعداد من 1 إلى 9 وضعها في المربعات في الشكل، بحيث يكون الفرق بين أي عددين متصلين مع بعضهما فرقاً فردياً.عليك أن تستعمل أربعة أعداد مختلفة.

- ماذا تقول عن مجموع أي عددين متصلين؟
- إلى ماذا توصلت من هذه الملاحظات؟

– كيف يمكنك تفسير النتائج التي توصلت إليها؟

كيف تفيدك هذه الحقائق في تفسير نتائجك؟

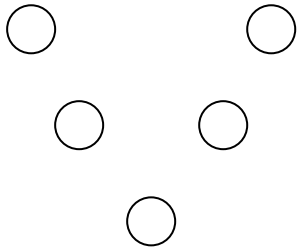
– إذا وضعت في المربع الأول عدداً فردياً، فإن العدد في المربع المرتبط به سيكون.....

وإذا وضعت في المربع الأول عدداً زوجياً فإن العدد في المربع المرتبط به سيكون.....

لذلك فإن مجموع أي عددين متصلين في الشكل هو.....

– كيف تثبت ذلك رياضياً؟

السؤال الثالث:



في الشكل المرسوم جانباً، وزع الأعداد من 1 إلى 5 على الدوائر بحيث يكون الذراعان في الشكل V لهما نفس المجموع.

– كيف نجد طريقة أخرى لتوزيع هذه الأعداد؟

– كم عدد الحلول الممكنة لذلك (بكم طريقة مختلفة يمكنك توزيع هذه الأعداد تحت هذه الشروط)؟

– ماذا تلاحظ في جميع الحلول التي أوجدتها؟

– كيف تشرح وتفسر ما تراه؟

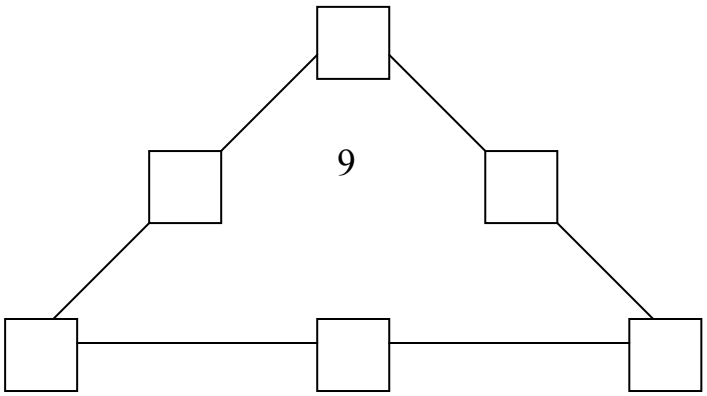
– كيف تقنعنا أنك قد وجدت جميع الحلول الممكنة؟

– ماذا يحدث إذا استخدمت الأعداد من 2 إلى 6؟

– ماذا الذي يمكنك اكتشافه في شكل V الذي طول كل من ذراعيه هو 4 بدلاً من 3 واستخدمت الأعداد من 1 إلى 7؟

السؤال الرابع:

- رتب الأعداد من 1 إلى 6 بحيث يكون مجموع كل ضلع من الأضلاع الثلاثة مساوياً للعدد(9) المكتوب في وسط الشكل.



- كيف يمكنك فعل ذلك؟
- ما هي ملاحظاتك؟
- كيف ترتب هذه الأعداد إذا كان العدد المكتوب في وسط الشكل هو10.
- ما هي ملاحظاتك؟

الفصل الرابع

النتائج

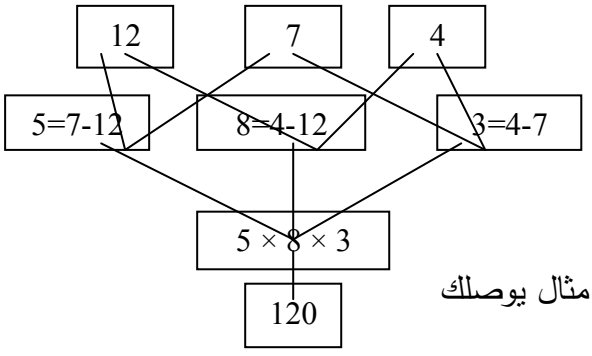
سوف نعرض أحداث تعلم الطلاب حسب تسلسلها أي حسب المراحل التي مرت بها مجموعات الطلاب خلال بنائهم للمعرفة ذات العلاقة بمحتوى الأسئلة التي كانوا يعالجونها. سوف نستخدم في العرض ثيم نموذجي التعاون التي استخدمت في التحليل وهي: التفاوض (Negotiation)، المعنى (Meaning)، بين الذاتية (Inter-subjectivity)، مواقف عدم التيقن (Uncertaintysituations)، القرار (Resolution)، الأعلام الحمراء.

أولاً: أحداث تعلم المجموعات خلال حلهم السؤال الأول

نص السؤال الأول:

خذ أي ثلاثة أعداد مختلفة، ثم احسب الفروق بين كل عددين من هذه الأعداد، أي أنه سيصبح لديك ثلاثة نواتج من الفروقات، الآن اضرب هذه الفروقات الثلاثة مع بعضها ولاحظ الناتج. مثل: 4، 7، 12. الفرق بين 4 و 7 هو (3)، الفرق بين 7 و 12هو (5)، الفرق بين 4 و 12 هو (8). ناتج ضرب هذه الفروقات هو 3 × 5 × 8 = 120

خذ ثلاثة أعداد جديدة وأجرِ نفس العملية ولاحظ الناتج، كرر الخطوات لأعداد جديدة ولاحظ الناتج في كل مرة...



- ماذا تلاحظ؟
- هل تعتقد أن هذا صحيح دائماً؟
- إذا كانت إجابتك نعم، كيف تفسر هذا؟
- وإذا كانت إجابتك لا، فهل تستطيع إعطاء مثال يوصلك لنتائج معاكسة؟

1- أحداث تعلم مجموعة (أ) من الذكور (زيد، محمد، بدر، شريف):

حدثت مراحل تعلم الطلاب بالتسلسل الآتي:

1. التوصل إلى قرار بكيفية بدء التعلم
2. التفاوض من أجل معرفة العلاقة بين حواصل ضرب الفروقات للأعداد المختارة

2. 1 التفاوض للوصول إلى معنى أول

2. 2 التفاوض للوصول إلى معنى ثاني

2. 2. 1 التصنيف كمرحلة من مراحل التفاوض

2. 3 تفسير الحديث بين الذاتي

3. التفاوض من أجل تفسير أحد الأمثلة التي جربها الطلاب

3. 1 التفاوض للوصول إلى قرار بالاعتماد على أدلة تجريبية

3. 2 تفاوض للوصول إلى معنى

3. 3 تفسير الحديث بين الذاتي

4. التفاوض من أجل تفسير الظاهرة

4. 1 تفاوض للوصول إلى قرار بالاعتماد على شخص عارف

4. 2 تفسير الحديث بين الذاتي

5. موقف عدم تيقن

وفيما يأتي نفصّل هذه المراحل:

1. التوصل إلى قرار بكيفية بدء التعلم:

في البداية قرأ زيد نص السؤال بصوت مرتفع وكان الجميع يتابع معه. بعدها قال زيد: "أنت جرب... وأنت جرب... كل واحد يجرب أعداد". ثم انشغل كل من الطلاب بتجريب أعداد... وكل منهم حسب الجواب النهائي.

نرى أن عمل الطلاب الرياضي بدأ بمبادرة من أحد الطلاب بهدف "الوصول إلى قرار" يتعلق بعملهم كي يأخذوا فكرة أولية عن ناتج الضرب للفروقات بين الأعداد الثلاثة التي يختارونها، القرار هنا أخذ بواسطة "الاعتماد على شخص عارف".

2. التفاوض من أجل معرفة العلاقة بين حواصل ضرب الفروقات للأعداد المختارة

2. 1 تفاوض للوصول إلى معنى:

في المرحلة الثانية بدأ الطلاب في عملية تفاوض للوصول إلى معاني رياضية تتعلق بالعلاقات بين حواصل ضرب الفروقات لأي ثلاثة أعداد مختارة، حيث فعلوا ذلك عن طريق تجريب مجموعات مختلفة من الأعداد وحساب الجواب النهائي في كل مرة.

بدأ التفاوض هنا بقيادة الطالب محمد، حيث قال: "خلونا نجرب الأعداد 2، 5، 9 ونجد الفروق بينهم..." فاستجاب له زملاؤه وناقشوا المثال الذي قدمه.

استمر التفاوض للوصول إلى علاقة بين حواصل ضرب الفروقات بين ثلاثة أعداد مختارة، وكان ذلك بقيادة الطالب زيد حيث أنهم لم يتوصلوا لملاحظة من خلال الأمثلة التي ناقشوها، فقال لهم: " بدنا نجرب أعداد أخرى..."، ونلاحظ أن زملاءه استجابوا لذلك حيث رد بدر عليه قائلاً: "خلونا نجرب 2، 4، 6..." وقاموا بمناقشة هذا المثال معاً.

وما ميز هذه المرحلة هو التجريب المستمر، حيث جرّب الطلاب العديد من الأمثلة على مراحل، أي أنهم – وبعد أن جرب كل منهم مجموعة من الأعداد– لم يكتفوا بها وأرادوا الاستزادة عن طريق تجريب مزيد من الأعداد، ومن ثم البحث عن علاقة بين جميع الإجابات، ولاحظت الباحثة عدم تسرعهم في إصدار حكم على الإجابات.

2. 2 التفاوض للوصول إلى معنى:

خلال هذا التفاوض، تمكن الطلاب من إيجاد علاقة بين جميع الأمثلة التي عملوا عليها، وفيما يأتي توضيح لذلك:

2. 2. 1 التصنيف كمرحلة من مراحل التفاوض:

خلال مرحلة التفاوض للوصول إلى معنى، تضمن التفاوض اتفاقاً لتصنيف الأمثلة التي تعاملوا معها حسب حالات، فيما يأتي تفصيل ذلك:

خلال بحث الطلاب عن علاقة بين جميع الإجابات التي توصلوا لها، صنفوا الأمثلة التي تعاملوا معها إلى ثلاث حالات هي: ثلاثة أعداد زوجية، ثلاثة أعداد فردية، ثلاثة أعداد بحيث تحوي أعداداً زوجية وفردية معاً، كما يتبين من النقاش الآتي:

– بدر طرح المثال: 2، 4، 6... وقاموا بتجربة هذه الأعداد معاً وكان الناتج 16 في هذه اللحظة ظهرت أول ملاحظة للطلاب حيث قال زيد: "ملاحظين انه الناتج دايماً زوجي؟!"

– شريف: صحيح لأني جربت ثلاث أعداد فردية 3، 5، 9 والجواب 48 يعني زوجي.

– محمد: ومرة أخذنا أعداد زوجية ومرة أعداد فردية والناتج بالحالتين زوجي.

– بدر: وبالأول أخذنا أعداد فردية وزوجية مع بعض وطلع الناتج زوجي!

ثم قاموا بتعميم العلاقات في الظاهرة حيث قال محمد: "إذاً دايماً الجواب بطلع زوجي".

2. 3 تفسير الحديث بين الذاتي:

خلال تصنيف الطلاب للأمثلة التي تعاملوا معها، ظهر حديث بين ذاتي حيث قال بدر"وبالأول أخذنا أعداد فردية وزوجية مع بعض وطلع الناتج زوجي!" فعندما قال (أخذنا أعداد فردية وزوجية مع بعض) المقصود منها أنهم أخذوا مثالاً فيه بعض الأعداد فردية وبعضها زوجي.

3. التفاوض من أجل تفسير أحد الأمثلة التي جربها الطلاب

3. 1 التفاوض للوصول إلى قرار بالاعتماد على أدلة تجريبية:

في المرحلة التالية حاول الطلاب تفسير الظاهرة التي قاموا بتعميمها، لكن لاحظت الباحثة أن الطلاب لا يمتلكون تفسيراً أولياً لهذا التعميم، لأن قرار الطلاب كان "بالاعتماد على الأمثلة التجريبية" التي قاموا باختيارها فقط دون تقديم توضيح لذلك، النقاش التالي يوضح هذا:

– الباحثة: كيف يحدث ذلك؟ في جميع الأمثلة التي جربتوها كان الناتج زوجياً! ما هو التفسير؟

– زيد، بدر: جربنا حالات مختلفة والناتج فيهم كلهم طلع زوجي...

نرى هنا أن الطلاب واجهوا صعوبة من نوع "نقص في الفهم والتطور" حسب جوز (1998)، والاستجابة لهذه الصعوبة كانت الاستعانة بالباحثة للمساعدة في الوصول لتفسير للظاهرة.

3. 2 تفاوض للوصول إلى معنى:

عندما رأت الباحثة أن الطلاب لديهم صعوبة في إيجاد تفسير الظاهرة تدخلت في محاولة منها لسبر غور تفكيرهم، فدار النقاش التالي:

– الباحثة: عندما نأخذ ثلاثة أعداد فردية...ماذا يكون الفرق بين أول عددين؟

– الجميع: زوجي...

– الباحثة: *وماذا يكون الفرق بين ثاني عددين؟*

– الجميع: زوجي...

– الباحثة: وماذا يكون الفرق بين أول عدد وثالث عدد؟

– زيد، محمد: الأول والثالث فرديين عشان هيك بطلع الفرق زوجي

– الباحثة: إذاً ماذا يكون الناتج عندما نضرب هذه الفروق الثلاثة؟

– زيد: زوجي× زوجي ×زوجي...

– بدر: زوجي× زوجي...= زوجي

– محمد: ولما نضربهم بزوجي ينتج زوجي

– زيد: عشان هيك لما نأخذ ثلاثة فرديات بطلع زوجي

3. 3 تفسير الحديث بين الذاتي:

خلال التفاوض للوصول إلى تفسير للظاهرة، كان جزء من حديث الطلاب بين ذاتي، فعندما قال زيد "لما نأخذ ثلاثة فرديات بطلع زوجي" يقصد بها أنهم عندما تكون الأعداد المختارة جميعها فردية، ويقومون بحساب الفروقات بينها ثم ضربها فالناتج سيكون زوجياً.

4. التفاوض من أجل تفسير الظاهرة

4. 1 تفاوض للوصول إلى قرار بالاعتماد على شخص عارف:

في هذه المرحلة تركت الباحثة للطلاب تفسير الحالات الأخرى التي قاموا بتصنيفها، وقاموا بالتفاوض وكانت بداية توصلهم للحل بالاعتماد على ما قدمه بدر "شخص عارف" كما يبين النقاش التالي:

– بدر: اسمعوا... اسمعوا.. (الجميع التفت لما سيقوله)

عندنا ثلاثة أعداد...ولما يكونوا الثلاثة فرديات... الفروقات الثلاث بتكون زوجية... عندنا عدة حالات

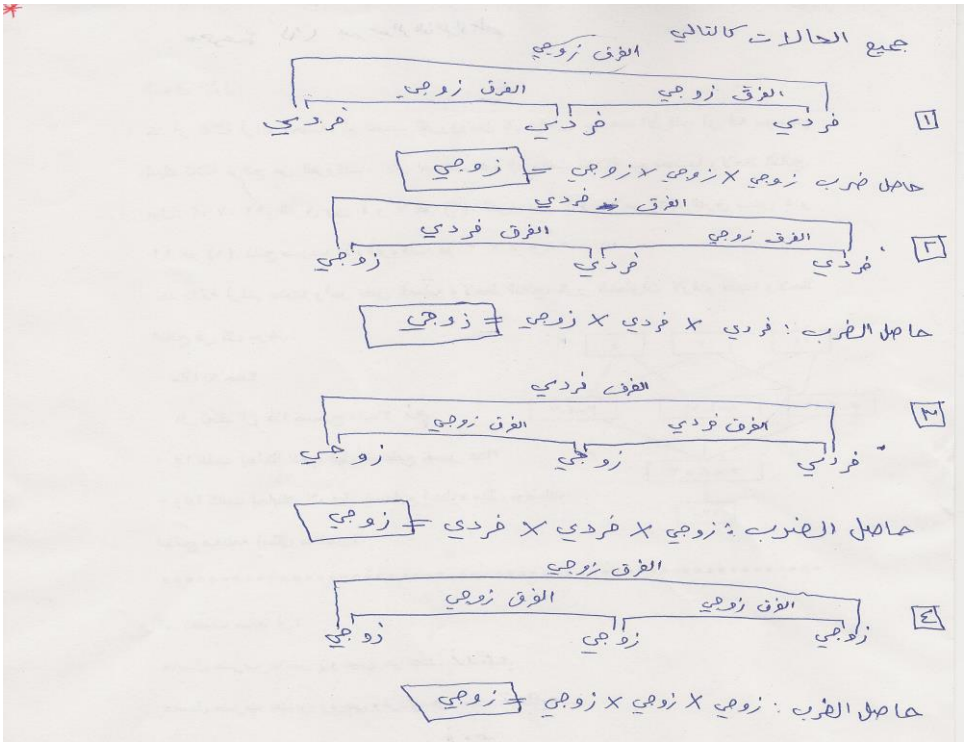
– الجميع: نعم!

– محمد، زيد: بدنا نفسر كل وحدة

– بدر: آه، وفسرنا أول حالة لما بكونوا الثلاثة فرديات...

– زيد: بدنا نكمل

نلاحظ أن زملاء بدر اعتمدوا على ما قاله كنقطة انطلاق للحل، وأيّدوه، وقاموا بتلخيص الحالات المتبقية بالإضافة إلى الحالة التي قدمها بدر وهذه الحالات هي: ثلاثة أعداد فردية، ثلاثة أعداد زوجية، عددان فرديان وعدد زوجي، عددان زوجيان وعدد فردي، وقاموا بتفسيرها.



4. 2 تفسير الحديث بين الذاتي:

خلال المرحلة السابقة ظهر حديث بين ذاتي عند بعض الطلاب فعندما قال محمد وزيد "بدنا نفسر كل وحدة" يقصدان أنهم يريدون تفسير كل حالة من الحالات.

وكذلك أثناء تعاون الطلاب في تفسيرهم للحالات الأربع السابقة، دار بينهم "حديث بين ذاتي"، مثلاً:

"فردي، وفردي..." يقصدون بها الفرق بين عدد فردي وعدد فردي آخر، وكذلك "فردي وزوجي... فردي" يقصدون بها الفرق بين عدد فردي وعدد زوجي هو عدد فردي.

5. موقف عدم تيقن:

بعد أن قاموا بتفسير الحالات الأربع التي لخصوها، كان الطلاب "غير متيقنين" من أن الحل قد انتهى، حيث توجه زيد بسؤال للباحثة فيما إذا كانوا قد أنهوا الحل أم لا كما يتبين من النقاش الآتي:

- زيد يسأل الباحثة: هيك بنكون خلصنا كل الحالات؟ (وجميع أفراد المجموعة ينتظرون رد الباحثة)
- *الباحثة: هل فسرتم جميع الحالات التي توصلتم لها؟*
- الجميع: آه
- *الباحثة: إذن أنهيتم حل السؤال (وبدت علامات الراحة في وجوههم)*

2- أحداث تعلم مجموعة (ب) من الذكور (حكمت، مجدي، مهدي، وليد):

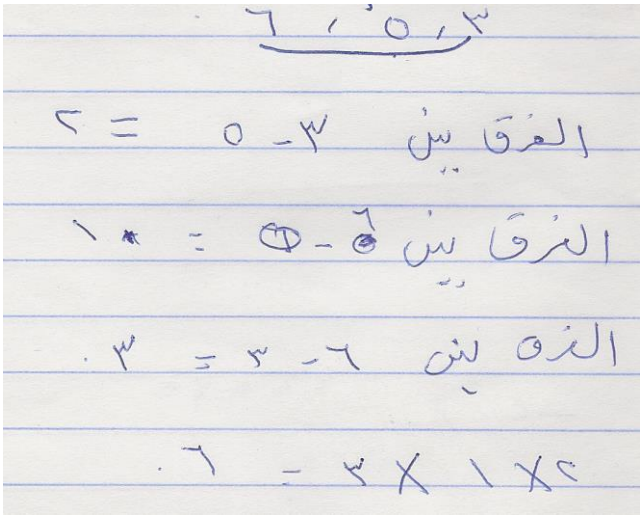
حدثت مراحل تعلم الطلاب بالتسلسل الآتي:

1. التوصل إلى قرار بكيفية بدء التعلم
2. التفاوض للوصول إلى معاني رياضية تتعلق بالعلاقات بين حواصل ضرب الفروقات
   2. 1 التفاوض للتوصل إلى معنى
   2. 2 التصنيف إلى حالات كمرحلة من مراحل التفاوض للتوصل إلى معنى
3. التفاوض للتوصل إلى قرار
4. التوصل إلى تفسير للظاهرة
   4. 1 التفاوض للتوصل إلى تفسير للظاهرة بالاعتماد على شخص عارف
   4. 2 التوصل إلى اتفاق بالاعتماد على تجربة سابقة
   4. 3 تفسير الحديث بين الذاتي

وفيما يأتي نفصّل هذه المراحل:

1. التوصل إلى قرار بكيفية بدء التعلم:

قام مجدي بقراءة نص السؤال ثم قال حكمت: "تعالوا نوخذ 3، 5، 6" فبدؤوا بتجربة هذه الأعداد، نرى أن عمل الطلاب الرياضي بدأ بمبادرة من أحد الطلاب بهدف "الوصول إلى قرار" يتعلق بعملهم كي يأخذوا فكرة أولية عن ناتج الضرب للفروقات بين الأعداد الثلاثة التي يختارونها، القرار هنا أخذ بواسطة "الاعتماد على شخص عارف". واستجاب له زملاؤه وقاموا بتطبيق السؤال على هذه الأعداد كما توضح الصورة أدناه، ونلاحظ في الصورة أن الطلاب لم يكتبوا الحل بشكل دقيق، فكان عليهم كتابة (الفرق بين 3و 5 هو 2) أو أن يكتبوا (5 – 3= 2).



إلا أنهم لم يكتفوا بهذا المثال، فقال حكمت: "خلونا نوخذ كمان ثلاث أعداد ونشوف شو بيطلع!".

2. التفاوض للوصول إلى معاني رياضية تتعلق بالعلاقات بين حواصل ضرب الفروقات

2. 1 التفاوض للتوصل إلى معنى:

في المرحلة الثانية بدأ الطلاب بعملية التفاوض للوصول إلى معاني رياضية تتعلق بالعلاقات بين حواصل ضرب الفروقات لأي ثلاثة أعداد مختارة، حيث فعلوا ذلك عن طريق تجريب مجموعات مختلفة من الأعداد وحساب الجواب النهائي في كل مرة.

بادر مهدي بطرح مثال فقال: "2، 4، 7 لأننا أخذنا بالأول عددين فرديين.. خلونا نوخذ هون عددين زوجيين"، وتوصلوا إلى ناتج30 ، وبعد أن حلوا المثال السابق، قال مجدي: "كل واحد منا يجرب أعداد جديدة.." واستجابوا له وأخذ كل منهم يجرب أعداداً.

النقاش الآتي يبين أن هذه المرحلة تميزت بتجريب أمثلة كثيرة ومتنوعة، حيث نلاحظ أنهم أخذوا في البداية مثالاً فيه عددين فرديين مع عدد زوجي، ومثالاً فيه عددين زوجيين مع عدد فردي، وهنا

أخذوا مثالاً جميع أعداده زوجية، ومثالاً جميع أعداده فردية، وكذلك أخذوا أمثلة لأعداد صغيرة وأمثلة فيها أعداد كبيرة:

- حكمت: رح أوخذ 2، 4، 6 وأنت (لوليد) جرب ثلاث أعداد فردية فجرب وليد 3، 5، 7 وتوصل للناتج (16)، مهدي بدأ يجرب 5, 7، 11 وتوصل للناتج (48)
- مجدي: رح أختار أعداد كبيرة.. 6، 10، 18 وتوصل للناتج (348)

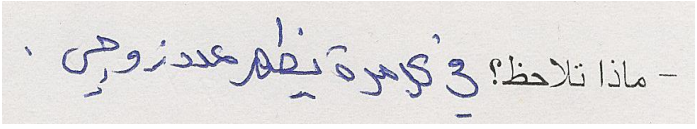
2. 2 التصنيف إلى حالات كمرحلة من مراحل التفاوض للتوصل إلى معنى:

نلاحظ من التفاوض أعلاه أن الطلاب صنفوا الأمثلة التي تعاملوا معها إلى أربع حالات هي: عددين فرديين مع عدد زوجي، عددين زوجيين مع عدد فردي، جميع الأعداد زوجية، جميع الأعداد فردية.

3. التفاوض للتوصل إلى قرار:

بعد أن جرب الطلاب أمثلة متنوعة، ظهرت أول ملاحظة عند الطالب حكمت ووافقه زملاؤه، كما يتبين من النقاش الآتي:

- مجدي: شو بنلاحظ؟
- حكمت: لاحظوا انه كلهم زوجي!
- مهدي: صح! كلهم جوابهم زوجي
- الجميع: خلصنا! دايماً زوجي
- مجدي: تعالوا نكتب.. في كل مرة يظهر عدد زوجي

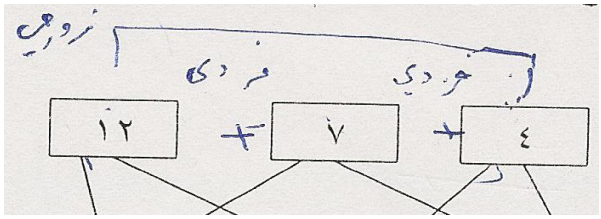


نلاحظ من هذا النقاش أن المجموعة توصلت إلى "قرار" بأن الناتج يكون عدداً زوجياً دائماً.

4. التوصل إلى تفسير للظاهرة

4. 1 التفاوض للتوصل إلى تفسير للظاهرة بالاعتماد على شخص عارف:

انتقل الطلاب لهذه المرحلة بمبادرة الطالب حكمت، حين قال: "الآن بدنا نفسر!"، لكن كان هناك صعوبة لدى الطلاب من نوع نقص في الفهم والتقدم حسب جوز (1998) حيث كان لديهم صعوبة في تفسير سبب ظهور ناتج زوجي في كل مرة، وبعد فترة قال مهدي (مشيراً للمثال 3، 5، 7): "عندما تكون الأعداد فردية، تكون الفروق زوجية" لكنهم لم يستطيعوا الاستفادة من هذه المعلومة التي قدمها مهدي لتفسير الحالات الأربعة للأمثلة التي جربوها. و كانت الاستجابة للصعوبة التي واجهتهم هي الانتقال إلى مثال آخر من الأمثلة التي جربوها لمحاولة البحث عن التفسير، وقاموا بحساب الفروقات بينها فيما إذا كانت زوجية أو فردية، كما تُظهر الصورة أدناه.



بعد ذلك ظهرت أول ملاحظة عن طريق حكمت، كما يبين النقاش الآتي:

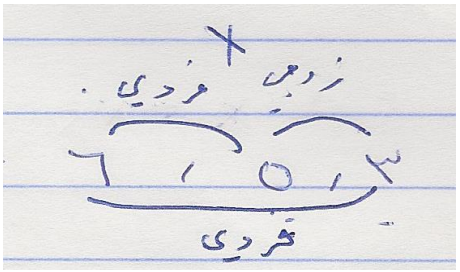
- حكمت (مشيراً للرسم أعلاه): "فردي× فردي..
- مهدي: فردي
- حكمت: وفردي × زوجي.. زوجي
- الجميع: صح!
- حكمت: عشان هيك الناتج زوجي
- الجميع: آه..

نلاحظ من هذا النقاش أن الطلاب استطاعوا التوصل إلى تفسير للمثال المعطى "بالاعتماد على شخص عارف" وهو زميلهم حكمت الذي وافقه الجميع في تفسيره.

4. 2 التوصل إلى اتفاق بالاعتماد على تجربة سابقة:

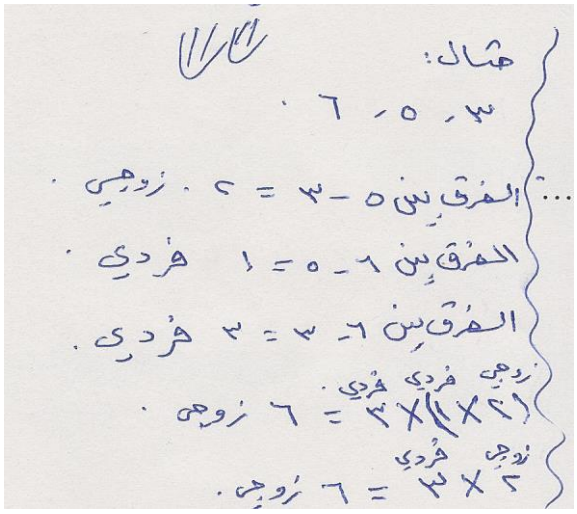
في هذه المرحلة دعا مجدي زملاءه لتفسير باقي الأمثلة.. ولجأت المجموعة لتفسير مثال آخر بنفس الطريقة التي فسروا فيها المثال السابق، أي "بالاعتماد على تجربتهم السابقة" حيث قال

حكمت: "نفسرهم بنفس الطريقة"، واقترح مهدي تفسير المثال الذي اختاروا فيه الأعداد 3، 5، 6 حيث قال: "تعالوا نفسر 3، 5، 6" ودار النقاش الآتي باستخدام الصورة أدناه:



- وليد: بين 3و 5.. زوجي (وكتبوا كلمة زوجي بينهما)
- مهدي: وبين 5و 6.. فردي (وكتبوا كلمة فردي بينهما)
- مجدي وحكمت: وبين 3و 6.. فردي
- مهدي (مشيراً لما كتب بين العددين3و 5..وبين5و6): زوجي × فردي..
- الجميع: زوجي
- حكمت ومجدي: وزوجي × فردي(بالإشارة لكلمة فردي المكتوبة بين3و6).. هو زوجي
- مهدي: إذاً فسرنا ليش دايماً زوجي

من خلال هذا النقاش، نرى أن الطلاب "اتفقوا" على تفسير لهذا المثال، وبعد ذلك قاموا بتدوين تفسيرهم كما توضح الصورة أدناه.



4. 3 تفسير الحديث بين الذاتي:

خلال المرحلة السابقة كان هناك "حديث بين ذاتي"، فعندما قال مهدي: "تعالوا نفسر 3، 5، 6"، يقصد أن يقوموا بتفسير المثال الذي اختاروا فيه الأعداد 3، 5، 6.

وأثناء تفسير الطلاب للمثال، استخدموا الجملة "بين 5و 6.. فردي" قاصدين بذلك أن الفرق بين 5 و6 هو عدد فردي.

3- أحداث تعلم مجموعة (أ) من الإناث (بيان، ميس، أماني، أزهار):

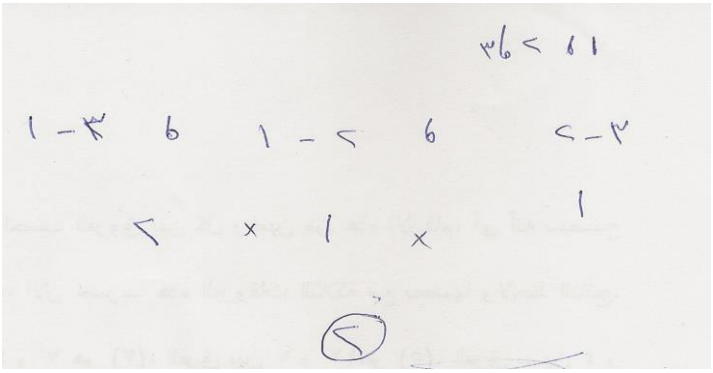
حدثت مراحل تعلم الطلاب بالتسلسل الآتي:

1. اتخاذ قرار بكيفية بدء التعلم
2. التفاوض للوصول إلى قرار
3. التوصل إلى تفسير للظاهرة
    3. 1 التوصل إلى معنى وتفسير للظاهرة بالاعتماد على شخص عارف
    3. 2 التوصل إلى معنى وتفسير للظاهرة بالاعتماد على تجربة سابقة
    3. 3 التصنيف إلى حالات كمرحلة من مراحل التوصل إلى معنى للظاهرة
    3. 4 تفسير الحديث بين الذاتي
4. التفاوض ما أجل التوصل إلى معنى
    4. 1 التفاوض للتوصل إلى معنى
    4. 2 تفسير الحديث بين الذاتي

وفيما يأتي نفصّل هذه المراحل:

1. اتخاذ قرار بكيفية بدء التعلم:

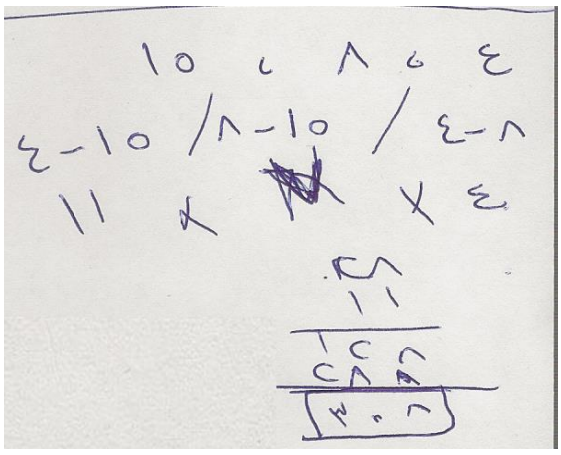
بعد أن قامت بيان بقراءة السؤال بصوت مرتفع، اتخذت المجوعة "قراراً" بتجريب أي ثلاثة أعداد حيث قالت ميس: "تعالوا نوخذ أي ثلاث أعداد"، وأيدتها بيان فقالت: "آه، لأنه السؤال ما حددلنا أعداد معينة"، ثم اقترحت ميس تجريب ثلاثة أعداد صغيرة كي يأخذوا فكرة عن السؤال حيث قالت: "تعالوا نجرّب أعداد صغيرة بالأول.. مثلاً 1 ، 2 ، 3"، وجميع الطالبات عملن معها.. وكان الناتج النهائي 2.



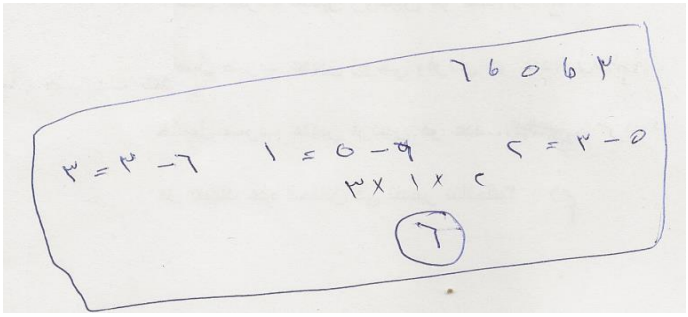
2. التفاوض للوصول إلى قرار:

هنا انتقلت الطالبات للبحث عن ملاحظة أو استنتاج حيث اقترحت أماني اختيار ثلاثة أعداد كبيرة لأن المثال المعطى جوابه كبير نسبياً في محاولة للبحث عن ملاحظة ما حيث قالت أماني: "المثال المعطى جوابه 120 ، تعالوا نجرّب أعداد كبيرة ونشوف النواتج"، فأيدتها زميلاتها حيث اقترحت ميس: "5 ، 8 ، 13"، وبدؤوا بالحسابات وقبل الانتهاء قالت بيان: "الناتج رح يكون 120 لأنها نفس فروقات المثال!! المعطى" وأيدتها ميس فقالت: "آه، صحيح 120" أي أن المجموعة لم تتوصل لأي ملاحظة لأنه نفس ناتج المثال المعطى. فاتخذت المجموعة "قراراً" بتجريب مزيد من الأعداد حيث قالت أماني: "بدنا نجرب أعداد كمان".

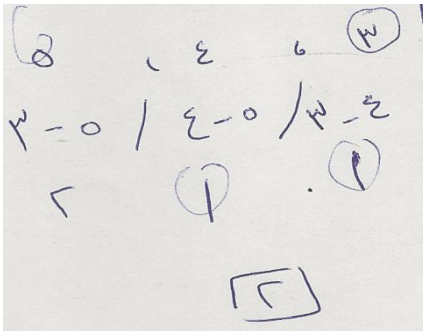
وتميزت هذه المرحلة بتجريب كثير من الثلاثيات ومحاولة التنويع، فاقترحت بيان: "4، 8 ، 15" وكان الناتج 308 كما تبين الصورة أدناه.



وجربت ميس الأعداد: 3 ، 5 ، 6 وكان الناتج 6

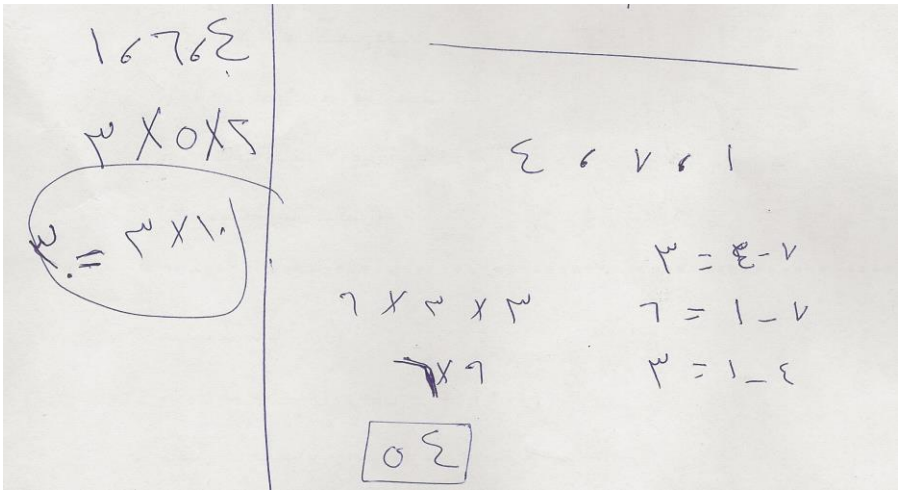


لكن لم تستطع الطالبات التوصل لأي ملاحظة من هذه الأمثلة ، فقالت أزهار: "بدنا نجرب كمان" فقالت بيان: "3 ، 4 ، 5" وقامت بكتابتها وحساب الفروقات وتوصلت للناتج 2.



وأثناء ذلك كانت أزهار تجرب 6 ، 7 ، 8 وتوصلت للناتج 2

وقامت أماني بتجريب الأعداد 1 ، 7 ، 4 وتوصلت للناتج 54، وكذلك جربت الأعداد 4 ، 6 ، 1 وتوصلت للناتج 30 كما تبين الصورة أدناه.



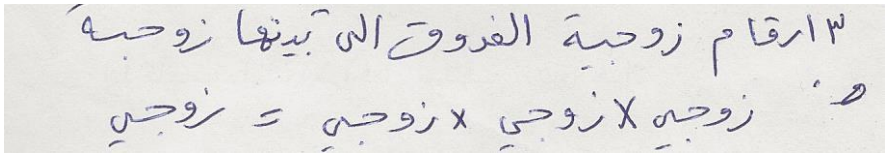
بعد تجريب هذه الأمثلة العديدة، ظهرت أول ملاحظة من الطالبة أماني حيث قالت: "كلهم أجوبتهم زوجية!!"، عادت الطالبات ينظرن للنواتج التي ظهرت في كل مرة.. وأيدت المجموعة أماني حيث قالت بيان: "صحيح! دايماً الناتج زوجي!".

نلاحظ أن هذه المرحلة تميزت بالتجريب المستمر وانتهت بالتوصل إلى "قرار" بأن الناتج يكون زوجياً حيث سألت الباحثة: "*هل تعتقدون أن هذا صحيح دائماً؟*" فأجاب الجميع: "آه..".

3. التوصل إلى تفسير للظاهرة

3. 1 التوصل إلى معنى وتفسير للظاهرة بالاعتماد على شخص عارف:

بعدما توصلت المجموعة إلى قرارها بأن الناتج دائماً زوجي، أخذت الطالبات ينظرن للأمثلة التي قمن بتجريبها للبحث عن التفسير لهذا القرار، وبعد فترة.. قدمت الطالبة بيان تفسيراً للأمثلة التي اختاروا فيها ثلاثة أعداد زوجية، حيث قالت: "هيها.. شوفوا، لما نوخذ 3 أعداد زوجية بتكون الفروقات بينها زوجية.. ولما نضرب 3 أعداد زوجية رح يكون الناتج زوجي" فأيدتها زميلاتها حيث قال الجميع: "صح!" وقاموا بكتابة هذا التفسير كما تبين الصورة أدناه.



نرى من هنا أن التفسير الذي توصلت له الطالبات كان "بالاعتماد على شخص عارف" وهي الزميلة بيان.

3. 2 التوصل إلى معنى وتفسير للظاهرة بالاعتماد على تجربة سابقة:

بعد أن قدمت بيان تفسيراً للأمثلة التي اختارت فيها المجموعة ثلاثة أعداد زوجية، اعتمدت الطالبات طريقتها في التفسير لتفسير باقي الأمثلة، فبعد أن أنهت الطالبات كتابة التفسير السابق، تابعت ميس التفسير قائلةً: "ولما يكون عنا 3 أعداد فردية رح تكون الفروقات كمان زوجية، ولما نضربها رح يكون زوجي" وأيدتها زميلاتها قائلات: "آه..".

3. 3 التصنيف إلى حالات كمرحلة من مراحل التوصل إلى معنى للظاهرة:

بعد توصل الطالبات لتفسير الأمثلة التي اخترن فيها أعداداً زوجية فقط، أو أعداداً فردية فقط، أوضحت أماني أنهم أنهوا "حالتين" من الحالات التي يريدون تفسيرها فقالت: "إذاً وضحنا حالتين، لما تكون كل الأعداد فردية أو كلها زوجية، بدنا نفسر لما نوخذ أعداد فردية وزوجية مع بعض"، وأيدتها بيان قائلةً: "آه، لما نوخذ عددين فرديين وواحد زوجي، ولما نوخذ عددين زوجيين وواحد

فردي"، نرى من هنا أن بيان وضحت ما هي الحالات المتبقية وهي حالتان، نستنتج إذاً أن المجموعة "صنفت" الأمثلة التي تعاملت معها إلى أربعة أصناف.

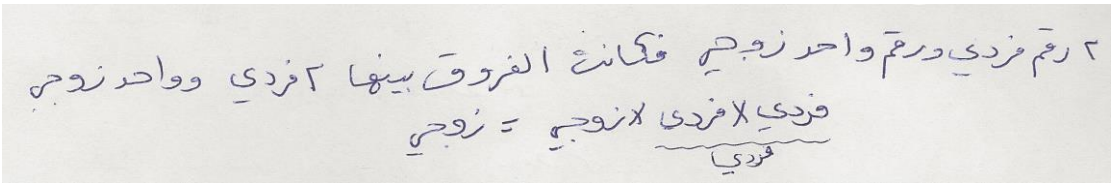
3. 4 تفسير الحديث بين الذاتي:

في النقاش السابق، كان هناك "حديث بين ذاتي" فعندما قالت أماني "بدنا نفسر لما نوخذ أعداد فردية وزوجية مع بعض" كانت تقصد بذلك أنهم يريدون تفسير الأمثلة التي كانت الأعداد المختارة بعضها فردي وبعضها زوجي، حيث فهمت زميلاتها ما تقصده ونلاحظ أن بيان ردت عليها: "آه، لما نوخذ عددين فرديين وواحد زوجي، ولما نوخذ عددين زوجيين وواحد فردي".

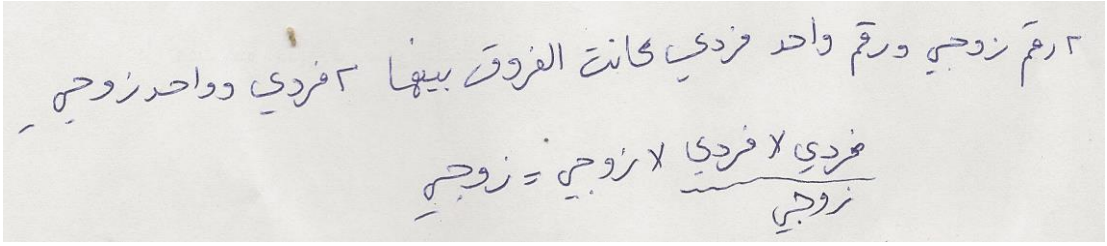
4. التفاوض ما أجل التوصل إلى معنى

4. 1 التفاوض للتوصل إلى معنى:

في هذه المرحلة انتقلت الطالبات لتفسير باقي الحالات التي تحدثن عنها، حيث قامت ميس بتفسير الحالة التي اخترن فيها عددين فرديين وعدداً زوجياً فقالت: "لما نوخذ اثنين فرديين وواحد زوجي رح تكون الفروق: فردي – زوجي، فردي – زوجي، فردي – فردي، وبينتج فردي × فردي × زوجي" وتوصلن لناتج زوجي كما تبين الصورة أدناه.



وتابعت أزهار فقالت: "بيضل عنا اثنين زوجي وواحد فردي"، فقدمت بيان تفسير الحالة الأخيرة قائلة: "بتكون الفروق بينها: فردي و فردي و زوجي" وأكملت ميس التفسير فقالت: "ولما نضرب فردي × فردي × زوجي بنحصل على .. زوجي، وأيدوها بذلك ودونوا التفسير كما تبين الصورة أدناه.



4. 2 تفسير الحديث بين الذاتي:

ورد "حديث بين ذاتي" أثناء نقاش المجموعة للتوصل إلى تفسير للظاهرة، فحين قالت أزهار: "بيضل عنا اثنين زوجي وواحد فردي" فهي تعني بذلك أنه بقي عليهم تفسير الحالة الرابعة والأخيرة وهي تفسير الأمثلة التي اختاروا فيها عددين زوجيين وعدداً فردياً.

4- أحداث تعلم مجموعة (ب) من الإناث (دعاء، تسنيم، مرجان، شيماء):

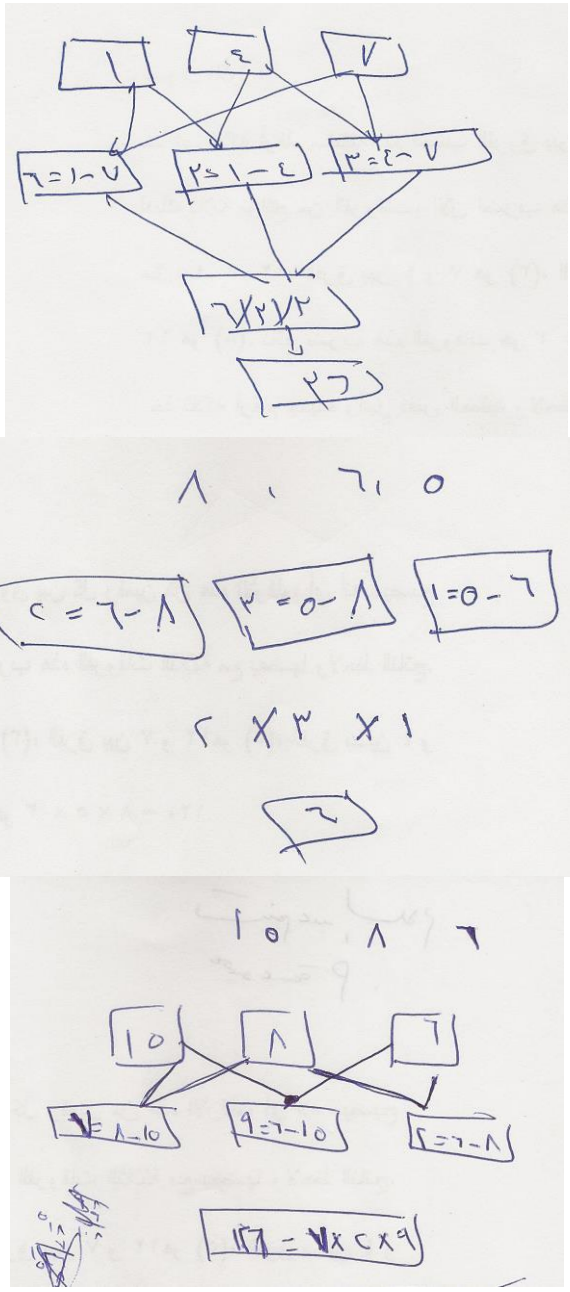
حدثت مراحل تعلم الطلاب بالتسلسل الآتي:

1. اتخاذ قرار بكيفية بدء التعلم
2. التوصل إلى ملاحظات حول الأمثلة التي قامت الطالبات بتجريبها
    2. 1 التوصل إلى قرار بالاعتماد على شخص عارف
    2. 2 التصنيف إلى حالات كمرحلة من مراحل التفاوض
    2. 3 تفسير الحديث بين الذاتي
3. التوصل إلى تفسير للحالات التي صنفتها الطالبات
    3. 1 التفاوض للتوصل إلى معنى
    3. 2 تفسير الحديث بين الذاتي

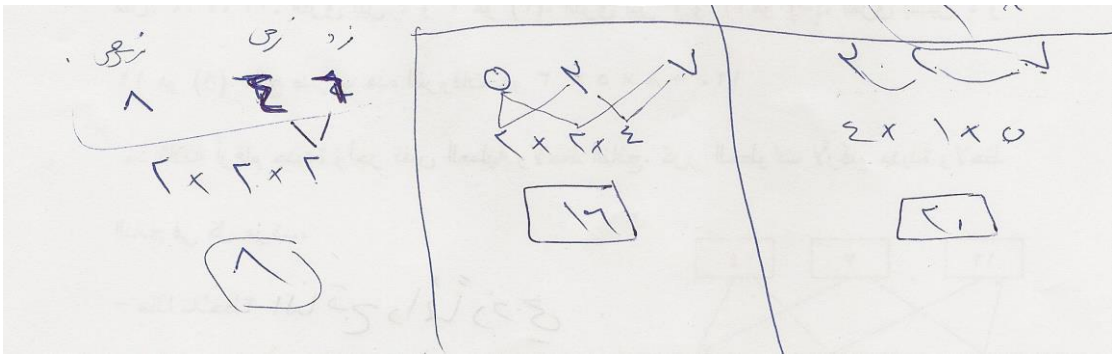
وفيما يأتي نفصّل هذه المراحل:

اتخاذ قرار بكيفية بدء التعلم:

بعد أن قرأت تسنيم السؤال، بادرت دعاء وطلبت من زميلاتها أن يقمن بتجربة ثلاثيات مختلفة من الأعداد: "كل واحدة منا تجرب ثلاث أعداد" وبدأت الطالبات بالتجربة، فجربت الطالبة مرجان: الأعداد 5، 6، 8 والناتج كان 6، وكذلك دعاء: اختارت 7، 4، 1 والناتج كان 36، والطالبة تسنيم اختارت 6، 8، 15 وتوصلت للناتج 126.



أما الطالبة شيماء، جربت ثلاثة مجموعات متنوعة بحيث اختارت ثلاثياً جميع أعداده فردية (7، 3، 5 والناتج كان 16)، وثلاثياً جميع أعداده زوجية (6، 4، 8 وكان الناتج 8)، وثلاثياً أعداده منوعة بين فردي وزوجي (7، 2، 3 والناتج كان 20)



2. التوصل إلى ملاحظات حول الأمثلة التي قامت الطالبات بتجريبها

2. 1 التوصل إلى قرار بالاعتماد على شخص عارف:

في هذه المرحلة، تناقشت المجموعة حول الأمثلة التي جربوها والملاحظات التي توصلوا لها، حيث ظهرت أول ملاحظة عندما قالت شيماء: "لاحظوا إنه الناتج فيهم كلهم زوجي! لأني جربت 7، 2، 3 والناتج 20، وجربت 6، 4، 8 وناتجهم 8، وكمان أخذت 7، 3، 5 والناتج كان 16"، وأضافت قائلةً: "يعني أخذنا حالات مختلفة، مرة كلّهم زوجيات ومرة كلهم فرديات ومرة فردي وزوجي مع بعض، وكل الإجابات طلعت زوجية"، فأيدها الجميع: "آه، صحيح! كلهم زوجي".

نلاحظ أن المجموعة توصلت إلى "قرار" بأن الناتج يكون زوجياً مهما كانت الأعداد المختارة بناء على الأمثلة التي اختبروها، وهذا القرار أُخذ بالاعتماد على الزميلة شيماء "كشخص عارف".

1. **2 التصنيف إلى حالات كمرحلة من مراحل التفاوض:**

في النقاش السابق نرى أن الطالبات قمن بتصنيف الأمثلة التي تعاملن معها أثناء عملية التجريب إلى ثلاثة أصناف، كما يظهر من حديث الطالبة شيماء حيث قالت: "أخذنا حالات مختلفة، مرة كلّهم زوجيات ومرة كلهم فرديات ومرة فردي وزوجي مع بعض، وكل الإجابات طلعت زوجية".

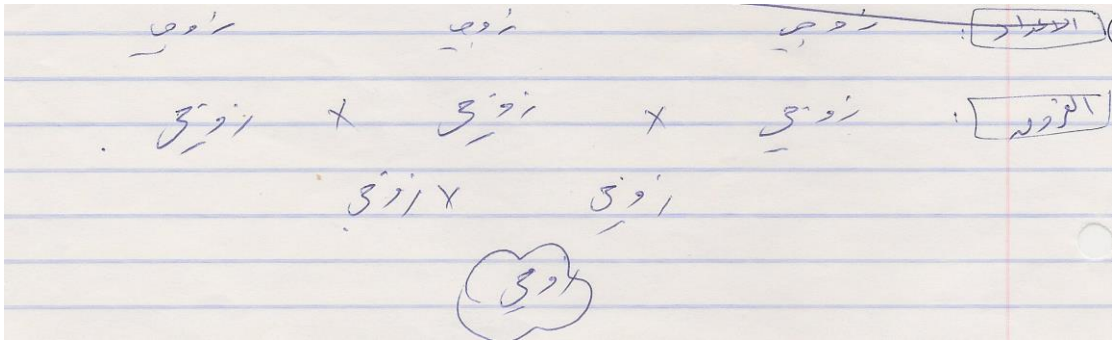
2. 3 تفسير الحديث بين الذاتي:

خلال تفاوض الطالبات للتوصل إلى قرار، كان جزء من حديثهن "حديثاً بين ذاتي"، فعندما قالوا: "كلهم زوجي" فالمقصود هنا أن جميع الأمثلة التي تعاملوا معها كان الناتج في كل منها عدداً زوجياً.

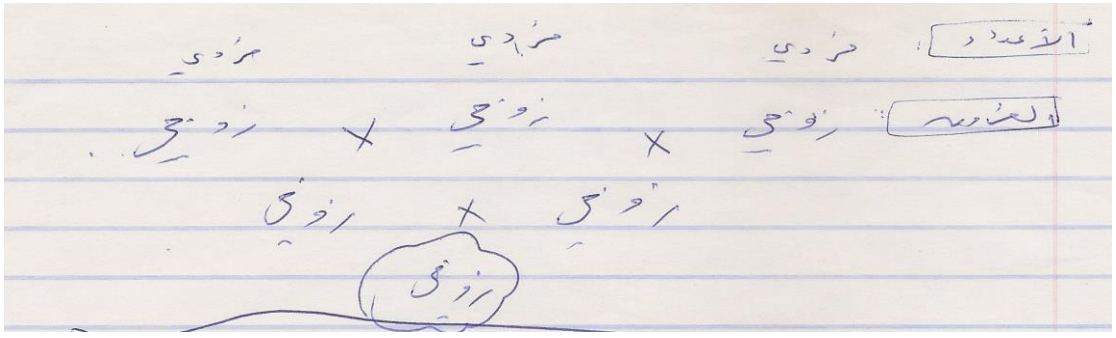
3. التوصل إلى تفسير للحالات التي صنفتها الطالبات

3. 1 التفاوض للتوصل إلى معنى:

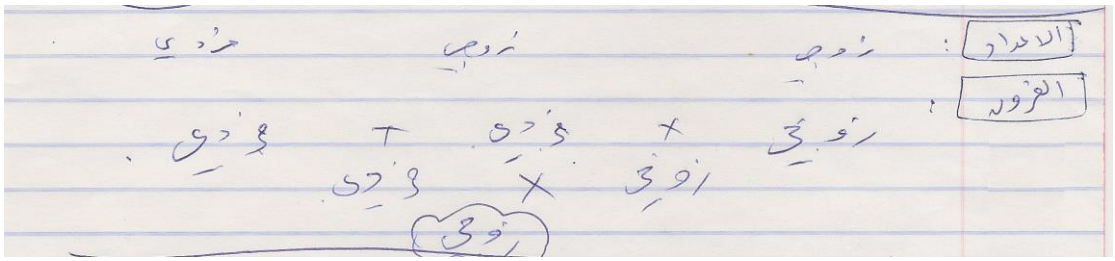
في هذه المرحلة سألت الباحثة الطالبات عن تفسير للملاحظة التي توصلن لها، فقالت تسنيم: "تعالوا نوخذ كل حالة لوحدها" أي أن يقوموا بتفسير الحالات الأربع التي تعاملوا معها بحيث يأخذن كل حالة بشكل منفرد. أيدها أفراد المجموعة وبادرت دعاء بتفسير الحالة الأولى فقالت: "آه، في حال أخذنا كل الأعداد زوجية، رح تكون الفروقات الثلاث بينها زوجية... وعشان هيك بطلع الناتج زوجي× زوجي × زوجي = زوجي"



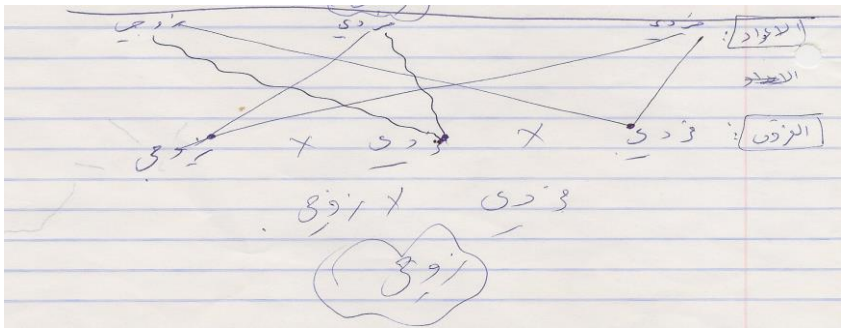
بعد ذلك قامت شيماء بتفسير الحالة التي أخذن فيها ثلاثة أعداد فردية حيث قالت شيماء: "فردي– فردي = زوجي عشان هيك رح تطلع الفروقات هون كمان زوجية" وأضافت تسنيم: "وناتج ضرب ثلاث أعداد زوجية بعطي زوجي"



ثم انتقلوا للحالات المتبقية، حيث قالت مرجان: " ضل إنا نوخذ أعداد زوجية وفردية مع بعض"، وأوضحت تسنيم ذلك فقالت: "ضل حالتين، إنا نوخذ عددين زوجيين وعدد فردي، والحالة الأخيرة عددين فرديين وعدد زوجي"، وتابعت مفسّرة الحالة الثالثة: "إذا أخذنا زوجي، زوجي، فردي.. رح يكون ضرب الفروقات: زوجي× زوجي × فردي= زوجي



ثم قامت دعاء بتفسير الحالة الأخيرة فقالت: "وبحالة أخذنا فردي، فردي، زوجي الفروقات رح تطلع فردي× فردي × زوجي = زوجي"، كما في الشكل أدناه.



نلاحظ من خلال هذا التفاوض أن الطالبات بعدما قمن بتصنيف الأمثلة التي تعاملن معها إلى أربع حالات، قمن بتفسير كل حالة لوحدها، وتوصلن إلى تفسير الملاحظة التي توصلن لها بأن الناتج يكون دائماً زوجياً مهما كان الثلاثي المختار من أعداد.

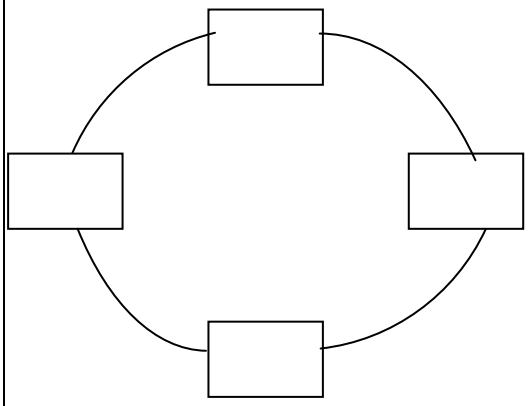
3. 2 تفسير الحديث بين الذاتي:

في التفاوض السابق، كان هناك حديث بين ذاتي عندما قالت مرجان: "إنا نوخذ أعداد زوجية وفردية مع بعض" فالمقصود من (مع بعض) أن يأخذوا أمثلة بحيث تكون الأعداد المختارة جزء منها فردي وجزء منها زوجي، أي أن (مع بعض) كانت "متفقاً لغوياً" بين الطالبات.

نلخص نتائج المجوعات في السؤال الأول في جدول (2).

جدول(2): تشابه المجموعات المختلفة واختلافها بما يتعلق بتعلمها وتعاونها خلال حل السؤال الأول:

التشابه	الاختلاف	ملاحظات
– اعتمدت مجموعات الطلاب جميعها على "التجريب" كبداية للحل في هذا السؤال. – قامت المجموعات بتصنيف الأمثلة التي تعاملت معها إلى أربعة أصناف كمرحلة من مراحل التفاوض: ثلاثة أعداد زوجية، ثلاثة أعداد فردية، عددان زوجيان والثالث عدد فردي، وعددان فرديان والثالث عدد زوجي. – كانت قرارات المجموعات متعلقة بكيفية بدء التعلم، وكذلك اتخذت المجموعات قرارات "بالاعتماد على أدلة تجريبية" وكذلك بالاعتماد على "شخص عارف" وكانت القرارات تُتّخذ بعد التفاوض والمناقشة بين أفراد المجموعات.	– مجموعتا الذكور واجهتا صعوبة في تفسير الظاهرة التي قاموا بتعميمها في السؤال، أما مجموعتا الإناث فقد توصلتا للتفسير بسهولة. – مجموعتا الإناث كان لديهما قدرة أكبر في التعامل مع الأعداد.	– مجموعتا الذكور اكتسبوا خبرة من هذا السؤال واستفادوا منها في الأسئلة اللاحقة، فقد تعاملوا مع الأعداد بشكل أسرع وبطلاقة أكثر في المسائل اللاحقة. – لاحظت الباحثة عدم وجود مواقف "عدم تيقن" خلال حل هذا السؤال، باستثناء حالة عدم التأكد من نهاية الحل التي واجهتها المجموعة (أ) من الذكور بعد انتهائها من حل السؤال.

نص السؤال الثاني: اختر أربعة أعداد من 1 إلى 9 وضعها في المربعات في الشكل، بحيث يكون الفرق بين أي عددين متصلين مع بعضهما فرقاً فردياً. عليك أن تستعمل أربعة أعداد مختلفة. -ماذا تقول عن مجموع أي عددين متصلين؟ - إلى ماذا توصلت من هذه الملاحظات؟ - هل يمكنك تفسير النتائج التي توصلت لها؟ - إذا وضعت في المربع الأول عدداً فردياً، فإن العدد في المربع المرتبط به سيكون ..... وإذا وضعت في المربع الأول عدداً زوجياً فإن العدد في المربع المرتبط به سيكون ..... لذلك فإن مجموع أي عددين متصلين في الشكل هو ..... - كيف تثبت ذلك رياضياً؟	

أحداث تعلم المجموعات خلال حلهم السؤال الثاني

1- أحداث تعلم مجموعة (أ) من الذكور (محمد، شريف، زيد، بدر):

حدثت مراحل تعلم الطلاب بالتسلسل الآتي:

1. التوصل إلى معنى بالاعتماد على أدلة تجريبية
2. موقف عدم تيقن
3. التوصل إلى معنى للظاهرة بالاعتماد على شخص عارف
4. التفاوض من أجل بناء ملاحظات حول الظاهرة
   4. 1 التفاوض للتوصل إلى معنى
   4. 2 التوصل إلى قرار
5. التوصل إلى إثبات رياضي للظاهرة

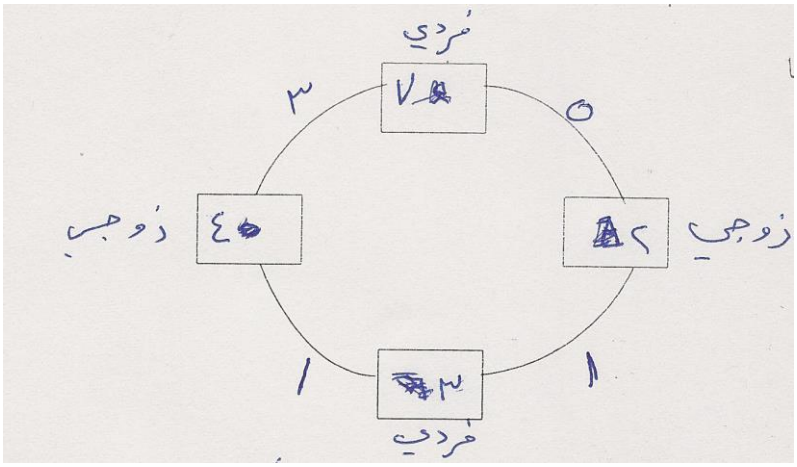
5. 1 موقف عدم تيقن بخصوص معنى مصطلح

5. 2 التوصل إلى قرار بالاعتماد على شخص عارف

وفيما يأتي نفصّل هذه المراحل:

1. التوصل إلى معنى بالاعتماد على أدلة تجريبية:

في البداية بادر زيد إلى قراءة نص السؤال بصوت مرتفع وكان الجميع يتابع معه. وبعد أن أخذ الطلاب فترة للتمعن في السؤال ومحاولة البحث عن فكرة للحل، قدّم محمد فكرة الحل بعد تجريبه لمثال فقال: "7، 4، 3، 2... فردي، زوجي، فردي، زوجي"، أي أن الأعداد توزع على المربعات بالتتابع: فردي، زوجي، فردي، زوجي، وذلك باعتماده على الأعداد التي قام بتجريبها، كما يتبين من الصورة المأخوذة من ورقته، "القرار" هنا كان "بالاعتماد على دليل تجريبي"، واستنتج محمد من هذا أن مجموع عددين متصلين هو فردي حيث قال: "مجموع أي عددين لازم يكون فردي لأنهم واحد فردي وواحد زوجي".



2. موقف عدم تيقن:

طلب زيد التأكد من تحقق شرط السؤال، فقال: " بدنا نتأكد من تحقق الشرط!" وحسبوا الفروقات معاً للتأكد أن مثال محمد يحقق شرط السؤال.

3. التوصل إلى معنى للظاهرة بالاعتماد على شخص عارف:

وضح محمد لزملائه كيفية تعبئة المربعات، واقتنع زملاؤه بما يقول، النقاش التالي يبين ذلك:

– محمد: مجموع أي عددين لازم يكون فردي، عشان هيك بنكتب واحد فردي وواحد

زوجي.

– الجميع: آآه..

التوصل لهذه الملاحظة كان بالاعتماد على "شخص عارف" وهو زميلهم محمد. وهنا دقق زيد قائلاً: "صحيح، بس لازم نحكي مجموع أي عددين (متصلين) فردي وليس أي عددين"، ووافقه محمد قائلاً: "آه.. المتصلين...".

4. التفاوض من أجل بناء ملاحظات حول الظاهرة:

4. 1 التفاوض للتوصل إلى معنى:

عندما سأل محمد الباحثة " كيف يعني شو توصلنا من هذه الملاحظات؟؟" حدث تفاوض بين الباحثة وأفراد المجموعة من أجل "التوصل إلى معنى" للملاحظات التي توصلوا لها، كما يبين النقاش التالي:

– *الباحثة: عندما وضعتم الأعداد في المربعات... كيف وضعتموها؟*

– الجميع: الفرق بين المتصلين لازم فردي..

– *الباحثة: عندما يكون لدينا عددين الفرق بينهما فردي فما هما العددان؟*

– الجميع: واحد فردي وواحد زوجي

– *الباحثة: ماذا كان مجموع المتصلين؟*

– الجميع: فردي

– *الباحثة: لماذا كان الناتج دائماً فردي؟*

– الجميع: لأنهم واحد فردي وواحد زوجي

– محمد: لأنه مجموع فردي وزوجي بيعطي فردي

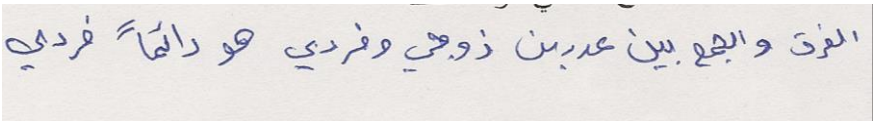
– بدر: بنلاحظ انه الفرق والجمع بين عددين زوجي وفردي دايماً فردي

– الجميع: آه.. وكتبوا هذه الملاحظة)

نلاحظ من هذا التفاوض أن المجموعة قامت ببناء ملاحظاتها حول الظاهرة والوصول لمعنى لهذه الملاحظات.

4. 2 التوصل إلى قرار:

في نهاية مرحلة التفاوض للتوصل إلى معنى، نلاحظ أن المجموعة توصلت إلى "قرار"، حيث قال بدر: "بنلاحظ انه الفرق والجمع بين عددين زوجي وفردي دايماً فردي" ووافقوه فيما قال ودونوا هذا القرار.



5. التوصل إلى إثبات رياضي للتعميم الذي توصلوا له:

5. 1 موقف عدم تيقن بخصوص معنى مصطلح:

في المرحلة التالية انتقل الطلاب إلى الإثبات الرياضي للتعميم الذي توصلوا له، إلا أنهم واجهوا صعوبة في معرفة المقصود من مصطلح (إثبات رياضي) حيث يطلب السؤال منهم إثبات الظاهرة رياضياً، فبعد أن قرأ شريف هذا الفرع من السؤال، الجميع بدأ بالتفكير لفترة من الوقت... ثم دار بينهم النقاش التالي:

- بدر: شو معنى رياضياً؟
- محمد: يعني لازم نحلّه!
- زيد: يعني لازم نوضح بالأعداد

هذا النقاش يدل على أن أفراد المجموعة "غير متيقنين" من المقصود بـ (الإثبات الرياضي)، أي أنهم واجهوا صعوبة من نوع "نقص في الفهم والتقدم" حسب جوز (1998)، وكانت الاستجابة لهذه الصعوبة هي اللجوء للباحثة وطلب المساعدة منها كما توضح المرحلة 5. 2 التالية.

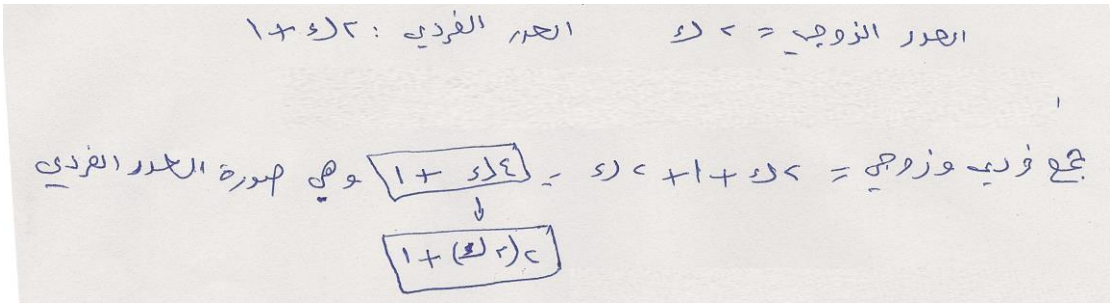
5. 2 التوصل إلى قرار بالاعتماد على شخص عارف:

لجأ الطلاب إلى الباحثة لطلب المساعدة من أجل التوصل لمعنى (إثبات رياضي)، حيث سأل محمد الباحثة: "رياضياً معناها بالأعداد؟" فقامت الباحثة بطرح أسئلة عليهم لمساعدتهم في "التوصل إلى قرار"، كما يتبين من النقاش الآتي:

- *الباحثة: تعلمتم سابقاً أننا نستطيع أن نعبر عن العدد الفردي برمز؟*

- زيد: 2ك+1
- بدر: آه.. هذا للفردي، والزوجي بنرمز له 2ك
- الجميع: مممم...!
- زيد: يعني لازم نثبت بالرموز
- الجميع: آه..

نلاحظ أن الطلاب توصلوا إلى "قرار" وتغلبوا على "موقف عدم التيقن بخصوص معنى مصطلح" فانتقل الطلاب إلى الإثبات الرياضي، وكان ذلك بمبادرة من الطالب بدر قائلاً: " تعالوا نكتب رموزهن..."، وبدأ هو بالكتابة والجميع كان يتابع معه، وقاموا بجمع صيغة العدد الزوجي مع العدد الفردي.



أثناء الإثبات الرياضي، نلاحظ أن الطلاب استخدموا نفس الرمز "ك" للعددين الفردي والزوجي، وكذلك لم يوضحوا ما هو الرمز "ك"، فسألت الباحثة عن هذا الرمز فأجاب محمد بأنه "عدد صحيح"، إذا نلاحظ أنهم لا يعطون أهمية لهذه التفصيلات أثناء الحل.

بعد أن أنهى الطلاب الحل، سألت الباحثة عن عدم كتابتهم توضيحاً عن الرمز " ك"، فأجابوا أنه "ليس أمراً ضرورياً"، وأنهم لم يعتادوا على كتابة مثل هذه التفصيلات في الحل.

2- أحداث تعلم مجموعة (ب) من الذكور (مجدي، حكمت، مهدي، وليد):

حدثت مراحل تعلم الطلاب بالتسلسل الآتي:

1. التفاوض من أجل توزيع الأعداد حسب شرط السؤال
    1. 1 التفاوض للتوصل إلى قرار
    1. 2 تفسير الحديث بين الذاتي
2. التفاوض للتوصل إلى قرار

3. التفاوض من أجل الوصول إلى إثبات رياضي للظاهرة

3. 1 التفاوض للتوصل إلى معنى

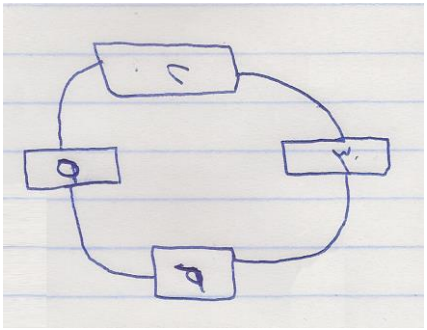
3. 2 موقف عدم تيقن

وفيما يأتي نفصّل هذه المراحل:

1. التفاوض من أجل توزيع الأعداد حسب شرط السؤال

1. 1 التفاوض للتوصل إلى قرار:

بادر مهدي لقراءة نص السؤال، وحدث تفاوض بين الطلاب بهدف الوصول إلى قرار بكيفية تعبئة المربعات بالأعداد حسب شرط السؤال، وبعد أن قرأ مهدي السؤال قدم مهدي وحكمت أول فكرة للحل حين قال مهدي: "2، 3 ..." وقبل أن يكمل قال حكمت: "زوجي.. فردي.. زوجي.. فردي"، أي أنه أشار لتوزيع الأعداد بالتتابع بين فردي وزوجي. وأيده زملاؤه بذلك فقال وليد: "صح! مشان يكون الفرق بين العددين فردي" وقال مهدي: "وبنكمل 6و5"، أي أنهم توصلوا إلى "قرار" بتوزيع الأعداد بالتتابع بين زوجي وفردي، كما توضح الصورة أدناه:

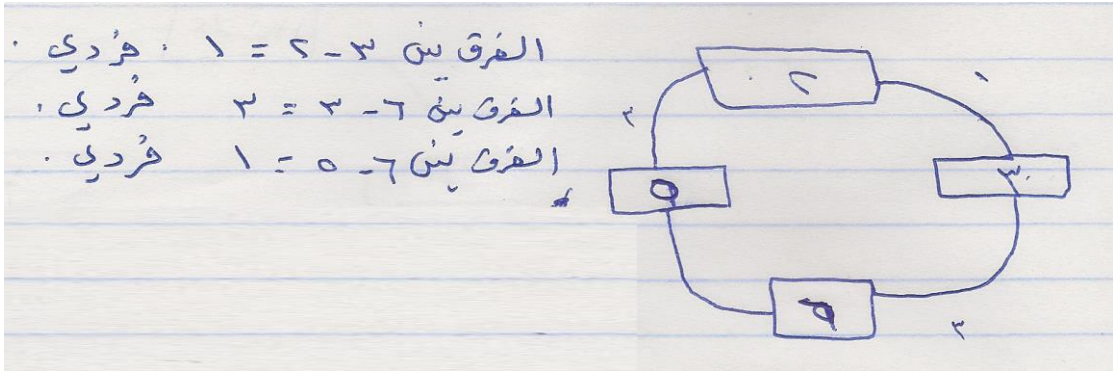


بعد ذلك تحققوا من أن جميع الفروق فردية، كما يبين النقاش:

- مهدي: بين 2و3= 1
- حكمت: فردي
- مجدي: وبين 3و6= 3
- وليد: وبين 6و5.. 1

  وبين 5و2.. 3
- حكمت: هيك تأكدنا انه كل الفروق فردية

أي أنهم توصلوا إلى "قرار" بأن الأعداد التي وزعوها في الرسم تحقق المطلوب في السؤال، ونرى في الصورة أدناه أن الطلاب لم يكونوا دقيقين في الكتابة، فكان عليهم كتابة إما (الفرق بين 3، 2 هو 1) أو كتابة (3 – 2= 1) وليس كلاهما معاً.

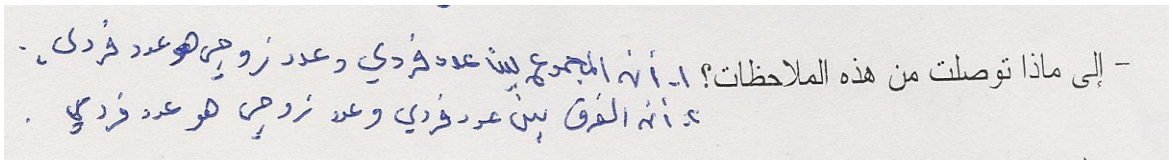


1. 2 تفسير الحديث بين الذاتي:

في النقاش السابق، كان جزء من حديث الطلاب "بين ذاتي"، مثلاً عندما قال مهدي: "بين 2و3= 1" يعني أن الفرق بين العددين 2، 3 هو 1. وكذلك عندما قالوا: بين 3و6= 3 ، بين 5و2.. 3 ، بين 6و5.. 1.

2. التفاوض للتوصل إلى قرار:

انتقلت المجموعة إلى الفرع التالي المتعلق بمجموع عددين متصلين، وقاموا بجمع كل عددين متصلين ووجدوا أن الناتج دائماً فردي، حيث قال حكمت: "إذاً مجموع أي عددين متصلين هو فردي"، ثم توصلوا إلى "قرار" بأن الفرق والمجموع لعددين أحدهما زوجي والآخر فردي هو عدد فردي، كما تبين الصورة أدناه:



3. التفاوض من أجل الوصول إلى إثبات رياضي للظاهرة

3. 1 التفاوض للتوصل إلى معنى:

هنا قرأ مجدي: "هل تستطيع أن تثبت ذلك رياضياً؟" ولاحظت الباحثة أن هناك صعوبة في معرفة المقصود بمصطلح (الإثبات الرياضي)، حيث قال مهدي: "نوخذ كمان أعداد غير اللي

أخذناها وبنوصل لنفس النتائج!" ولم يقدم أي طالب اقتراحاً آخر، ما يدل على عدم إدراكهم لمعنى الإثبات الرياضي. ثم دار نقاش بين المجموعة والباحثة:

– *الباحثة: ما معنى إثبات رياضي؟*

– الجميع: نوخذ مثال!!

– *الباحثة: هل المثال يثبت حقيقة؟*

– مهدي وحكمت: أكثر من مثال!

نرى من هذا النقاش أن الطلاب لديهم اعتقاد خاطئ بأنهم إذا أخذوا عدة أمثلة تعطي نفس النتيجة فإن ذلك يعدّ إثباتاً رياضياً!

نرى من هنا أن الطلاب واجهوا صعوبة من نوع "نقص في الفهم" حسب جوز (1998)، فقامت الباحثة بطرح أسئلة لمساعدتهم في معرفة المقصود من الإثبات الرياضي:

– *الباحثة: تعلمتم الفصل الماضي رمز العدد الزوجي؟*

– حكمت (يتساءل): 2ك؟؟

– الجميع: آآآآه

– *الباحثة: صحيح، ورمز العدد الفردي؟؟*

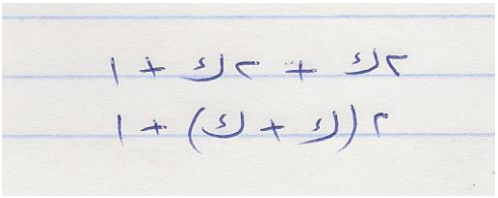
– الجميع: 2ك +1

– *الباحثة: وما هي ك؟*

– مجدي: عدد صحيح

من النقاش أعلاه، نلاحظ أن الطلاب بمجرد أن تذكروا أننا نرمز للعدد الزوجي بالرمز (2ك)، حيث ك عدد صحيح، أدركوا أن الإثبات الرياضي يكون بالرموز، فنبرة صوتهم التي قالوا فيها: " آآآآه " تدل على ذلك. حيث قال وليد: "يعني مثل ما أخذنا في درس طرق البرهان" وقال مهدي: "يعني نرمز للأعداد برموز".

ثم قال حكمت: "يعني نجمع رمز الفردي مع رمز الزوجي؟؟" وأجابه مجدي: "آه.. بالرموز"، وقاموا بجمعهما –كما تبين الصورة أدناه– وتوصلوا إلى 2(ك+ ك)..+1 وقال حكمت "وهذا رمز الفردي" ووافقه الجميع حيث قالوا: "صحيح"



نرى من هذا التفاوض أنهم توصلوا إلى إثبات لملاحظتهم بأن الناتج فردي دائماً. لكن الطلاب استخدموا نفس الرمز ك في العددين الزوجي والفردي، وهذا ليس صحيحاً من ناحية رياضية، فكان عليهم أن يستخدموا رمزاً مختلفاً في العدد الفردي عن العدد الزوجي.

3. 2 موقف عدم تيقن:

في النقاش السابق، عندما قال حكمت: "2ك؟؟" قال ذلك بتساؤل وكان بانتظار تأكيد وموافقة من الباحثة، أي أنه كان "غير متيقن" من صحة ما يقول.

وعندما قال حكمت: "يعني نجمع رمز الفردي مع رمز الزوجي؟؟ "قال ذلك متسائلاً وكان ينتظر تأكيداً من شخص ما، فكان "غير متيقن" مما يقول.

3- أحداث تعلم مجموعة (أ) من الإناث (بيان، أماني، ميس، أزهار):

حدثت مراحل تعلم الطلاب بالتسلسل الآتي:

1. التفاوض للتوصل إلى قرار
2. التوصل إلى معنى بالاعتماد على شخص عارف
3. التوصل إلى قرار
4. التفاوض من أجل التوصل إلى إثبات رياضي للظاهرة
    4. 1 التفاوض للتوصل إلى معنى
    4. 2 تفسير الحديث بين الذاتي
5. التوصل إلى قرار

وفيما يأتي نفصّل هذه المراحل:

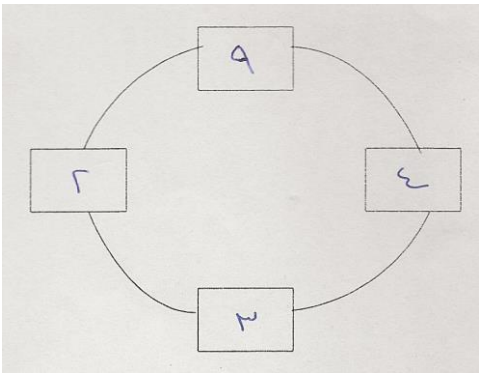
1. التفاوض للتوصل إلى قرار:

بعد أن قامت أزهار بقراءة السؤال بصوت مرتفع، دعت بيان المجموعة للبدء بالعمل فقالت: "تعالوا نبدأ" وفي البداية اعتقدت ميس أن السؤال يريد أعداداً فردية فقالت: "الأعداد الفردية من 1 إلى 9

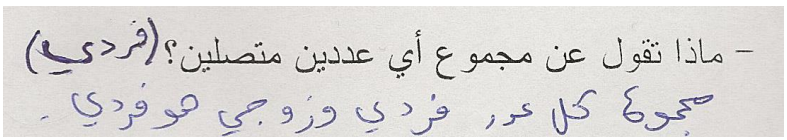
هي 1 ، 3 ، 5 ، 7 ، 9 " ولكن بيان وضحت الأمر فقالت: "بس الفرق بين عددين منهم رح يكون زوجي واحنا بدنا فرق فردي!"، وأدركت ميس المطلوب حيث قالت: "آآآه.. ما بدنا أعداد فرديةً، بدنا فروق فردية!"، فنرى من خلال هذا النقاش أن الطالبات توصلن إلى "اتفاق" وتأكيد بأن المطلوب هو فروق فردية بين الأعداد الموزعة وليس المطلوب توزيع أعداد فردية.

2. التوصل إلى معنى بالاعتماد على شخص عارف:

قدمت بيان عددين الفرق بينهما فردي فقالت: "9 – 4 = 5" وكذلك قدمت أول ملاحظة عن كيفية توزيع الأعداد، فقالت: "لاحظوا، نوخذ واحد زوجي وواحد فردي مشان يكون الفرق فردي" وأيدتها زميلاتها فقلن: "صح!"، ثم تابعت أزهار (وأشارت للمربع المتصل بالعدد 4): "نكتب 3 هون " وأكملت بيان (وأشارت للمربع المتبقي): و2 هون لأن 3 – 2 = 1 فردي"، وأوضحت أماني أن الفرق بين أول عدد قمن بكتابته (وهو9) وآخر عدد (وهو2) هو فرق فردي حيث قالت: "9 – 2 فردي! إذاً صحيح!" ما يؤكد أن شرط السؤال قد تحقق كما تبين الصورة.



وتأكدت الطالبات أن حلّهن صحيح بعد حساب الفروقات حيث قالت ميس: " كل الفروق فردية، إذاً حلنا صحيح". نرى أن الطالبات اعتمدن على الزميلة بيان "كشخص عارف" لتفسير الظاهرة، وبعد انتقال الطالبات للفرع التالي المتعلق بمجموع عددين متصلين، ربطت ميس ملاحظتها بالملاحظة التي قدمتها بيان فقالت: "لاحظوا أنها واحد زوجي وواحد فردي، عشان هيك مجموعها دايماً فردي.



3. التوصل إلى قرار:

قرأت أماني الفرع التالي: "إلى ماذا توصلنا من هذه الملاحظات؟" فلخصت ميس الملاحظتين التي قدمتها هي وبيان فقالت: "لما يكون الفرق بين عددين فردي بيكون مجموعهم كمان فردي" وأيدتها زميلاتها بذلك فقلن: " صح". وأوضحت بيان أن السبب في ذلك يعود لكون العددين أحدهما فردي والآخر زوجي "لأنه بيكون واحد فردي وواحد زوجي!"، وأضافت أزهار أنهم وزعوا الأعداد بالتتابع من ناحية فردي وزوجي حيث قالت: "آه, لأنا لما وزعناها.. وزعناها فردي، زوجي، فردي، زوجي". نرى من هذا النقاش أن الطالبات توصلن إلى "قرار" بأن المجموع والفرق لعددين متصلين هنا هو فردي وأن هذا يعود لتوزيع الأعداد في المربعات بالتتابع من ناحية فردي وزوجي.

4. التفاوض من أجل التوصل إلى إثبات رياضي للظاهرة

4. 1 التفاوض للتوصل إلى معنى:

انتقلت الطالبات في هذه المرحلة إلى الإثبات الرياضي للظاهرة التي لاحظنها، وقدمت ميس الإشارة الأولى للحل فقالت: "الزوجي 2ك والفردي 2ك + 1"، ووافقتها زميلاتها، وعندها سألت الباحثة: *"ما هي ك؟"* فأجابت الطالبات: "عدد صحيح".

نلاحظ أن الطالبات استخدمن الرمز ك ليرمزن لكلٍ من العدد الزوجي والفردي، وهذا خاطئ رياضياً، ولذلك دار النقاش التالي لكي تتوصل الطالبات لخطئهن ويقمن بتصحيحه:

- *الباحثة: عند العدد 8 ما هي ك؟*
- الجميع: 4
- وعند العدد 5 ما هي ك؟
- الجميع: 2
- *الباحثة: إذاً العدد الصحيح ك يتغير؟!*
- الجميع: آه..
- بيان: بتكون قيمة ك حسب العدد
- *الباحثة: قلتم أن الزوجي = 2ك , والفردي 2ك +1، فهل هذا يعني أن ك يجب أن تكون نفسها لكل عدد زوجي وفردي؟*

- الجميع: آآآآه!

- ميس وبيان: فهمت! لازم نغير الرمز

- أماني: يعني الزوجي نستخدم له رمز , والفردي رمز مختلف

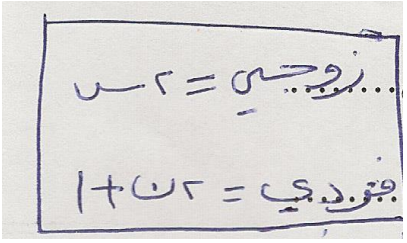
من النقاش السابق نرى أن الطالبات أدركن أنه من الخطأ استخدام نفس الرمز ك للرمز للعدد الفردي والزوجي في آن واحد حيث قالت ميس وبيان: "فهمت! لازم نغير الرمز"، وأضافت أماني: "يعني الزوجي نستخدم له رمز , والفردي رمز مختلف" أي أن الطالبات توصلن إلى معنى رياضي.

4. 2 تفسير الحديث بين الذاتي:

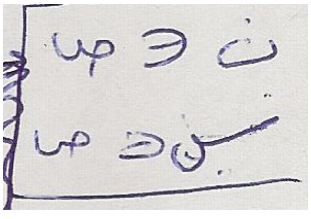
كان هناك حديث بين ذاتي خلال نقاش الطالبات، فعندما قالت ميس: "الزوجي 2ك والفردي 2ك+1" فهي تقصد بذلك أن الرمز الرياضي للعدد الزوجي هو 2ك، وأن الرمز الرياضي للعدد الفردي هو 2ك+ 1.

5. التوصل إلى قرار:

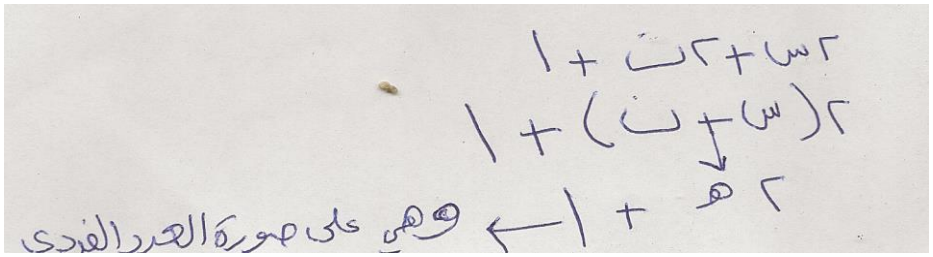
بعد أن أدركت الطالبات أن عليهن تغيير الرموز، اتخذت المجموعة "قراراً" باستخدام رمز مختلف للعدد الزوجي عنه للعدد الفردي، حيث قالت ميس: "الزوجي 2س مثلاً، والفردي 2ن + 1" وأجابتها زميلاتها: "صح! بصير.." وقمن بكتابة ذلك كما تبين الصورة أدناه.



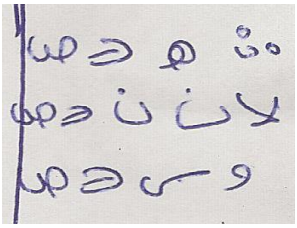
وكتبن أيضا س∋ ص، ن ∋ إلى ص



وقامت الطالبات بعملية الجمع الموضحة في الصورة أدناه.



وقالت بيان: س + ن نرمزلهم هـ و هـ ∋ ص، وعندما سألت *الباحثة: "لماذا هـ ∋ ص؟*" أجابت الطالبات: "لأنها مجموع عددين صحيحين" ووضحن ذلك على الورقة.



توصلت المجموعة إلى قرار بأن هذا الناتج هو صورة العدد الفردي حيث قالت ميس: "2هـ + 1 وهون صورة العدد الفردي" وأيدتها زميلاتها، أي أن المجموعة هنا توصلت إلى "قرار" بأن الناتج يكون فردياً دائماً عن طريق الإثبات الرياضي، حيث كان ناتج جمع رمز العدد الزوجي مع رمز العدد الفردي هو صورة العدد الفردي.

4- أحداث تعلم مجموعة (ب) من الإناث (دعاء، شيماء، تسنيم، مرجان):

حدثت مراحل تعلم الطلاب بالتسلسل الآتي:

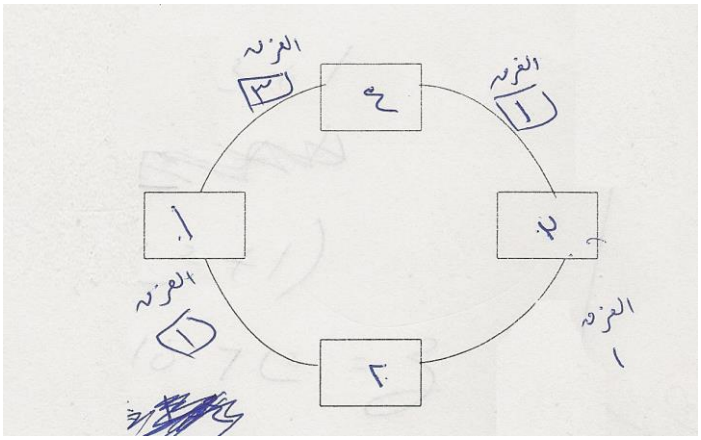
1. التفاوض من أجل إيجاد توزيع للأعداد حسب شرط السؤال
    1. 1 التفاوض للتوصل إلى قرار
    1. 2 تفسير الحديث بين الذاتي
2. التوصل إلى معنى بالاعتماد على شخص عارف
3. التفاوض للتوصل إلى معنى رياضي

وفيما يأتي نفصّل هذه المراحل:

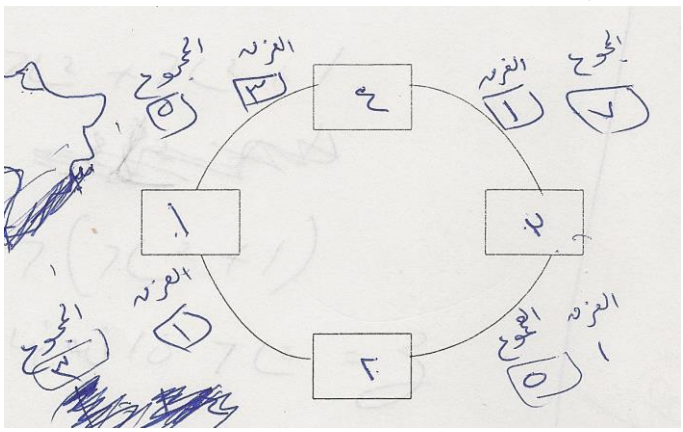
1. التفاوض من أجل إيجاد توزيع للأعداد حسب شرط السؤال
    1. 1 التفاوض للتوصل إلى قرار:

بادرت شيماء لقراءة نص السؤال، وقالت مرجان أن شرط السؤال "انه الفرق بين العددين المتصلين فردي" لتلفت نظر زميلاتها لذلك، ثم قدمت مرجان فكرة الحل فقالت: "نختار عددين فرديين وعددين زوجيين وبنكتب واحد فردي وواحد زوجي لأنه الفرق بين الفردي والزوجي بعطي فردي" وأيدها الجميع: "آآآه، صح!".

نلاحظ من خلال هذا النقاش أن الطالبات توصّلن إلى "قرار" بكيفية توزيع الأعداد عن طريق وضع عدد فردي وآخر زوجي بالتتابع، وقد فسّرن هذا بأن الفرق بين عددين أحدهما زوجي والآخر فردي يكون فردياً. وكدليل على صحة هذا التفسير، قدمت شيماء مثالاً يدعم قرارهن: "مثلاً بنبدأ ب4 وبعدها3 الفرق بكون 1" وأكملت مرجان: "بعدها بنكمل مثلاً 2، 1"، وتابعت مرجان: "هيك كل الفروق فردية" أي أن شرط السؤال قد تحقق.



بعد ذلك انتقلت الطالبات إلى الفرع التالي فقرأت شيماء: "ماذا تقول عن مجموع أي عددين متصلين؟" وقدمت مرجان الإجابة فقالت: "لازم يكون فردي لأنه العددين المتصلين واحد فردي وواحد زوجي" وقاموا بجمع كل عددين متصلين للتأكد من المجموع لكل عددين متصلين حيث قالت شيماء: "تعالوا نكتب المجموع مشان نتأكد"، كما تبين الصورة أدناه.

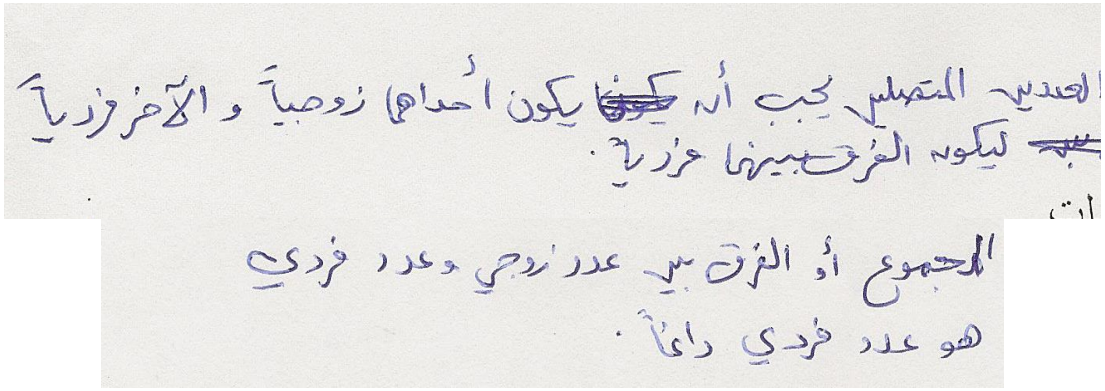


1. 2 تفسير الحديث بين الذاتي:

في النقاش أعلاه، كان جزء من الحديث "حديثاً بين ذاتي" وذلك عندما قالت شيماء: "تعالوا نكتب المجموع مشان نتأكد" فهي تقصد أن يقوموا بكتابة مجموع كل عددين متصلين فكلمة (المجموع) كانت "متفقاً لغوياً" بين الطالبات.

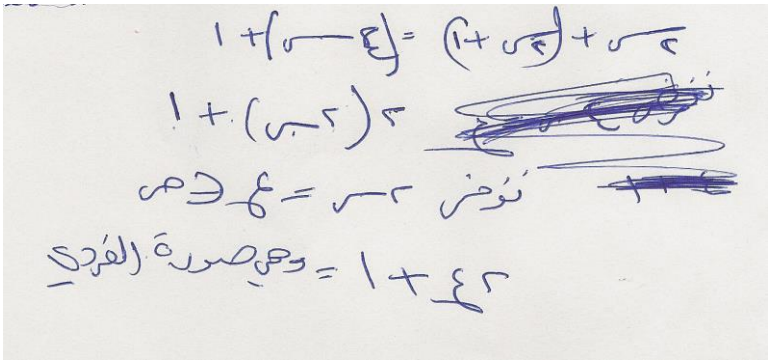
2. التوصل إلى معنى بالاعتماد على شخص عارف:

انتقلت الطالبات في هذه المرحلة إلى الفرع التالي المتعلق بتفسير الظاهرة التي لاحظتها الطالبات، فقرأت مرجان: "إلى ماذا توصلت من هذه الملاحظات؟" وقدمت تسنيم تفسيراً للظاهرة فقالت: "الشرط في السؤال انه الفرق بين المتصلين فردي، وعشان هيك العددين المتصلين أحدهما فردي والآخر زوجي، وهيك بنتج انه مجموع المتصلين كمان فردي" فأيدتها زميلاتها وقلن: "صحيح"، أي أن الطالبات اعتمدن على زميلتهن تسنيم "كشخص عارف" للتوصل إلى معنى وتفسير للظاهرة التي لاحظنها بأنّ المجموع والفرق للعددين المتصلين كان دائماً فردياً وذلك ، كما تبين الصورة أدناه.

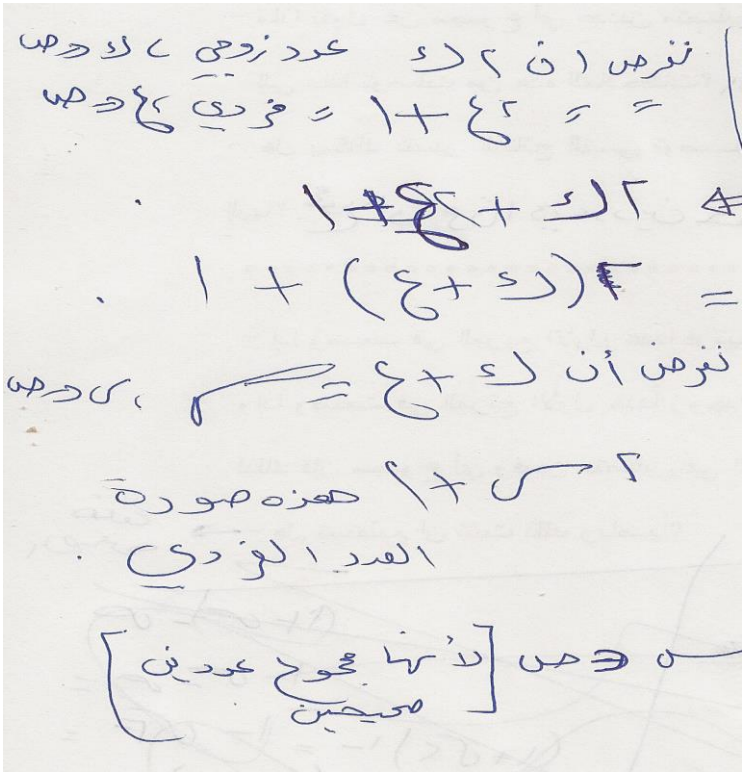


3. التفاوض للتوصل إلى معنى رياضي:

يطلب الفرع الأخير من السؤال إثباتاً رياضياً للملاحظة التي لاحظتها الطالبات، فبعد أن قرأت شيماء: "هل تستطيع أن تثبت ذلك رياضياً؟" تابعت وقالت: "مش فاهمة قصده!!"، أي أنه كان لديها صعوبة من نوع "نقص في الفهم" حسب جوز (1998)، والاستجابة لتلك الصعوبة كانت بإخبار زميلاتها بعدم فهم المقصود وذلك طلباً للمساعدة، فقالت مرجان: "بالرموز"، وكانت هذه الكلمة المفتاح لشيماء لتفهم المطلوب حيث قالت: "آآه.. فهمتها... 2س و 2س+1" وأوضحت تسنيم أن ما توصلت له شيماء صحيح وأيدتها قائلة: "الزوجي 2س والفردي 2س+1 ونجمعهم" وقاموا بجمع 2س+ 2س+ 1 كما تبين الصورة أدناه.



لاحظت الباحثة أن الطالبات لم يوضحن ما هو الرمز (س) الذي استخدمنه فسألت *الباحثة: "ما هو الرمز س؟"* وأجاب الجميع: "عدد صحيح" . ثم سألت الباحثة: *"ولماذا استخدمتم نفس الرمز للفردي والزوجي؟"* فكان هذا السؤال إشارة للطالبات بأن هناك خلل في الرموز المستخدمة حيث قالت مرجان: "لاا، ما بصير نستخدم نفس الرمز لأنه إذا نفس الرمز بكونوا متتاليين وإحنا مش شرط عنا يكونوا متتاليين" وأضافت دعاء وشيماء: "إذاً لازم نستخدم رمزين مختلفين"، وقمن بتعديل الرموز حيث قالت مرجان: "مثلاً نرمز للزوجي 2ك والفردي 2ع+1" وقاموا بعملية الجمع. وكما نلاحظ في الصورة أدناه، استبدلت الطالبات (ك+ع) بالرمز (س) وأوضحن أن س عدد صحيح وذلك لأنه مجموع عددين صحيحين. فمن خلال هذا التفاوض نرى أن المجموعة توصلت للمعنى الرياضي للظاهرة عن طريق جمع الرموز الرياضية لكل من العدد الفردي والعدد الزوجي.



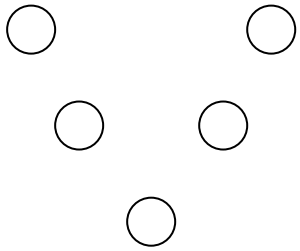
نلخص نتائج المجوعات في السؤال الأول في جدول (3).

جدول(3): تشابه المجموعات المختلفة واختلافها بما يتعلق بتعلمها وتعاونها خلال حل السؤال الثاني.

التشابه	الاختلاف	ملاحظات
– توصلت المجموعات إلى توزيع للأعداد حسب شروط المسألة بسرعة فلم تستغرق وقتاً طويلاً لذلك. – استخدمت المجموعات نفس الرمز "ك" عندما رمزوا للعدد الزوجي بـ 2ك والفردي بـ 2ك+1 – التفاوض هنا خدم المجموعات في بناء ملاحظات حول الظاهرة، ثم محاولة تفسيرها، وكذلك في البحث عن إثبات رياضي من أجل التوصل إلى تفسير للظاهرة.	– واجهت مجموعتا الذكور صعوبة في فهم المقصود من "الإثبات الرياضي" واحتاجوا لطلب المساعدة من الباحثة فاستدرجتهم بالأسئلة حتى فهموا معنى "إثبات رياضي" أي أنه يكون باستخدام الرموز. – المجموعة (أ) من الإناث هي المجموعة الوحيدة التي أعطت اهتماماً لتوضيح ماهية الرمز "ك" المستخدم وذلك بكتابة ك Ǝ ص	– لاحظت الباحثة أن المجموعات لا تعطي اهتماماً لذكر التفصيلات والتوضيحات خلال الحل وكان التعامل مع الرموز كمتفقات لغوية بين أفراد المجموعة الواحدة.

ثالثاً: أحداث تعلم المجموعات خلال حلهم السؤال الثالث

نص السؤال الثالث:



في الشكل المرسوم جانباً، وزع الأعداد من 1 إلى 5 على الدوائر بحيث يكون الذراعان في الشكل V لهما نفس المجموع.

– هل تستطيع إيجاد طريقة أخرى لتوزيع هذه الأعداد؟

– كم عدد الحلول الممكنة لذلك (بكم طريقة مختلفة يمكنك توزيع هذه الأعداد تحت هذه الشروط)؟

- ماذا تلاحظ في جميع الحلول التي أوجدتها؟
- هل يمكنك شرح وتفسير ما تراه؟
- هل بإمكانك إقناعنا أنك قد وجدت جميع الحلول الممكنة؟
- ماذا يحدث إذا استخدمت الأعداد من 2 إلى 6؟
- ماذا الذي يمكنك اكتشافه في شكل V الذي طول كل من ذراعيه هو 4 بدلاً من 3 واستخدمت الأعداد من1 إلى 7؟

1- أحداث تعلم مجموعة (أ) من الذكور (محمد، شريف، زيد، بدر):

حدثت مراحل تعلم الطلاب بالتسلسل الآتي:

1. التفاوض
2. التوصل إلى قرار بكيفية بدء التعلم
3. التفاوض للوصول إلى قرار
4. التفاوض من أجل التوصل إلى تفسير للظاهرة
    4. 1 التفاوض للوصول إلى معنى وتفسير للظاهرة
    4. 2 التفاوض للوصول إلى قرار بالاعتماد على شخص عارف
5. تفسير الحديث بين الذاتي
6. التفاوض من أجل بناء ملاحظات حول السؤال
    6. 1 التفاوض للوصول إلى قرار
    6. 2 التفاوض للوصول إلى اتفاق حول صحة مصطلح
    6. 3 تفسير الحديث بين الذاتي
7. تفاوض بالاعتماد على تجربة سابقة لتوزيع الأعداد من 2إلى 6
    7. 1 التفاوض للوصول إلى قرار بالاعتماد على تجربة سابقة
    7. 2 تفسير الحديث بين الذاتي
8. تفاوض بالاعتماد على تجربة سابقة لتوزيع الأعداد من 1إلى 7
    8. 1 التفاوض للوصول إلى قرار بالاعتماد على تجربة سابقة

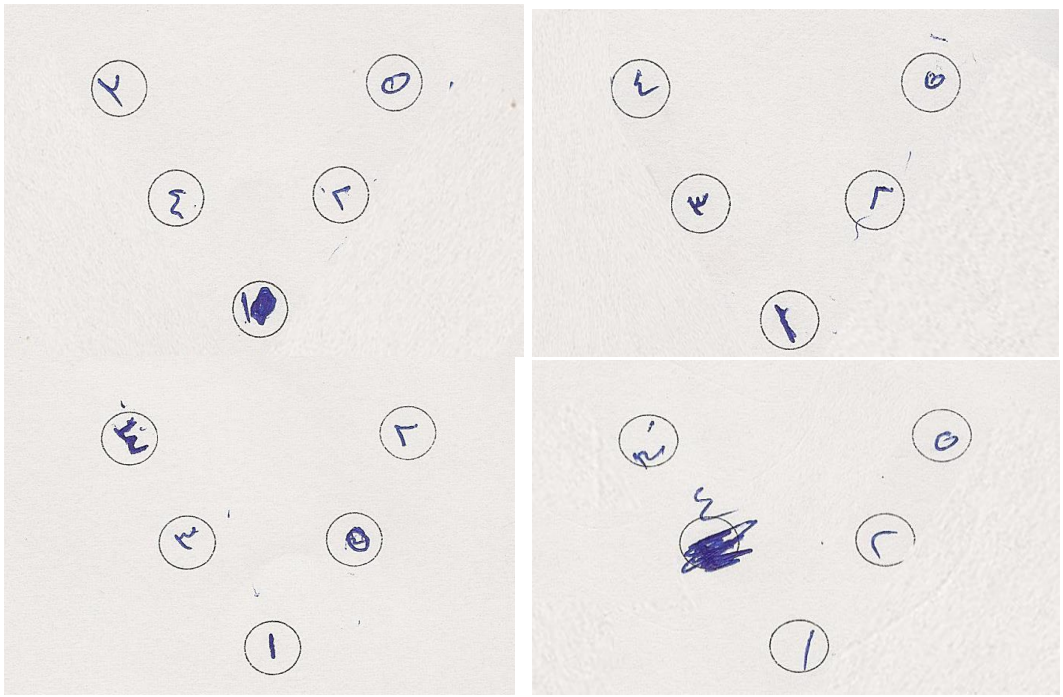
8. 2 موقف عدم تيقن

8. 3 تفسير الحديث بين الذاتي

وفيما يأتي نفصّل هذه المراحل:

1. التفاوض:

بادر محمد لقراءة نص السؤال، وقام كل طالب من المجموعة بتوزيع الأعداد من 1 إلى 5 لوحده خلال فترة قصيرة، المشترك في حلولهم –كما تبين الصور– أنهم وضعوا العدد1عند الرأس، ما يشير إلى إدراك الطلاب بأن العدد الذي نكتبه في الرأس له أهمية خاصة باعتباره مشتركاً بين الذراعين، واختار الطلاب العدد1 لوضعه في الرأس باعتباره العدد الأصغر من مجموعة الأعداد المعطاة فيكون التعامل معه أبسط.



2. التوصل إلى قرار بكيفية بدء التعلم:

في المرحلة التالية، انتقل الطلاب للفرع الآخر من السؤال والذي يطلب منهم البحث عن طريقة أخرى لتوزيع الأعداد حيث قال زيد: جربوا... جربوا... وبدأ الجميع بالتفكير..

نرى أن عمل الطلاب الرياضي في هذا الفرع بدأ بمبادرة من أحد الطلاب بهدف "الوصول إلى قرار" يتعلق بعملهم كي يبحثوا عن طريقة جديدة لتوزيع الأعداد بين الذراعين، القرار هنا أخذ بواسطة "الاعتماد على شخص عارف".

3. التفاوض للوصول إلى قرار:

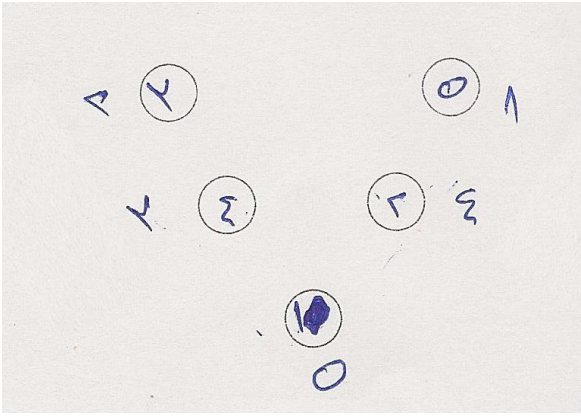
بادر الطالب بدر فقال: "لو كتبنا 5 بالوسط" (مع الإشارة لرأس الحرف V) واستجاب أفراد المجموعة لبدر وبدؤوا بمحاولة توزيع الأعداد على الذراعين مع وضع العدد5 عند الرأس، وبعد فترة قصيرة توصل كل من زيد ومحمد إلى حل وكانا قد توصلا لنفس التوزيع للأعداد، كما يبين النقاش الآتي:

- زيد: لقيت حل... لقيت طريقة ثانية

الجميع التفت له..

- محمد: وأنا كمان.. (وكانت نفس إجابة زيد)
- زيد (يقرأ الأعداد كما وزعها بالترتيب من اليمين لليسار): 1، 4، 5، 3، 2

هون 10 وهون 10.. (مع الإشارة لكل ذراع)



توصل الطلاب هنا إلى "قرار" بإمكانية توزيع الأعداد بطريقة أخرى عند تغيير العدد المكتوب في رأس الشكل V.

4. التفاوض من أجل التوصل إلى تفسير للظاهرة

4. 1 التفاوض للوصول إلى معنى وتفسير للظاهرة:

انتقل الطلاب لمحاولة البحث عن طريقة أخرى لتوزيع الأعداد، حيث اقترح زيد وضع العدد2 عند الرأس، كما يتبين من النقاش التالي:

- زيد: لو جربنا ال 2
- بدر: جربتها... ما زبطت!

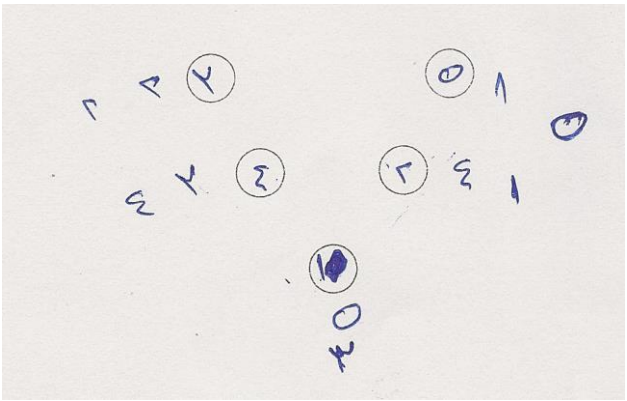
- محمد: طيب!
- بدر: ما بنقدر نعوض بالنص إلا 1 أو 5... بتعرفوا ليش..؟ اسمعوني.. مجموع الأعداد من 1

إلى 5= 15

- الجميع: طيّب...(بانتظار تكملة كلام بدر)
- بدر: إما بنقيم 1 وبضل 14 من المجموع، أو بنقيم 5 وبضل 10 من المجموع، وبنقدر نقسمه بين الذراعين (والجميع ملتفت له بتركيز)
- زيد: ولو قمنا العدد3 بضل12 من المجموع... تعالوا نجرب نكتب 3 عند الرأس (الجميع الآن ملتفت لزيد)

زيد بدأ يجرب مع محمد: نكتب 1،5 مع 2،4

- محمد يجمع الذراع الأول:1و5 =6..مع ال3.. مجموع الجهة اليمين 9
- زيد يجمع الذراع الثاني: 4و2 =6 مع ال3...9 مجموع الجهة اليسار
- بدر: إذاً الأعداد يللي بنقدر نكتبها عند الرأس 1، 3، 5 لأنها هي الفردية
- الجميع: صح!



نلاحظ من خلال هذا "التفاوض"، أن الطلاب توصلوا إلى "معنى للظاهرة وتفسيرها"، وتوصلوا إلى تعميم بأن الأعداد التي يمكن وضعها عند الرأس هي الأعداد الفردية من بين الأعداد المعطاة في السؤال وهي من 1 إلى 5، وقدموا تفسيراً لهذا بأن مجموع الأعداد من 1إلى 5 هو فردي، لذلك كان عليهم وضع عدد فردي عند الرأس لأنه مشترك بين الذراعين، وبعد وضع عدد فردي يبقى المجموع زوجياً، أي أن الأعداد التي لم توزَّع بعد مجموعها زوجي فيمكن توزيعها بين الذراعين.

4. 2 التفاوض للوصول إلى قرار بالاعتماد على شخص عارف:

في هذه المرحلة حاول زيد وضع عدد زوجي عند الرأس، فقال: " خلونا نجرب ال4"، ودار النقاش الآتي:

- بدر: مش رح نلاقي غيرهم... لازم نقيم عدد فردي وبضل عنا مجموع زوجي مشان نقدر نوزعه بين الذراعين... إذا قمنا ال4 رح يبقى عنا من المجموع 11 وما بيقسم على2... عنّا ذراعين، وعشان هيك يجب أن يكون المجموع زوجي حتى نقسمه على2
- الجميع: صح.. صح
- زيد: ولو قمنا ال 2 بضل عنا 13.. وما بيقسم على2...صحيح..صحيح
- محمد: إذاً ما في غيرهم

من خلال هذا التفاوض، توصل أفراد المجموعة إلى "قرار" بأنه لا يمكن حل السؤال بوضع عدد زوجي عند الرأس، وهذا القرار كان بالاعتماد على "شخص عارف" وهو بدر.

5. تفسير الحديث بين الذاتي:

أثناء مرحلتي التفاوض للوصول إلى قرار والتفاوض للوصول إلى معنى وتفسير للظاهرة، كان بعض حديث الطلاب "حديثاً بين ذاتياً"، حيث استخدم الطلاب متفقاً لغوياً بينهم، فمثلاً عندما قال بدر: "لو كتبنا 5 بالوسط" المقصود منها كتابة العدد5 عند رأس الحرفV، كلمة بالوسط كانت "متفقاً لغوياً" بينهم.

وكذلك بعدما وضع زيد الرأس 5، قرأ الأعداد كما وزعها بالترتيب من اليمين لليسار: 1، 4، 5، 3، 2 وقال "هون 10 وهون 10.." والمقصود هنا كان مجموع الذراع الأيمن 10 وكذلك مجموع الذراع الأيسر 10. وعندما قال زيد: "لو جربنا ال 2" فكان المقصود وضع العدد 2 عند الرأس.

وكلمة (بالنص) في قول بدر "ما بنقدر نعوض بالنص إلا 1 أو 5" معناها رأس الشكلV. وكذلك في قوله "لازم نقيم عدد فردي وبضل عنا مجموع زوجي مشان نقدر نوزعه بين الذراعين" فيقصد بـ (لازم نقيم عدد فردي) أن يضعوا عدداً فردياً عند رأس الشكلV. وعندما قال زيد: "ولو قمنا ال 2

بضل عنا 13.. وما بيقسم على2" يقصد أنهم لو وضعوا العدد 2 عند الرأس فيكون مجموع الأعداد المتبقية هو 13.

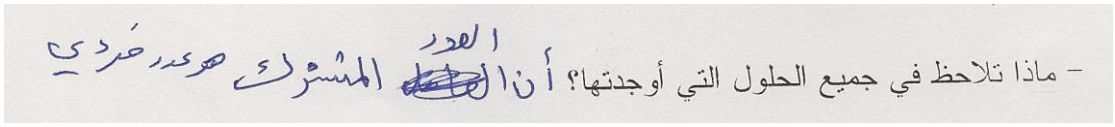
6. التفاوض من أجل بناء ملاحظات حول السؤال

6. 1 التفاوض للوصول إلى قرار:

في هذه المرحلة، بادر بدر لقراءة الفرع التالي: ماذا تلاحظ في جميع الحلول التي أوجدتها؟

حيث دار التفاوض الآتي:

- بدر: أن العدد فردي...
- زيد: العامل المشترك فردي
- محمد: كلهم العامل المشترك فردي...



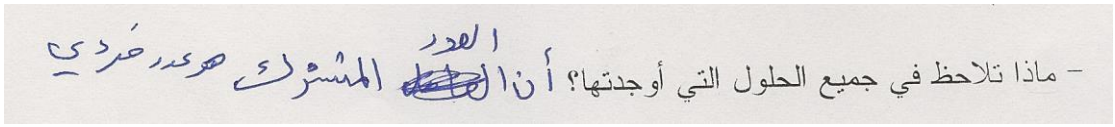
من خلال هذا التفاوض، نلاحظ أن الطلاب توصلوا إلى "قرار" حول جميع الحلول التي أوجدوها.

6. 2 التفاوض للوصول إلى اتفاق حول صحة مصطلح:

خلال مرحلة التفاوض للوصول إلى قرار، تفاوض الطلاب حول مصطلح (العامل المشترك) حيث أنهم عندما دونوا (أن العامل المشترك هو عدد فردي)، انتبه زيد إلى أن هذا المصطلح غير صحيح وقال أنه عليهم استخدام مصطلح العدد المشترك، كما يتبين من النقاش التالي:

- زيد: مش العامل المشترك ..العدد المشترك
- الجميع: آه، العدد المشترك

وأخذوا يصححون الإجابة مع استعمال كلمة العدد المشترك، وحذفوا كلمة عامل ووضعوا مكانها كما تبين الصورة أدناه:



6. 3 تفسير الحديث بين الذاتي:

أثناء مرحلة التفاوض للتوصل إلى قرار، كان جزء من حديثهم "بين ذاتي" حيث استخدموا مصطلح "عامل مشترك" قاصدين بذلك "العدد المشترك" بين الذراعين وهو الرأس، أي أن مصطلح "عامل مشترك" كان "متفقاً لغوياً" بينهم.

7. تفاوض بالاعتماد على تجربة سابقة لتوزيع الأعداد من 2 إلى 6

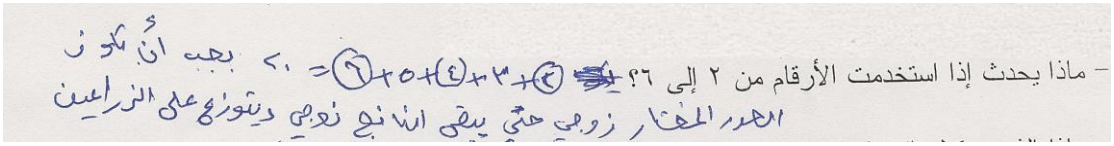
7. 1 التفاوض للوصول إلى قرار بالاعتماد على تجربة سابقة:

اعتمد الطلاب في هذه المرحلة على "تجربتهم السابقة" في الفرع السابق كي يوزعوا الأعداد من 2 إلى 6 واستخدموا نفس الطريقة للحل، حيث اتخذوا "قراراً" بأن الأعداد التي يمكن وضعها عند الرأس هي الأعداد الزوجية، كما يبين النقاش الآتي:

- محمد: 2+ 3 +4 +5 + 6 =..

الجميع أخذ يجمع..

- شريف: 20.. زوجي!
- بدر: مجموعهم 20.. بنقيم أي عدد زوجي.. 2، وال4، وال6
- الجميع: طيّب..
- بدر: مثلاً بنقيم ال2.. بضل عنا 18 وبنقسمها على2 بطلع 9
- محمد: آه صح، لما يكون المجموع زوجي، العدد المشترك لازم يكون زوجي
- زيد: إذاً بنجرب 2، 4، 6



نلاحظ أن القرار هنا كان "قراراً بالاعتماد على تجربة سابقة" وكذلك "بالاعتماد على شخص عارف" وهو زميلهم بدر.

7. 2 تفسير الحديث بين الذاتي:

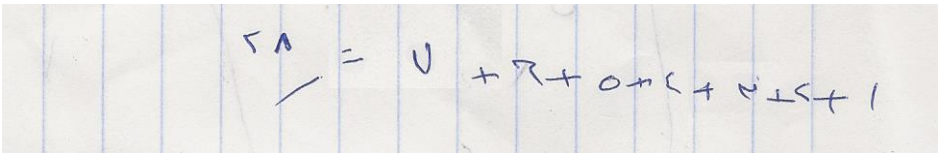
خلال مرحلة التفاوض السابقة، نلاحظ أن الطلاب دونوا (يجب أن يكون العدد المختار زوجي) وهم يقصدون بذلك العدد المكتوب عند رأس الشكل V أي العدد المشترك بين الذراعين.

8. تفاوض بالاعتماد على تجربة سابقة لتوزيع الأعداد من 1 إلى 7

8. 1 التفاوض للوصول إلى قرار بالاعتماد على تجربة سابقة:

في هذه المرحلة انتقل الطلاب إلى الفرع الأخير من السؤال الذي يطلب توزيع الأعداد من 1 إلى 7 باستخدام شكلV يكون طول ذراعه4 بدلاً من3.

اعتمد الطلاب على "ملاحظاتهم من تجاربهم السابقة" فقاموا بجمع الأعداد ووجدوا أن المجموع زوجي وهو 28.

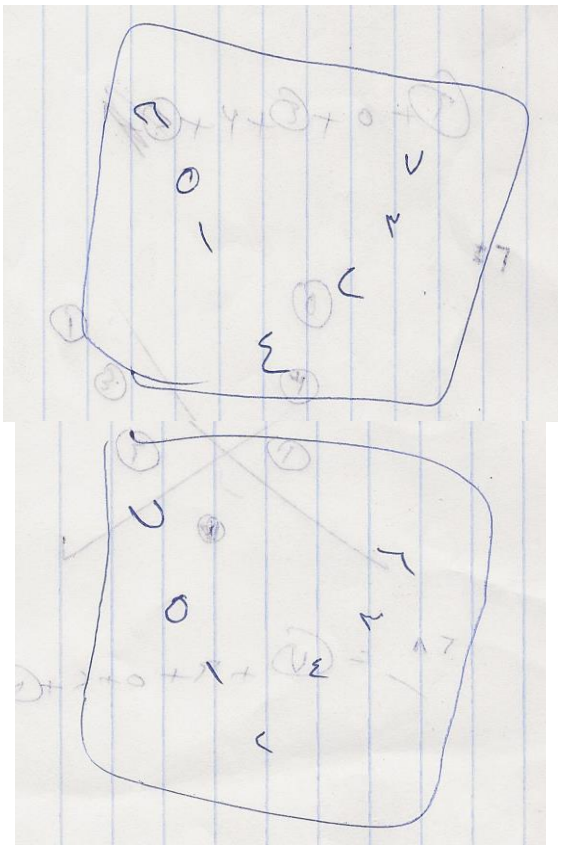


ثم دار النقاش الآتي:

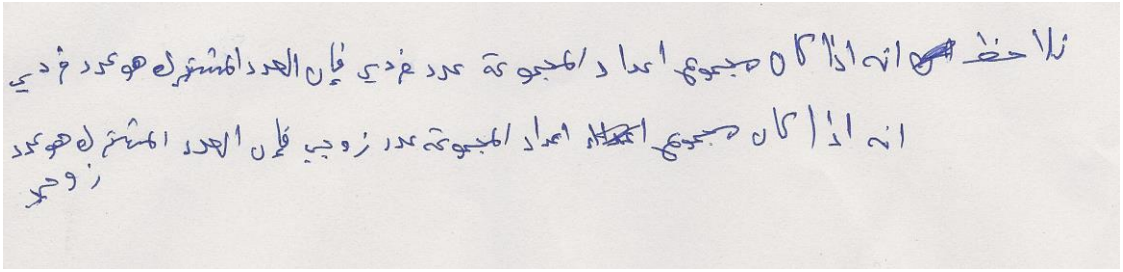
– محمد: بما أنه زوجي لازم الرأس زوجي، صح؟

– الجميع: آه

أي أنهم توصلوا إلى اتفاق بوضع عدد زوجي عند الرأس، ونجحوا فعلاً بتوزيع الأعداد بين الذراعين مع وضع الأعداد 2، 4، 6 عند الرؤوس.



في نهاية مرحلة التفاوض قال زيد: "عندما يكون المجموع فردي.. يكون العامل المشترك فردي، وعندما يكون مجموع الأعداد زوجي.. يكون العامل المشترك زوجي". وكتبوا هذه الملاحظة على الورقة (مع استبدال كلمة عامل بعدد).



نلاحظ أن الطلاب توصلوا إلى تعميم للظاهرة بأنه إذا كان مجموع الأعداد المعطاة زوجياً فيجب وضع عدد زوجي عند الرأس، وإذا كان مجموع الأعداد المعطاة فردياً فيجب وضع عدد فردي عند الرأس.

8. 2 موقف عدم تيقن:

نلاحظ خلال التفاوض السابق أن محمد كان "غير متيقن" من صحة ما يقول حيث طلب من زملائه تأكيداً لصحة كلامه حيث قال: "بما انه زوجي لازم الرأس زوجي، صح؟"

8. 3 تفسير الحديث بين الذاتي:

نلاحظ من تفاوض الطلاب السابق أنهم استخدموا مصطلح (العامل مشترك) أثناء نقاشهم، إلا أنهم عندما دونوا الملاحظة استخدموا (العدد المشترك) ما يدل أن (العامل المشترك) كان "متفقاً لغوياً" بينهم.

2- أحداث تعلم مجموعة (ب) من الذكور (حكمت، مجدي، مهدي، وليد):

حدثت مراحل تعلم الطلاب بالتسلسل الآتي:

1. التفاوض من أجل توزيع الأعداد على الشكلV
   1. 1 التفاوض للتوصل إلى قرار
1. 2 تفسير الحديث بين الذاتي
2. موقف عدم تيقن
3. التفاوض من أجل إيجاد توزيع آخر للأعداد

3. 1 التفاوض للتوصل إلى قرار

3. 2 تفسير الحديث بين الذاتي

4. التفاوض لإيجاد علاقة بين الحلول التي وجدها الطلاب

4. 1 التفاوض للتوصل إلى معنى

4. 2 تفسير الحديث بين الذاتي

5. التفاوض من أجل تفسير الملاحظات التي توصل لها الطلاب

5. 1 التفاوض للتوصل إلى قرار ومعنى

5. 2 موقف عدم تيقن

6. التوصل إلى قرار بالاعتماد على تجربة سابقة

7. التفاوض للتوصل إلى معنى

8. التوصل إلى قرار بالاعتماد على تجربة سابقة

9. موقف عدم تيقن

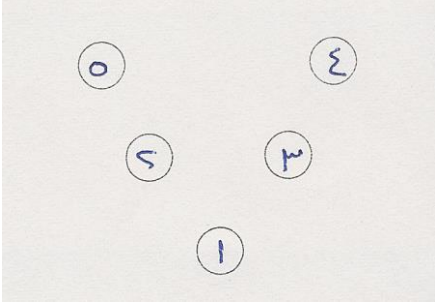
وفيما يأتي نفصّل هذه المراحل:

1. التفاوض من أجل توزيع الأعداد على الشكلV

1. 1 التفاوض للتوصل إلى قرار:

بدأ الطلاب هنا بالتفاوض للتوصل إلى توزيع للأعداد على الشكل حسب شرط السؤال، فبعد أن قام مهدي بقراءة السؤال بصوت مرتفع قال حكمت: خلونا نكتب 1 هون (مشيراً لرأس الشكل V) وأخذوا فترة من الوقت وهم يتناقشون ويجربون ويبدلون مواقع الأعداد بين الذراعين.. بعد ذلك قال حكمت: "5 و2" (مشيراً للذراع الأيسر)، وقال مجدي: "و4 و3" (مشيراً للذراع الأيمن).

ثم قال مهدي: "إذاً من كل جهة 8" بعد أن قام بجمع الأعداد في الذراعين.



نلاحظ من خلال هذا التفاوض أن الطلاب توصلوا إلى "قرار" بأن الأعداد 4، 3، 1، 2، 5 من اليمين لليسار تحقق شرط السؤال.

2. 2 تفسير الحديث بين الذاتي:

في التفاوض السابق، كان هناك حديث بين ذاتي، فعندما قال مهدي: "إذاً من كل جهة 8"، فالمقصود أن مجموع الأعداد في كل ذراع هو 8، فكلمة (جهة) كانت "متفقاً لغوياً" بينهم لتدل على ذراع الشكلV.

3. موقف عدم تيقن:

انتقل الطلاب في هذه المرحلة للفرع التالي حيث قال – حكمت: "هل نستطيع إيجاد طريقة أخرى؟"

خلال هذه المرحلة، كان هناك صعوبة في فهم المطلوب من السؤال أي صعوبة من نوع "نقص في الفهم والتقدم" حسب جوز (1998) وكانوا "غير متيقنين" من المقصود منه، فبعد أن قرأ حكمت السؤال، قال وليد: "نرتبها باستخدام شكل غير شكل الحرف V"، لكن حكمت خالفه قائلاً: "لا.. بنغير ترتيب الأعداد على نفس الشكل"، إلا أن مهدي وافق وليد فقال: "لا.. نستخدم شكل غير الشكل V!!".

نلاحظ أنهم اختلفوا في تفسير المقصود من السؤال والاستجابة لهذه الصعوبة كانت بالتوجه إلى شخص عارف وهو الباحثة، كما يتبين من النقاش أدناه:

– حكمت: نغير الترتيب.. صحيح؟

– *الباحثة: نعم*

– مهدي: إذاً نفس الأعداد بنوزعها بطريقة أخرى على نفس الشكل

نرى أن الطلاب في نهاية موقف "عدم التيقن"، اتخذ الطلاب "قراراً" بأن السؤال يطلب توزيع الأعداد بطريقة مختلفة دون تغيير الشكل المعطى.

3. التفاوض من أجل إيجاد توزيع آخر للأعداد

3. 1 التفاوض للتوصل إلى قرار:

بعد ذلك أخذوا فترة من الوقت وهم يحاولون البحث عن توزيع آخر للأعداد مع بقاء العدد1 عند الرأس ولم ينجحوا في ذلك، فقال مهدي: "ما في طريقة غير اللي لقيناها" وللتغلب على هذه الصعوبة، توجهوا للباحثة وقال مهدي ووليد للباحثة: "ما لقينا غيرها!!"

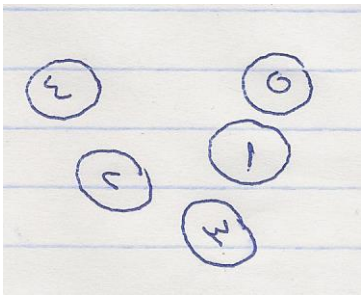
- *الباحثة: هل جربتم تغيير العدد عند الرأس؟*
- الجميع: آآآآآه..

نرى من هذا النقاش أن الطلاب أدركوا أن عليهم تغيير طريقة الحل، فقال مهدي: "تعالوا نجرب ال 2 عند الرأس.. لأننا جربنا ال1.. نجرب اللي بعده" فقدم وليد اقتراحاً: "هون 5 و4.. بالإشارة لأحد الذراعين" إلا أن مجدي رد عليه: "ما بدنا نكتب عددين كبار بنفس الجهة لأنه المجموع رح يكون كبير فيها والجهة الثانية صغيرة!"

نرى من هذا النقاش، أن مجدي نبه زملاءه إلى أن الأعداد الكبيرة يجب توزيعها بين الذراعين.

بعدها أخذوا فترة طويلة نسبياً ولم يستطيعوا توزيع الأعداد بين الذراعين مع بقاء الرأس2، فقال حكمت: "تعالوا نجرّب الـ3"، أي أنهم اتخذوا "قراراً" بتغيير العدد عند الرأس، وبدؤوا يحاولون وبعد وقت قليل:

- مهدي: 3 و2 و4.. شو جوابهم؟
- مجدي:9 وبضل 5 و1و 3 جوابهم كمان 9
- الجميع: طلعت!



تميزت مرحلة التفاوض هنا بالبحث أكثر من مرة عن حل للسؤال، فقاموا أكثر من مرة "بتغيير طريقة الحل" للتغلب على الصعوبة التي تواجههم.

3. 2 تفسير الحديث بين الذاتي:

في التفاوض السابق، كان جزء من حديث الطلاب "بين ذاتي" فكان هناك "متفقات لغوية" فيما بينهم، فعندما قال حكمت: "تعالوا نجرّب الـ3" كان يعني بذلك أن يجربوا وضع العدد عند رأس الشكل.

وعندما قال مهدي: "3 و2 و4.. شو جوابهم؟" كان يقصد (ما مجموع هذه الأعداد) وفهم زملاءه ما يقصده حيث أجابه مجدي: "9 وبضل 5 و1و 3 جوابهم كمان 9".

4. التفاوض لإيجاد علاقة بين الحلول التي وجدها الطلاب

4. 1 التفاوض للتوصل إلى معنى:

انتقل الطلاب في هذه المرحلة للبحث عن حل جديد، حيث قال حكمت: "تعالوا نجرب نلاقي كمان طريقة، تعالوا نجرب ال5 لأنه ال1 وال3 زبطوا وهما فرديين".

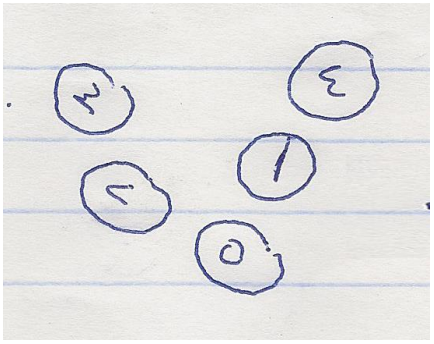
نرى هنا أن حكمت توصل إلى "ملاحظة" قد تفيد المجموعة في تفسير الظاهرة وهي أن الأعداد الفردية في هذا السؤال هي التي يمكنهم وضعها عند الرأس بحيث يتساوى مجموع الذراعين.

- مهدي: جربتها قبل شوي.. وما زبطت معي!
- حكمت: تعالوا نشوفها مع بعض؟!

وأخذوا ينظرون للورقة التي جرب عليها مهدي ويتناقشون بها.. ويبدلون مواقع الأعداد، متوقعين أن تبديل مواقع الأعداد مع الاحتفاظ بالعدد5 عند الرأس سيقدم حلاً جديداً لأن العدد5 هو عدد فردي مثلما نجحوا في الحل عندما كان الرأس1، 3. بعد ذلك:

- مهدي: نكتب ال4 و 1على الجهة الأولى..
- مجدي: آه، 3 و2 على الجهة الثانية
- حكمت: إذاً خلونا نرسمها.. 4+ 1 = 5 و 3 +2 =5

إذاً عنا ثلاث طرق.



نرى أن الطلاب بعدما نجحوا في إيجاد هذا الحل، توصلوا إلى "قرار" بأن هناك ثلاثة حلول.

4. 2 تفسير الحديث بين الذاتي:

في النقاش السابق، كان جزء من حديث الطلاب "حديثاً بين ذاتي"، فعندما قال مهدي: "نكتب ال4 و 1على الجهة الأولى" فهو يقصد بكلمة (الجهة الأولى) الذراع الأول، أي أنها كانت "متفقاً لغوياً" بينهم، حيث رد مجدي عليه قائلاً: "آه، 3 و2 على الجهة الثانية" قاصداً الذراع الأيسر.

5. التفاوض من أجل تفسير الملاحظات التي توصل لها الطلاب

5. 1 التفاوض للتوصل إلى قرار ومعنى:

بعد أن توصل الطلاب إلى قرار بأن العدد عند الرأس يجب أن يكون فردياً كما يبين النقاش:

- حكمت: العدد اللي بيوصل بين الذراعين لازم يكون فردي
- الجميع: صحيح

- ماذا تلاحظ في جميع الحلول التي أوجدتها؟ العدد الذي يوصل بين الذراعين فردي .

انتقلوا إلى محاولة تفسير هذه الملاحظة، وبعد أن تناقشوا وأخذوا وقتاً للتفكير، قدم مهدي بداية التفسير كما يتبين النقاش الآتي:

- مهدي: اسمعوني .. مجموع الأعداد 1+ 2 +3 +4 +5 = 15 وهو فردي

ولما نكتب عدد فردي عند الرأس.. كم بضل عنا من ال15؟

- حكمت: فردي- فردي= زوجي
- مجدي: آه.. والزوجي بنقسمه على الذراعين لأنه بيقسم على 2.. صحيح؟؟
- الجميع: صحيح!

نرى من هذا النقاش أن مهدي أعطى الإشارة لزملائه "للوصول إلى معنى وتفسير للظاهرة"، حيث بيّن لهم أن هناك علاقة بين مجموع الأعداد المطلوب توزيعها والرأس، وتفاعل معه زملاؤه حيث أكمل مجدي التفسير حين قال: "آه.. والزوجي بنقسمه على الذراعين لأنه بيقسم على 2.. صحيح؟؟" وأيده الجميع في ذلك.

وخلال نقاشهم للتوصل إلى معنى، توصل الطلاب إلى "قرار" بأنه لا يمكن وضع عدد زوجي عند الرأس حيث أكملوا نقاشهم:

- حكمت: عشان هيك ما بصير نكتب زوجي عند الرأس.. لأنه 15 – عدد زوجي= فردي
- وليد: صح، والفردي ما بنقدر نوزعه على الذراعين لأنه ما بيقسم على 2

ثم توصلوا إلى "قرار" بأنهم أوجدوا كل الحلول:

- مجدي: إذاً لقينا كل الحلول..
- مهدي: صح! لأنه عنا ثلاث أعداد فردية..1، 3، 5

5. 2 موقف عدم تيقن:

عندما قال مجدي: "آه.. والزوجي بنقسمه على الذراعين لأنه بيقسم على 2.. صحيح؟؟" نرى أنه كان "غير متيقن" فطرح المعلومة بنبرة تساؤل ثم سأل (صحيح؟؟) وكان ينتظر التأييد والموافقة من زملائه.

6. التوصل إلى قرار بالاعتماد على تجربة سابقة:

عندما انتقلت المجموعة للفرع التالي، قرأ وليد: "ماذا يحدث لو استخدمنا الأعداد من 2 إلى 6؟" "اعتمدوا على تجربتهم السابقة" في الفرع السابق، فبعد قراءة السؤال بدؤوا بجمع الأعداد من 2 إلى 6، ووجدوا الناتج زوجي، فتوصلوا إلى "قرار" بأن العدد المشترك بين الذراعين (الرأس) هنا يجب أن يكون زوجياً، كما يبين النقاش الآتي:

- حكمت: مجموع الأعداد من 2 إلى 6 هو...

$$20 = 6+5+4+3+2$$

- مهدي: زوجي..

– مجدي: إذاً الرأس لازم يكون زوجي

– *الباحثة: لماذا؟*

– حكمت: لأنه لما كان مجموع الأعداد فردي كان الرأس فردي، وهون المجموع زوجي، عشان هيك بنكتب عدد زوجي عند الرأس.

7. التفاوض للتوصل إلى معنى:

نلاحظ من النقاش الآتي أن المجموعة "توصلت إلى معنى للظاهرة" عن طريق تقديم تفسير لقرارهم بوضع عدد زوجي عند الرأس:

– وليد: لما نكتب عدد زوجي عند الرأس.. 20 – زوجي

– حكمت: زوجي.. عشان هيك بنقدر نوزع الأعداد الأخرى بين الذراعين

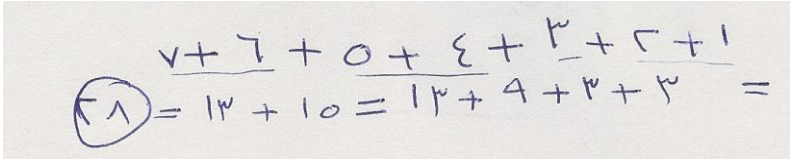
– *الباحثة: ماذا لو وضعتم 3 مثلاً عند الرأس؟*

– مهدي: 20–3= 17.. فردي، لا يقسم على2

– مجدي: عشان هيك ما بنقدر نكتب عدد فردي عند الرأس هون

8. التوصل إلى قرار بالاعتماد على تجربة سابقة:

بعد أن قرأ حكمت: "ما الذي يمكنك اكتشافه في شكل V الذي طول كل من ذراعيه هو4 بدلاً من 3 واستخدمت الأعداد من 1 إلى 7؟" اعتمد الطلاب على "تجربتهم في الفروع السابقة" وسلكوا الطريق نفسه للحل، فقاموا بجمع الأعداد من 1 إلى 7، حيث قال وليد: "تجمعهم بالأول!" وبدأ يجمع بصوت مرتفع والجميع يتابع معه.



فوجدوا أن ناتج الجمع هو28 وهو عدد زوجي، وبناءً على ذلك، اتخذوا "قراراً" بأن الرأس هنا يجب أن يكون زوجياً، كما يتبين من النقاش الآتي:

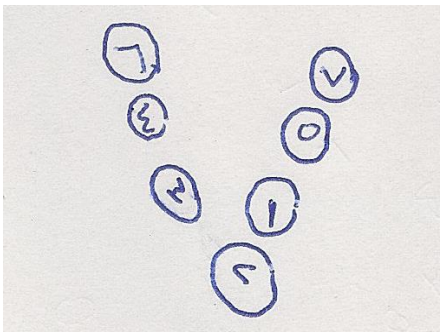
– وليد: زوجي..

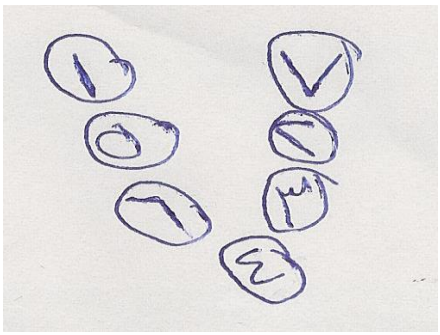
– حكمت: إذاً الرأس لازم زوجي

– مجدي: يعني الرأس لازم يكون 2 أو 4 أو 6 لأنها هي الزوجية هون

- الجميع: صحيح

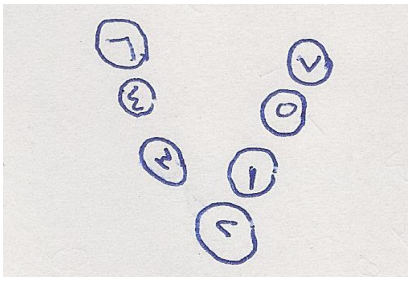
وقاموا بتجربة وضع الرأس 2، 4 للتأكد، ونجحوا بتوزيع الأعداد بين الذراعين بحيث يكون مجموعهما متساوياً.





9. موقف عدم تيقن:

عندما حاول الطلاب توزيع الأعداد بين الذراعين مع وضع الرأس 2 كونه عدداً زوجياً، حيث قال حكمت: "تعالو نجرب ال2.." فقال مهدي بنبرة تساؤل: "28-2= 26... إذاً كل ذراع لازم يكون 13؟؟" أي أنه كان "غير متيقن" من صحة ما يقول، فأجابه حكمت: "آه.. صحيح" فقاموا بمحاولة توزيع الأعداد ونجحوا بعد دقائق بتوزيعها كما في الصورة أدناه.



3- أحداث تعلم مجموعة (أ) من الإناث (بيان، أماني، ميس، أزهار):

حدثت مراحل تعلم الطلاب بالتسلسل الآتي:

1. اتخاذ قرار بكيفية بدء التعلم
2. البحث عن توزيع للأعداد بين الذراعين بحيث يتساوى مجموع أعدادهما
    2. 1 التوصل إلى قرار
    2. 2 التجريب للتوصل إلى قرار
    2. 3 تفسير الحديث بين الذاتي
3. التفاوض للتوصل إلى معنى

4. التفاوض من أجل إيجاد توزيع للأعداد من2 إلى6 بين الذراعين بحيث يتساوى مجموع أعدادهما

4. 1 التوصل إلى قرار بالاعتماد على تجربة سابقة

4. 2 تفسير الحديث بين الذاتي

5. التفاوض للتوصل إلى قرار بالاعتماد على تجربة سابقة

6. البحث عن توزيع للأعداد من1 إلى7 بين الذراعين بحيث يتساوى مجموع أعدادهما

6. 1 التفاوض للتوصل إلى معنى

6. 2 التوصل إلى قرار بالاعتماد على شخص عارف

6. 3 تفسير الحديث بين الذاتي

7. البحث عن تفسير للملاحظات التي قامت الطالبات ببنائها

7. 1 التوصل إلى معنى للظاهرة

7. 2 تفسير الحديث بين الذاتي

وفيما يأتي نفصّل هذه المراحل:

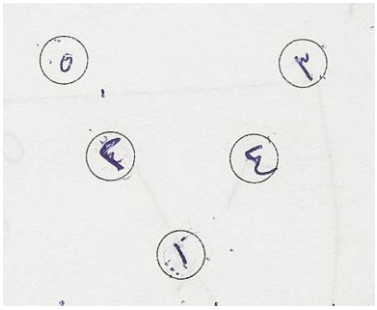
1. اتخاذ قرار بكيفية بدء التعلم:

بعد أن قرأت الطالبات نص السؤال، قالت ميس: "تعالوا نحاول توزيعها" وأخذت كل منهن تجرّب توزيع الأعداد ووضع أعداد مختلفة عند الرأس عشوائياً، أي أن الطالبات لم تحدد عدد معين لتجريب وضعه عند الرأس.

2. البحث عن توزيع للأعداد بين الذراعين بحيث يتساوى مجموع أعدادهما

2. 1 التوصل إلى قرار:

بعد مرور فترة من التجربة، وجدت بيان مجموعتين من الأعداد المطلوب توزيعها بحيث يعطي كل منها مجموعاً يساوي 8 ، حيث قالت: "هيها.. 3 ، 4 ، 1 = 8 و 5 ، 2 ، 1 = 8" وأضافت ميس: "إذاً 1 عند الرأس لأنه مشترك"، نرى أن المجموعة توصلت إلى "قرار" بوضع العدد 1 عند الرأس لأنه مشترك بين المجموعتين التي وجدتهم بيان، كما يتضح من الصورة أدناه.

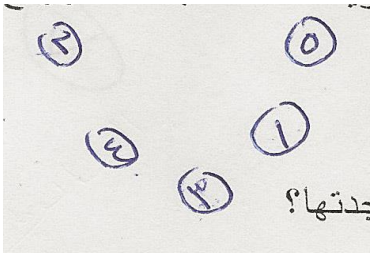


2. 2 التجريب للتوصل إلى قرار:

بعد أن نجحت المجموعة في توزيع الأعداد بين الذراعين، انتقلت إلى الفرع التالي الذي يطلب إيجاد توزيع آخر للأعداد، دعت بيان لتجريب توزيع الأعداد بين الذراعين مع وضع العدد2 عند الرأس فقالت: "نحاول مع العدد 2"، وكانت أحد المحاولات محاولة أزهار حيث قالت: "4 ، 3 ، 2 = 9، 1 ، 5 ، 2 = 8 الفرق بين الذراعين 1 !! ما زبطت!"

وبعد عدة محاولات، شعر الجميع بصعوبة الأمر وأنه لا يمكن وضع 2 عند الرأس مع تحقق شرط السؤال، لكن لم يعطِ أحدهم تبريراً لذلك.

نرى هنا أن المجموعة واجهت صعوبة من نوع "نقص في التقدم في الحل" حسب جوز (1998)، والاستجابة لهذه الصعوبة كانت اتخاذ المجموعة "قراراً" بتغيير طريقة الحل حيث دعت أماني زميلاتها إلى تجريب وضع العدد 3 عند الرأس فقالت: "تعالوا نجرب ال3 عند الرأس" وقال الجميع: "طيب!"، وبعد قليل قالت بيان: "3 + 1 + 5 = 9 ، 3 + 4 + 2 = 9 زبطت!"



2. 3 تفسير الحديث بين الذاتي:

في التفاوض السابق، كان حديث بيان "بين ذاتي" عندما قالت: "نحاول مع العدد2" فهي تقصد من ذلك أن تحاول المجموعة توزيع الأعداد بين الذراعين مع وضع العدد2 عند رأس الشكل V.

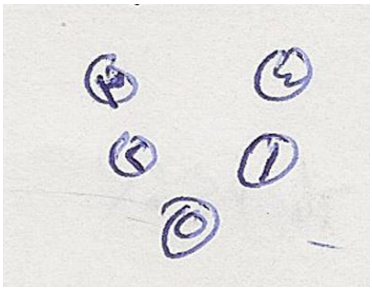
3. التفاوض للتوصل إلى معنى:

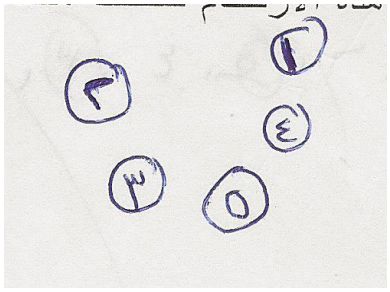
بعد أن نجحت الطالبات في توزيع الأعداد بين الذراعين مع وضع العدد3 عند الرأس، ظهرت أول ملاحظة عن طريق الطالبة ميس حين قالت: "تعالوا نجرب ال5 !!" ودار النقاش التالي:

– *الباحثة: لماذا 5 وليس 4 ؟!!*

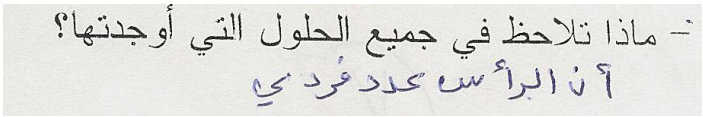
– ميس: شكله الأعداد الفردية اللي بصير نحطها عند الرأس!! لأنه ال1 و 3 فرديات

وبدأن بمحاولة وضع العدد 5 عند الرأس وتجريب توزيع الأعداد، وبعد المحاولة، وجدت كل من أماني وبيان توزيعاً للأعداد بين الذراعين كما تبين الصورتان:





أي أن توقع ميس بإمكانية توزيع الأعداد مع وضع العدد5 عند الرأس كان صحيحاً، وتوصلن إلى ملاحظة أن العدد عند الرأس يجب أن يكون فردياً.



وقد كتبت الطالبات هذه الملاحظة دون محاولة توزيع الأعداد مع وضع العدد4 عند الرأس، ولم يقدمن أي تفسير لعدم نجاحهن في وضع عدد زوجي عند الرأس، واعتمدت الطالبات على التجربة فقط، كما يبين النقاش الآتي:

– *الباحثة: "لماذا لم تجربوا وضع 4 عند الرأس؟"*

– أماني: ما رح ينجح لأنه زوجي!

– *الباحثة: لماذا الزوجي لا ينجح؟*

– الجميع: جرّبنا!!

وعندما طلبت الباحثة من الطالبات تبرير ملاحظتهن، فكرت الطالبات فترة من الوقت، وبعد ذلك دار تفاوض بين الطالبات توصلت الطالبات من خلاله إلى (تفسير خاطئ) وأجمعت عليه جميع الطالبات كما يتضح من النقاش التالي:

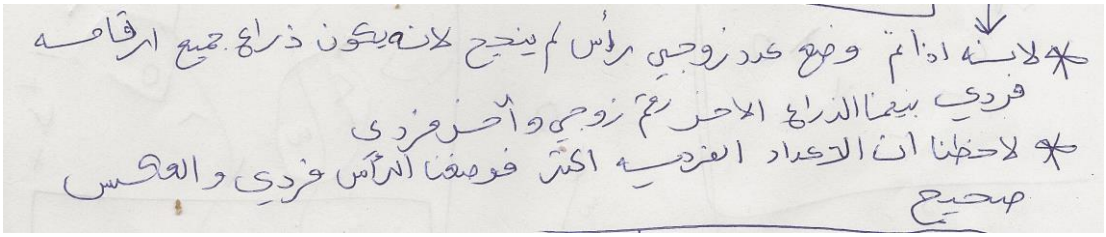
– أزهار: عنا خمس أعداد ثلاثة فرديات واثنين زوجيات.. عشان هيك الرأس لازم فردي

– أماني: لو وضعنا عدد زوجي عند الرأس ما بنقدر نوزع الأعداد الفردية والزوجية

بالتساوي بين الذراعين

- أزهار: بنوضع فردي عند الرأس بيضل فرديين وزوجيين ونوزعهما على الذراعين
- بيان: يعني بنوزع الأعداد الفردية والزوجية بين الذراعين بالتساوي، وكل ذراع فيه واحد فردي وواحد زوجي غير الرأس
- الجميع: آه!

وقاموا بتدوين هذا التفسير الخاطئ كما تبين الصورة:

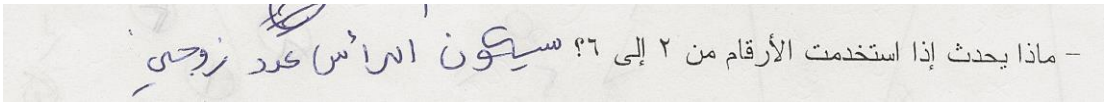


لكن الباحثة تركت الطالبات يكتبن ذلك رغم عدم صحته؛ لأن الطالبات سيلاحظن في الفروع اللاحقة أن هذا التفسير خاطئ.

4. التفاوض من أجل إيجاد توزيع للأعداد من 2 إلى 6 بين الذراعين بحيث يتساوى مجموع أعدادهما

4. 1 التوصل إلى قرار بالاعتماد على تجربة سابقة:

عندما انتقلت الطالبات للفرع التالي (ماذا يحدث إذا استخدمت الأعداد من 2 إلى 6 ؟) اعتمدن على "تجربتهن في الفرع السابق" حيث قالت أزهار: "هون عنا 3 أعداد زوجية 2 ، 4 ، 6 واثنين فرديات 3، 5" وقالت جميع الطالبات: "إذاً الرأس زوجي!".



نرى هنا أن الطالبات اعتمدن في إجابتهن على الاستنتاج الذي توصلن له في الفرع السابق، أي أن "القرار" هنا أُخذ "بالاعتماد على تجربة سابقة" علماً بأن هذا الاستنتاج خاطئ ونجح مصادفةً في هذا الفرع.

وللتأكد من ملاحظتهن، حاولت المجموعة توزيع الأعداد بوضع العدد2 عند الرأس كونه أول عدد زوجي في الأعداد المطلوب توزيعها، وبالفعل وجدت الطالبات توزيعاً فقالت بيان: طلعت! 2 ، 4 ، 5 (مشيرة للذراع الأيمن) و 2 ، 3 ، 6 (مشيرة للذراع الأيسر) وتابعت ميس: "رح يكون عنا 3

حلول لأنه عنا ثلاث أعداد زوجية يعني لما الرأس2 ولما الرأس4، ولما الرأس 6" وأيدتها زميلاتها ولم يقمن بكتابة التوزيع عندما نضع العدد4 أو العدد6 عند الرأس لأن المجموعة كانت قد تأكدت من ملاحظتها.

هنا أيضاً تركت الباحثة الطالبات على هذا التفسير رغم عدم صحته كي يتوصلن لوحدهن في الفرع القادم أن هذا التفسير الذي قدّمنه خاطئ.

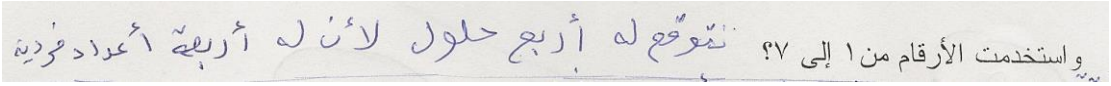
4. 2 تفسير الحديث بين الذاتي:

عندما قالت الطالبات: "إذاً الرأس زوجي!" نلاحظ أن (الرأس زوجي) كانت "متفقاً لغوياً" بينهن، والقصد هنا كان أن العدد الذي يوضع عند رأس الشكلV هو عدد زوجي.

5. التفاوض للتوصل إلى قرار بالاعتماد على تجربة سابقة:

في هذه المرحلة انتقلت المجموعة للفرع الأخير والذي يقول: " ما الذي يمكنك اكتشافه في شكل V الذي طول كل من ذراعيه هو 4 بدلاً من 3 واستخدمت الأعداد من 1 إلى 7 ؟؟"، الذي توصلت الطالبات من خلاله إلى أن الاستنتاج الذي اعتمدنه في حل السؤال هو (استنتاج وتفسير خاطئ)!

فبعد قراءة السؤال، قامت الطالبات بدون تردد بالاعتماد على استنتاجهن السابق، ونظرن إلى الأعداد الفردية والزوجية من مجموعة الأعداد المطلوب توزيعها، فقالت بيان وأزهار: "الأعداد الفردية هون أكثر.. 1 ، 3 ، 5 ، 7"، وتابعت ميس: "إله أربع حلول إذاً" وكتبوا هذه الملاحظة كما في الصورة.



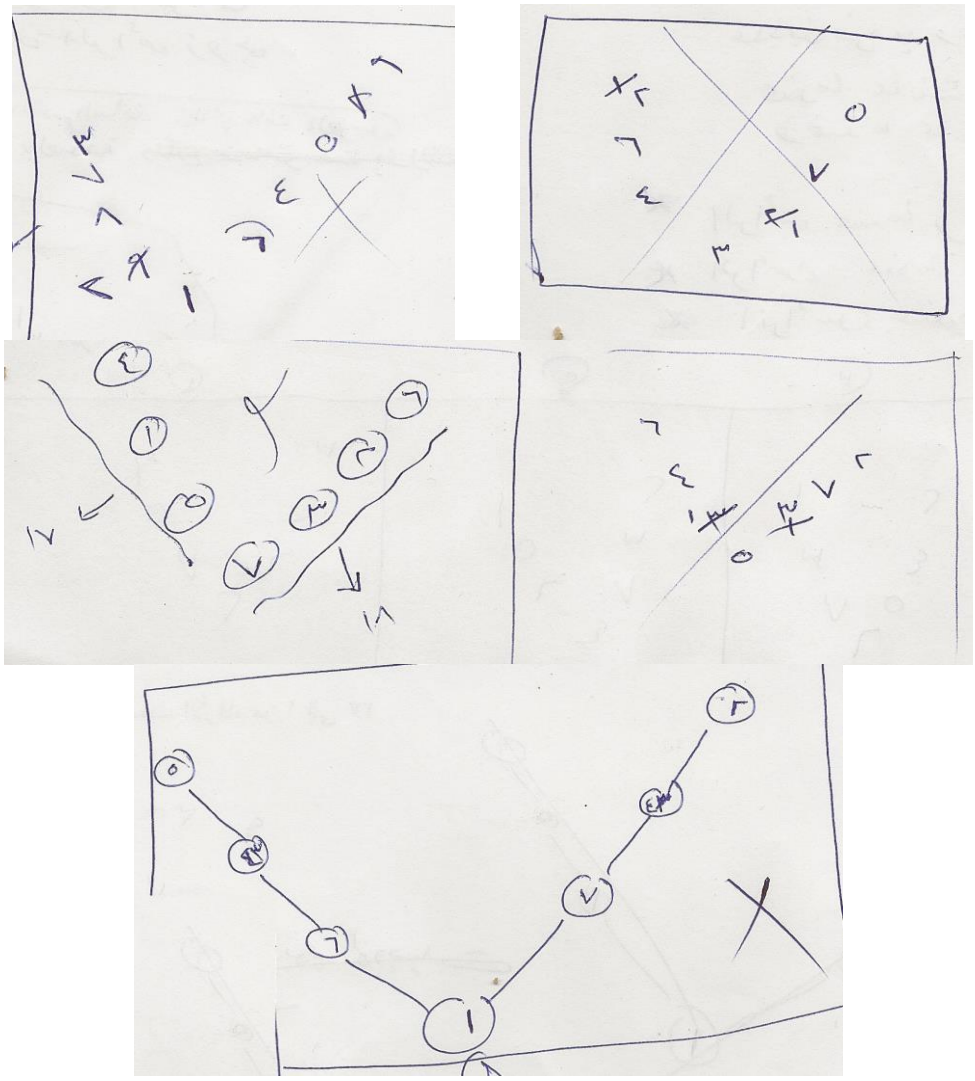
نرى من هذا التفاوض أن المجموعة توصلت إلى "قرار" بأن العدد الذي يجب وضعه عند الرأس هو عدد فردي وذلك "بالاعتماد على تفسيرهن للفروع السابقة".

6. البحث عن توزيع للأعداد من1 إلى7 بين الذراعين بحيث يتساوى مجموع أعدادهما

6. 1 التفاوض للتوصل إلى معنى:

عندما قامت الطالبات بمحاولة إيجاد التوزيعات للأعداد مع وضع الأعداد الفردية عند الرأس، حاولن عدة محاولات كما تبين الصور أدناه، وواجهن صعوبة في ذلك حيث نلاحظ من الصور أدناه أن أياً من هذه المحاولات لم تنجح، الصعوبة هنا كانت من نوع "تحديد خطأ ما" حسب جوز

(1998)، والاستجابة لهذه الصعوبة كانت فحص ومراجعة التوزيعات التي كتبتها المجموعة، حيث كانت الطالبات تراجع التوزيع أكثر من مرة لعله ينجح:



وبعد كل محاولاتهن، قالت ميس: "ولا وحدة نجحت!" وبدت نظرات الحيرة والاستغراب على الطالبات، وأدركن أن الأعداد الفردية لا يمكن وضعها عند الرأس وأحست الطالبات أن أمراً ما خاطئ.

هنا تدخلت الباحثة لمساعدة الطالبات للتغلب على هذه الصعوبة فقالت: "ماذا ستفعلوا؟؟"

ودار النقاش التالي:

- أماني: شكله السؤال ما بينحل!

- *الباحثة: لكنكم لم تجربوا جميع الأعداد!*

- ميس: جربنا جميع الأعداد الفردية

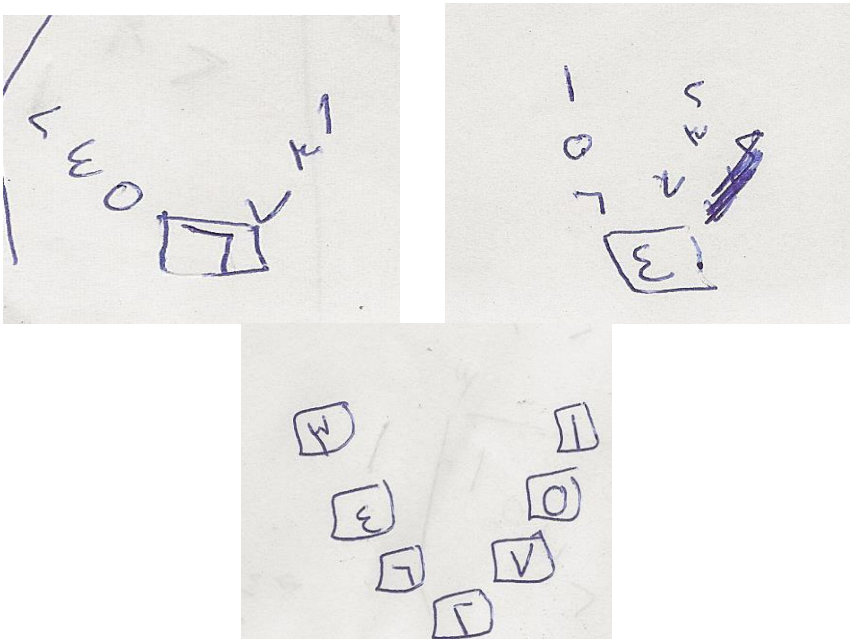
– *الباحثة: والأعداد الزوجية؟؟*

– بيان وميس: استنتجنا أنه إذا كانت الأعداد الفردية أكثر بيكون الرأس فردي.

– *الباحثة: جربوا الأعداد الزوجية!*

ابتسمت الطالبات مع نظرات استغراب وشعرت الباحثة أن الطالبات أدركن أن هناك خطأً ما في استنتاجهن!

وبالفعل حاولت الطالبات توزيع الأعداد مع وضع عدد زوجي عند الرأس، وبعد قليل نجحت كل من بيان وميس في ذلك فقالت بيان وهي مستغربة ومبتسمة: "العدد 2 نجح!!"، وقالت ميس بنبرة استغراب: "وأنا جربت الـ 4 ونجحت!!"، وكذلك جربوا وضع العدد6 عند الرأس ونجحن في ذلك.



هنا تأكدت الطالبات أن الاستنتاج الذي اعتمدنه في الفروع السابقة كان خاطئاً ونجح صدفةً، حيث قالت بيان: "استنتاجنا خاطئ؟!"، وأضافت أماني: "الحل ما بيعتمد على عدد الأعداد الفردية أو الزوجية!!"، وتابعت ميس: "آه، ما في علاقة بين الحل وعدد الأعداد الفردية والزوجية!".

فسألت الباحثة الطالبات عن تفسيرهن الجديد، بدأت الطالبات ينظرن للحلول السابقة وحل السؤال الحالي، ويحاولن معرفة العلاقة بين الحل الصحيح والأعداد عند الرؤوس وواجهن صعوبة في ذلك من نوع "نقص في الفهم والتقدم" حسب جوز (1998)، وبعد فترة من التفكير، تساءلت أزهار بنبرة تعجب: "كيف؟"، وقالت أماني: "ما قدرنا نفسر!"، وقال الجميع: "ما بنعرف!!".

نلاحظ أن الطالبات عجزن عن إيجاد تفسير وللتغلب على هذه الصعوبة، توجهن للباحثة لطلب المساعدة، أي أن الاستجابة للصعوبة التي واجهنها كانت بالتوجه إلى شخص عارف وهو الباحثة، فقدمت لهن الباحثة إشارة للتفسير قائلةً: "ما رأيكم لو قمتم بجمع الأعداد في كل مجموعة من المجموعات الثلاث..".

6. 2 التوصل إلى قرار بالاعتماد على شخص عارف:

قامت الطالبات بجمع الأعداد المطلوب توزيعها في الفرع الأول من 1 إلى 5 والناتج كان15، وكذلك جمعت أماني الأعداد من 2 إلى 6 ووصلت لناتج 20.

في هذه اللحظة، وقبل جمع الأعداد من 1 إلى 7، ظهرت أول ملاحظة عن طريق الطالبة بيان فقالت: "شوفوا ال15 فردي ونجحت الرؤوس الفردية فيه، و ال20 زوجي ونجحت الرؤوس الزوجية فيه" فقالت زميلاتها: "آآه!".

هنا دعت أماني لجمع أعداد الفرع الأخير: "تعالوا نجمع من 1 إلى 7" وجمعنها وكان الناتج 28 فقالت الطالبات: "زوجي!! ونجحت فيه الرؤوس الزوجية!".

نرى أن الطالبات اتخذن "قراراً" اعتمدن فيه على ما قالته بيان، حيث قالت بيان: "لما يكون المجموع فردي .. الرأس فردي، ولما يكون المجموع زوجي.. الرأس زوجي" وأيدتها زميلاتها.

من هنا نلاحظ أن المجموعة اعتمدت على الطالبة بيان "كشخص عارف" للتوصل لهذا "القرار والاستنتاج".

6. 3 تفسير الحديث بين الذاتي:

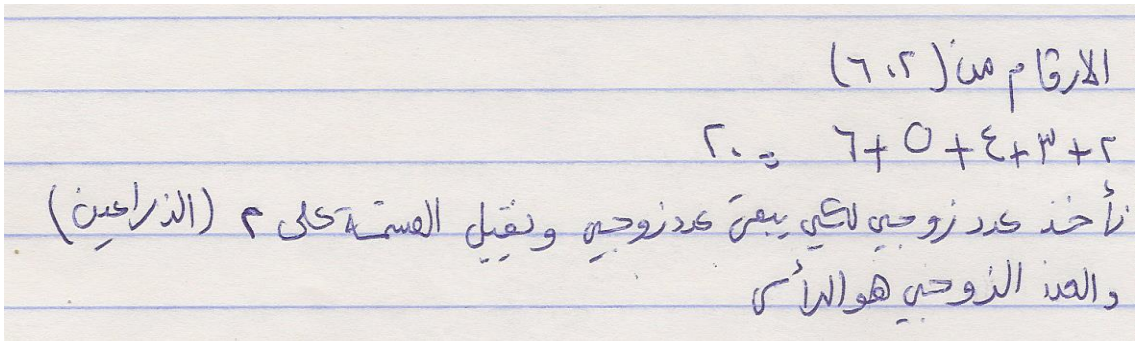
في التفاوض السابق، عندما قالت بيان: "ال15 فردي ونجحت الرؤوس الفردية فيه" فهي تقصد بذلك أن مجموع الأعداد المطلوب توزيعها بين الذراعين هو15 وهو عدد فردي، وقد تمكنت الطالبات من توزيع الأعداد عندما وضعن عدداً فردياً عند الرأس.

7. البحث عن تفسير للملاحظات التي قامت الطالبات ببنائها

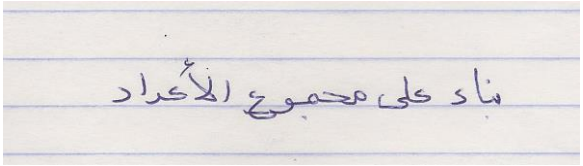
7. 1 التوصل إلى معنى للظاهرة:

في هذه المرحلة، انتقلت الطالبات إلى تفسير للملاحظة التي توصلن لها، أي إيجاد إثبات لصحة هذه الملاحظة والاستنتاج، وبعد وقت من التفكير، بدأت ميس بالتفسير فقالت: "شوفوا.. عندي

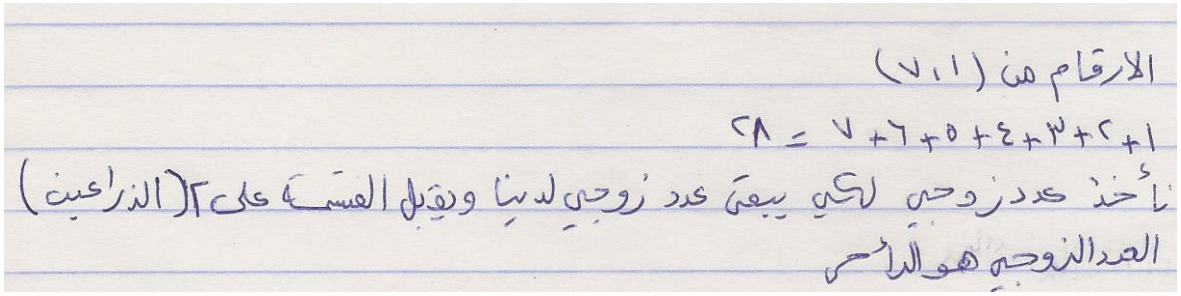
تفسير!" وكان تفسيرها كما يأتي: "في الأعداد من 1 إلى 5 مجموعهم فردي، والرأس بيكون فردي، بيضل.... 15 ناقص عدد فردي يعطي زوجي، وهو مجموع باقي الأعداد في الذراعين! يعني لما الرأس 1، بصير عنا 15-1=14 وهو زوجي.. وهذا مجموع باقي الأعداد وبيتوزع على الذراعين!" وبدا على زميلاتها الموافقة فقلن: "صحيح"، وتابعت بيان: "آه... والأعداد من 2 إلى 6 مجموعها 20 وهو زوجي والرؤوس كانت زوجية!" أي أن بيان فسرت الفرع الثاني بنفس الطريقة التي قدمتها ميس وهذا ما تبينه الصورة أدناه.



أي أن المجموعة توصلت إلى تفسير بأنه بناءً على مجموع الأعداد المطلوب توزيعها نحدد نوع العدد الواجب وضعه عند الرأس ممن ناحية فردي أو زوجي، وهذا يتضح من قول أزهار: "إذاً لما نطرح الرأس من المجموع لازم يضل عنا عدد بيقسم على 2 يعني زوجي، مشان نقسمه على الذراعين، وقالت بيان: "يعني بناءً على مجموع الأعداد نختار الرأس!"



وبعد هذا التفسير، تمكنت الطالبات من تفسير وضع عدد زوجي عند الرأس عند توزيع الأعداد من1 إلى 7، حيث قالت ميس: "صح! وهيك بنقدر نفسر وضع رأس زوجي للأعداد من 1 إلى 7، مجموعها هو 28... زوجي، عشان هيك ما عرفنا نوضع رأس فردي" وأضافت أماني: "بما إنه مجموع من 1 إلى 7 زوجي، نوخذ عدد زوجي للرأس مشان يبقى عنا عدد زوجي يقبل القسمة على الذراعين" ودونت الطالبات هذه الملاحظة، كما في الصورة أدناه.



7. 2 تفسير الحديث بين الذاتي:

خلال مرحلة التوصل إلى معنى، كان جزء من حديث الطالبات "حديث بين ذاتي"، فعندما قالت ميس: "وهيك بنقدر نفسر وضع رأس زوجي للأعداد من 1 إلى 7" فكانت كلمة (رأس زوجي) "متفقاً لغوياً" بين الطالبات، فالمقصود بذلك هو وضع عدد زوجي عند رأس الشكلV، وهي اختصرت ذلك ب(رأس زوجي).

4- أحداث تعلم مجموعة (ب) من الإناث (شيماء، دعاء، مرجان، تسنيم):

حدثت مراحل تعلم الطلاب بالتسلسل الآتي:

1. التوصل إلى قرار بكيفية بدء التعلم
2. التفاوض من أجل التوصل إلى توزيع للأعداد المعطاة بحيث يتساوى مجموع أعداد الذراعين

2. 1 التفاوض للتوصل إلى قرار

2. 2 تفسير الحديث بين الذاتي

3. التوصل إلى ملاحظات حول السؤال

3. 1 التفاوض للتوصل إلى معنى

3. 2 التوصل إلى قرار

4. التفاوض للتوصل إلى معنى وتفسير للظاهرة
5. التوصل إلى قرار بالاعتماد على تجربة سابقة
6. التفاوض من أجل توزيع الأعداد من 1إلى.

7 بحيث يتساوى مجموع أعداد الذراعين

6. 1 التفاوض للتوصل إلى معنى

6. 2 موقف عدم تيقن

6. 3 تفسير الحديث بين الذاتي

وفيما يأتي نفصّل هذه المراحل:

1. التوصل إلى قرار بكيفية بدء التعلم:

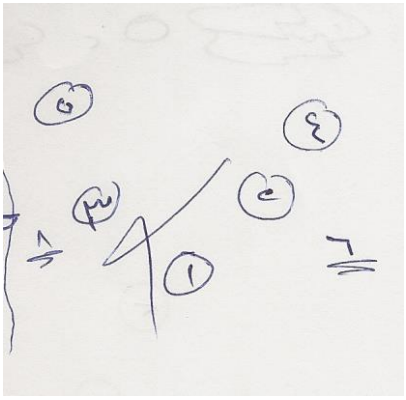
بعد أن قرؤوا السؤال، طرحت مرجان فكرةً للبدء بالحل فقالت: "لو نكتب1 عند الرأس ونشوف.." وأيدها الجميع قائلين: "ماشي.."، فنلاحظ من هنا أن المجموعة توصلت إلى "قرار" بالبدء بالتعلم عن طريق وضع العدد1 عند الرأس كمحاولة أولية في الحل لتكتسب الطالبات فكرةً عن طريقة الحل.

2. التفاوض من أجل التوصل إلى توزيع للأعداد المعطاة بحيث يتساوى مجموع أعداد الذراعين

2. 1 التفاوض للتوصل إلى قرار:

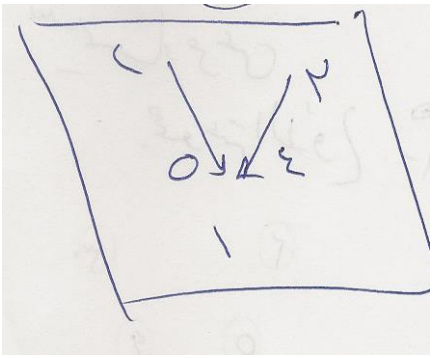
اقترحت الطالبة مرجان فكرة لمساعدة المجموعة في التوصل إلى توزيع للأعداد المعطاة فقالت: "الأربع أعداد اللي بدنا نوزعها 2، 3، 4، 5 تعالوا نقسمهم لمجموعتين الهم نفس المجموع" وأضافت الطالبة شيماء ملاحظة فقالت: "لازم نوضع عدد صغير مع عدد كبير..".

ثم جربت مرجان مع المجموعة توزيعاً للأعداد بحيث يضعن 2، 4 في ذراع و3، 5 في الذراع الآخر ثم اكتشفوا أنه ليس صحيحاً حيث قالت مرجان: "لو جربنا مثلاً 2 و4 ..6 ، 3 و5..8... لا ما زبطت"



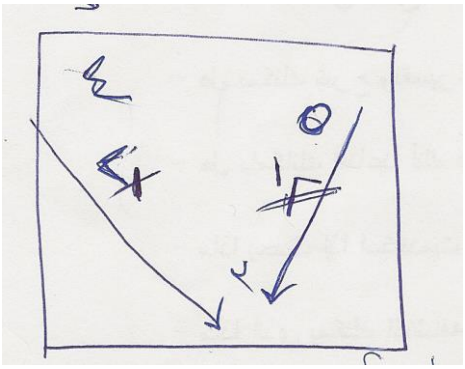
فقامت الطالبة تسنيم بتعديل لهذا التوزيع فقالت: "نوضع ال3 مع ال4...7 و ال2 مع ال5 ..7...هيها". نلاحظ أنه بعد هذا التعديل أصبح الحل صحيحاً حيث أصبح مجموع كل ذراع 7

وتوصلوا إلى "قرار" بأن هذه هو الحل الصحيح حيث قالت شيماء: "إذاً عنا 3، 4، 1 و 2، 5، 1" كما تبين الصورة التالية.



بعد ذلك انتقلت المجموعة للفرع التالي لمحاولة إيجاد طريقة أخرى لتوزيع الأعداد، واقترحت دعاء أن يحاولوا توزيع الأعداد بين الذراعين مع وضع العدد2 عند رأس الشكلV فقالت: "تعالوا نجرب ال2" وواجهت المجموعة صعوبة في ذلك من نوع "تحديد خطأ ما" حسب جوز (1998) حيث أخذوا فترة طويلة للتجريب دون أن ينجحوا بذلك فقالت شيماء: "ما زبطت"، وقالت مرجان: "ما زبطت معي"، وأضافت دعاء: "شكله ما في طريقة ثانية".

وكانت الاستجابة التي قامت بها الطالبات هي اتخاذ "قرار" بتغيير طريقة الحل حيث قالت شيماء: "تعالوا نجرب ال3" واستجابت زميلاتها لذلك وبدؤوا بالتجربة، وبعد وقت قصير قالت تسنيم: "هيها.. 2 و4 = 6 و 1 و5 =6" أي أنها وجدت توزيعاً آخر للأعداد بحيث يوضع العدد 3 عند الرأس، كما تبين الصورة.



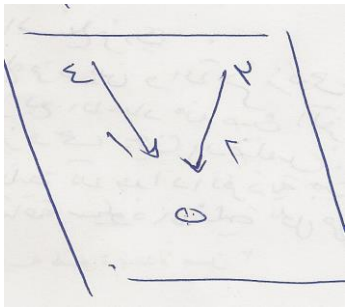
2. 2 تفسير الحديث بين الذاتي:

أثناء تفاوض الطالبات للتوصل إلى قرار وإيجاد توزيع للأعداد كان هناك "حديث بين ذاتي"، فعندما قالت شيماء: "تعالوا نجرب ال2" فهي تقصد بذلك أن يحاولوا توزيع الأعداد بين الذراعين مع وضع العدد2 عند رأس الشكلV.

3. التوصل إلى ملاحظات حول السؤال

3. 1 التفاوض للتوصل إلى معنى:

بدأت الطالبات تلاحظ أن الأعداد التي يمكن وضعها عند الرأس للحصول على توزيع صحيح للأعداد بين الذراعين هي الأعداد الفردية. فبعد أن تمكنت المجموعة من توزيع الأعداد بين الذراعين مع وضع العدد1 وكذلك العدد3 عند الرأس، قالت شيماء: "ملاحظين إنه العددين اللي وضعناهم عند الرأس فرديين؟؟" وبناءً على هذه الملاحظة اقترحت أن يجربوا توزيع الأعداد بين الذراعين مع وضع العدد 5 عند الرأس كونه عدداً فردياً فقالت: "تعالوا نجرب ال5 لأنها فردية" ووافقها الجميع وبدؤوا بالتجربة، وبعد قليل وجدت تسنيم توزيعاً صحيحاً قائلةً: "طلعت..5، 2، 3 و 5، 1، 4"



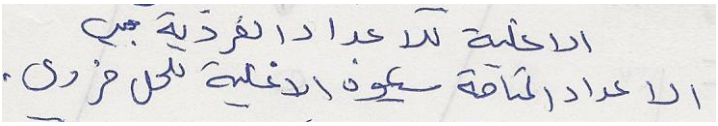
3. 2 التوصل إلى قرار:

بعد التفاوض السابق، توصلت المجموعة إلى "قرار" بأن عدد الحلول الممكنة هي ثلاثة بناءً على ملاحظتهم بأن الأعداد الفردية هي التي يمكن وضعها عند الرأس والحصول على توزيع صحيح للأعداد بين الذراعين بحيث يتساوى مجموعهما، حيث قالت دعاء: إذاً عنا ثلاث حلول لأنه عنا ثلاث أعداد فردية هون".

4. التفاوض للتوصل إلى معنى وتفسير للظاهرة:

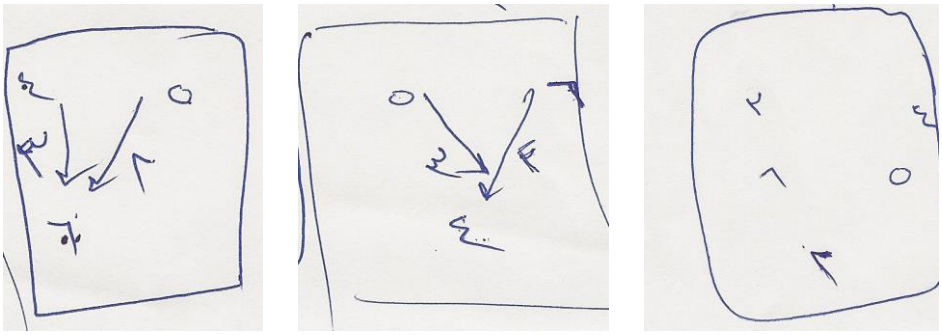
لاحظت الطالبات أن الأعداد المطلوب توزيعها بين الذراعين وهي من 1 إلى 5 منها ثلاثة أعداد فردية واثنان زوجيان، فتوصلن إلى تفسير (خاطئ) للظاهرة وهو أن غالبية الأعداد المطلوب توزيعها هي أعداد فردية، ولذلك العدد عند الرأس يجب أن يكون فردياً حتى يتساوى توزيع باقي الأعداد بين الذراعين من ناحية الفردي والزوجي، أي أن يحصل كل ذراع على عددين أحدهما فردي والآخر زوجي إلى جانب الرأس، وهذا ما وضحته شيماء: "لاحظوا انه عنا ثلاث اعداد فردية واثنين زوجية.. يعني الأغلبية هون أعداد فردية، عشان هيك الرأس فردي" وقالت دعاء: "إذاً لازم يتساوى الذراعين من حيث الزوجي والفردي".

لكن الباحثة تركت الطالبات يكتبن هذه الاستنتاجات كي يتوصلن لوحدهن بأن هذا التفسير خاطئ عندما يتقدموا في الفروع المتبقية من السؤال.



5. التوصل إلى قرار بالاعتماد على تجربة سابقة:

بالمصادفة! الفرع التالي من السؤال كان يتماشى مع الملاحظة "الخاطئة" التي توصلن لها في تجربتهن في الفرع السابق، فعندما قمن بتوزيع الأعداد من 2 إلى 6، قالت تسنيم: "الأغلبية هون للأعداد الزوجية، يعني الرأس لازم يكون زوجي" وقد نجحن في توزيع الأعداد بين الذراعين عندما كان العدد الموضوع عند الرأس زوجياً، كما تبين الصور أدناه.



أيضاً هنا، تركت الباحثة الطالبات على هذا الاستنتاج الخاطئ حتى يكتشفن خطأهن في الفرع اللاحق.

6. التفاوض من أجل توزيع الأعداد من 1إلى 7 بحيث يتساوى مجموع أعداد الذراعين

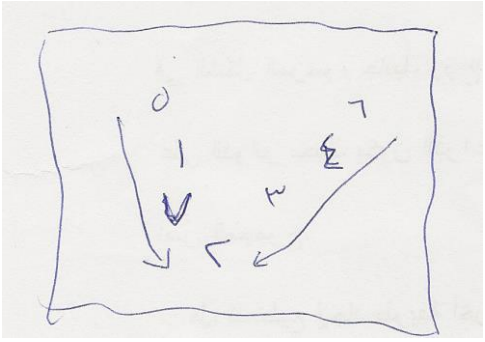
6. 1 التفاوض للتوصل إلى معنى:

في هذه المرحلة انتقلت الطالبات للفرع الأخير من السؤال الذي يطلب توزيع الأعداد من 1 إلى 7، واعتمدن على ملاحظتهن الخاطئة لحل السؤال، حيث قالت دعاء: "هون الأغلبية للفردي..إذاً الرأس فردي" وأيدتها جميع الطالبات وقلن: "صح!"، وبدأت الطالبات بتوزيع الأعداد مع وضع العدد1 عند الرأس كونه أول عدد فردي في الأعداد المطلوب توزيعها، حيث قالت دعاء: "تعالوا نكتب أول حالة لما الرأس1"

وبدأت الطالبات بالمحاولة ولكنهن واجهن صعوبة من نوع "تحديد خطأ ما" حسب جوز (1998) حيث أخذن فترة طويلة من الوقت دون جدوى، ثم بدأت كل منهن تجرب عدداً فردياً آخر، ولكن لم تنجح أي محاولة بالطبع لأن الاستنتاج الذي اعتمدن عليه خاطئ! وهنا أحسّت الطالبات أنه هناك أمراً خاطئاً، وقالت مرجان: "شكلها ما رح تطلع!".

الاستجابة التي قامت بها المجموعة كانت تغيير طريقة الحل حيث اقترحت الطالبة دعاء القيام بمحاولة لتوزيع الأعداد بين الذراعين مع وضع عدد زوجي عند الرأس لأن أياً من الأعداد الفردية لم يتمكنّ من وضعه عند الرأس، فقالت بنبرة صوت (غير واثقة): "تعالوا نجرب ال2..!!!" وردّت شيماء: "بس ال2 زوجي!" فأضافت دعاء: "بنجرب وبنشوف!".

الموقف الحرج الذي توصلت له الطالبات كان بعد نجاحهنّ في توزيع الأعداد بين الذراعين مع وضع العدد2 عند الرأس حيث بدت علامات الاستغراب على وجوههنّ!



أدركت الطالبات هنا أن الملاحظة التي اعتمدن عليها كانت خاطئة – وإن نجحت مصادفة في أول فرعين– فقالت شيماء: "إذاً استنتاجنا خطأ!!!"، وقالت مرجان: "الاستنتاج اللي توصلنا له بالأول طلع خطأ! ونجح مصادفة بأول فرعين".

وهنا واجهت الطالبات صعوبة من نوع "نقص في الفهم" حسب جوز (1998) حيث حاولن فترة من الوقت دون التوصل لأي تفسير!

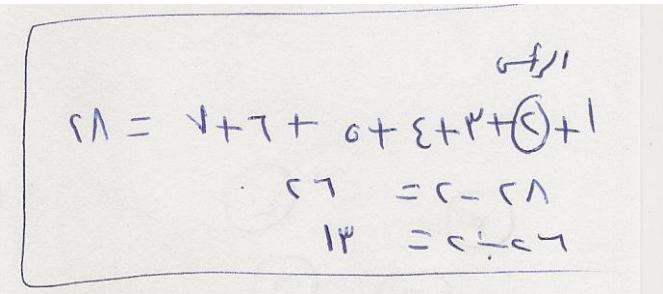
والاستجابة التي قامت بها المجموعة للتغلب على هذه الصعوبة كانت توجه شيماء ومرجان للباحثة كشخص عارف بقولهن: "ما لقينا تفسير!!"، فقالت الباحثة: *"لو جمعنا الأعداد المطلوب توزيعها في كل فرع؟... ما هو الناتج؟*" فجمعت الطالبات الأعداد.. ودار النقاش التالي:

- مرجان: 28.. زوجي
- شيماء: وأول فرع مجموعه 1+2+3+4+5= 15.. فردي
- تسنيم: ومن 2 ل6 مجموعه 20 زوجي

وظهرت أول فكرة للوصول للتفسير الصحيح عندما قالت شيماء: "ملاحظين إنه المجموع نفس الرؤوس؟!" وأضافت: "إله علاقة بالتفسير وللا صدفة؟؟" لكنها لم تكن متأكدة من صحة ماتقول، فتوجهت مرجان للباحثة: "لما المجموع فردي الرأس فردي ولما المجموع زوجي الرأس زوجي.. إله علاقة بالتفسير؟؟" فأخبرتهم الباحثة أن هذه نقطة البداية للتفسير.

أخذت الطالبات فترة من الوقت للتفكير، وبعدها قدمت تسنيم تفسيراً صحيحاً للظاهرة وأوضحته لزميلاتها قائلة: "شوفوا.. لما المجموع زوجي.. الرأس زوجي.. بنطرح المجموع– الرأس = زوجي وعشان هيك بنقدر نوزعه بين الذراعين..صح؟" ونلاحظ أنها قالت ذلك بنبرة تساؤل! أي أنها كانت بحاجة لتأييد للتفسير الذي قدمته.

دعمت الطالبة مرجان تفسير زميلتها عن طريق التحقق من الفرع الأخير فقالت: "صح! شوفوا مثلاً الفرع الأخير لما وضعنا الرأس 2 بضل من المجموع 28 –2=26 بنقسمها على 2 بطلع كل ذراع 13". وسألت الباحثة: *"وماذا عندما يكون مجموع الأعداد التي نريد توزيعها فردياً؟*" للتحقق من فهم الطالبات للظاهرة، فأجابت شيماء: "بكون الرأس فردي.. فردي – فردي= زوجي وبنقدر نوزع الأعداد على الذراعين"



6. 2 موقف عدم تيقن:

عندما قالت شيماء: "ملاحظين إنه المجموع نفس الرؤوس؟!" قالت ذلك بنبرة تساؤل، وأتبعت ذلك بقول: "إله علاقة بالتفسير وللا صدفة؟؟" فهي كانت "غير متيقنة" من صحة ما تقول وكانت بانتظار التأكيد من الباحثة.

وكذلك عندما قدمت تسنيم تفسير الظاهرة، حيث فسرت بصوت متسائل وختمت تفسيرها بسؤال: "صح؟؟" فهي أرادت دعماً وتأكيداً للتفسير فهي عندما قالت: "شوفوا.. لما المجموع زوجي.. الرأس زوجي.. بنطرح المجموع– الرأس = زوجي وعشان هيك بنقدر نوزعه بين الذراعين..صح؟" كانت "غير متيقنة".

6. 3 تفسير الحديث بين الذاتي:

عندما قالت شيماء: "ملاحظين إنه المجموع نفس الرؤوس؟!" خلال التفاوض للتوصل إلى معنى، كانت تقصد بـ(المجموع نفس الرؤوس) أن مجموع الأعداد المطلوب توزيعها يشبه العدد الموضوع عند الرأس من ناحية فردي أو زوجي، وهي لم توضح هذا في كلامها لأن ذلك كان متفقاً عليه بشكل ضمني بين الطالبات.

وعندما قالت دعاء: "تعالوا نجرب ال2..!!!" كان مفهوماً بشكل ضمني أنها تقصد محاولة توزيع الأعداد بين الذراعين مع وضع العدد2 عند رأس الشكلV.

نلخص نتائج المجوعات في السؤال الثالث في جدول (4).

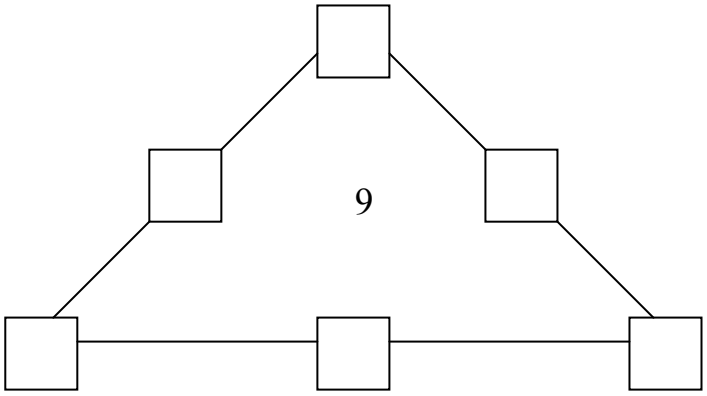
جدول(4): تشابه المجموعات المختلفة واختلافها بما يتعلق بتعلمها وتعاونها خلال حل السؤال الثالث.

التشابه	الاختلاف	ملاحظات
– تشابهت بداية الحل لدى مجموعتي الذكور والمجموعة (ب) من الإناث حيث بدؤوا التفكير عن طريق التجريب وذلك بوضع العدد1 عند رأس الشكلV. – التفاوض في هذا السؤال خدم المجموعات في التجريب عندما اختاروه كطريقة لبدء الحل، وعند البحث عن حلول جديدة. – جاءت مراحل حل هذا السؤال خالية من مواقف عدم التيقن.	– المجموعة (أ) من الإناث بدأت بالتفاوض والتجريب لإيجاد حل دون وضع عدد محدد عند الرأس، وقدمت إحدى طالباتها طريقة للحل تختلف عن باقي المجموعات. – المجموعة (ب) من الذكور واجهت صعوبة في إيجاد توزيع جديد للأعداد، وأخذت وقتاً طويلاً في التفكير، ولجؤوا للمعلمة لتجاوز هذه الصعوبة. – مجموعتا الذكور توصلتا لتفسير صحيح للظاهرة، أما مجموعتا الإناث، توصلتا إلى تفسير (خاطئ) للظاهرة وهو أن غالبية الأعداد المطلوب توزيعها – وهي من 1 إلى 5– هي أعداد فردية، ولذلك العدد عند الرأس يجب أن يكون فردياً حتى يتساوى توزيع باقي الأعداد بين الذراعين من ناحية الفردي والزوجي	– لاحظت الباحثة أن مجموعتي الإناث كانتا تفكران أثناء التفاوض للوصول إلى حل بشكل متسلسل ومرتب أكثر من مجموعتي الذكور، حيث كان اختيار الأعداد بشكل متسلسل بحيث جربت مجموعتا الإناث العدد1 ثم العدد2 وهكذا.. – المجموعة (أ) من الذكور هي أسرع المجموعات وصولاً للتفسير بعد التفاوض والنقاش بين أفراد المجموعة. – عندما لم تتمكن المجموعة (أ) من الإناث من إيجاد تفسير للظاهرة وواجهن صعوبة في التقدم والتطور، توجهت المجموعة للمعلمة لطلب المساعدة، وكان تدخل المعلمة هنا عن طريق تقديم اقتراح يرشد الطالبات لطريقة التفكير الصحيحة، وتكرر الموقف لدى المجموعة (ب) من الإناث.

رابعاً: أحداث تعلم المجموعات خلال حلهم السؤال الرابع

نص السؤال الرابع:

رتب الأعداد من 1 إلى 6 بحيث يكون مجموع كل ضلع من الأضلاع الثلاثة مساوياً للعدد 9 المكتوب في وسط الشكل.



- كيف يمكنك فعل ذلك؟
- ما هي ملاحظاتك؟
- رتب هذه الأعداد بحيث يكون العدد المكتوب في وسط الشكل هو10.
- ما هي ملاحظاتك؟

1- أحداث تعلم مجموعة (أ) من الذكور (محمد، زيد، بدر، شريف):

حدثت مراحل تعلم الطلاب بالتسلسل الآتي:

1. اتخاذ قرار بكيفية بدء التعلم
2. التفاوض من أجل إيجاد توزيع للأعداد بحيث يكون مجموع أعداد كل ذراع9
   2. 1 التفاوض للوصول إلى قرار
   2. 2 تفسير الحديث بين الذاتي
3. التفاوض من أجل إيجاد توزيع للأعداد بحيث يكون مجموع أعداد كل ذراع10
   3. 1 التفاوض للتوصل إلى قرار
   3. 2 تفسير الحديث بين الذاتي
   3. 3 التفاوض للتوصل إلى معنى

وفيما يأتي نفصّل هذه المراحل:

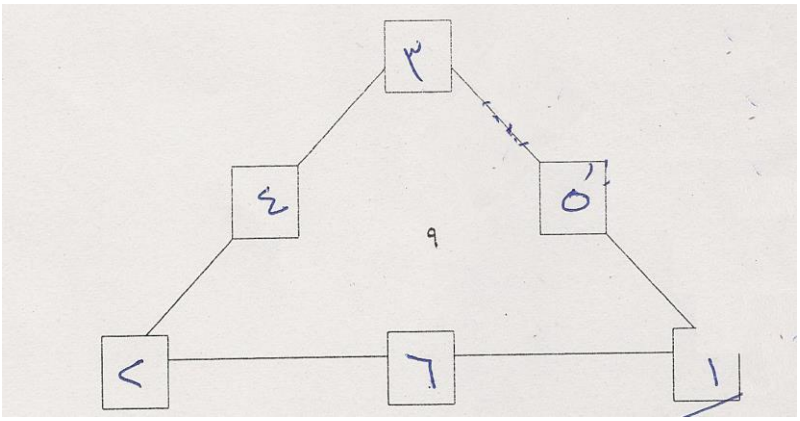
1. اتخاذ قرار بكيفية بدء التعلم:

بدأ زيد بقراءة نص السؤال، ثم قال محمد: "بدنا نجرب" وبدأ الجميع يحاولون..، نرى أن عمل الطلاب الرياضي بدأ بمبادرة من أحد الطلاب بهدف "الوصول إلى قرار" يتعلق بكيفية البدء بتعلمهم.

2. التفاوض من أجل إيجاد توزيع للأعداد بحيث يكون مجموع أعداد كل ذراع9

2. 1 التفاوض للوصول إلى قرار:

دعا زيد زملاءه للمحاولة والتفكير حيث قال: "خلونا نفكر..!"، واحتاجوا فترة من الوقت وهم يحاولون.. وبعدها توصلت المجموعة إلى حل للسؤال عن طريق الطالب محمد حيث قال: "لقيتها..." فالتفتوا له وقال زيد: "خلينا نشوف.."



- زيد: يعني 1، 2، 3 عند الرؤوس؟
- محمد: آه ..
- شريف: أصغر ثلاث أعداد لازم يكونوا مشتركات
- الجميع: صح!

نلاحظ من خلال هذا التفاوض أن زملاء بدر تفاعلوا مع إجابته، حيث توصل شريف إلى "ملاحظة" بأن رؤوس الشكل كانت الأعداد الصغيرة من بين الأعداد التي عليهم توزيعها.

وعندما سألت الباحثة الطلاب عن ملاحظاتهم، أجاب الجميع: "العوامل المشتركة أعداد صغيرة".

فسألت الباحثة عن التعليل، وأجاب محمد وبدر: "لو كتبنا أعداد كبيرة عند الزوايا رح يطلع ناتج الضلع أكبر من9".

2. 2 تفسير الحديث بين الذاتي:

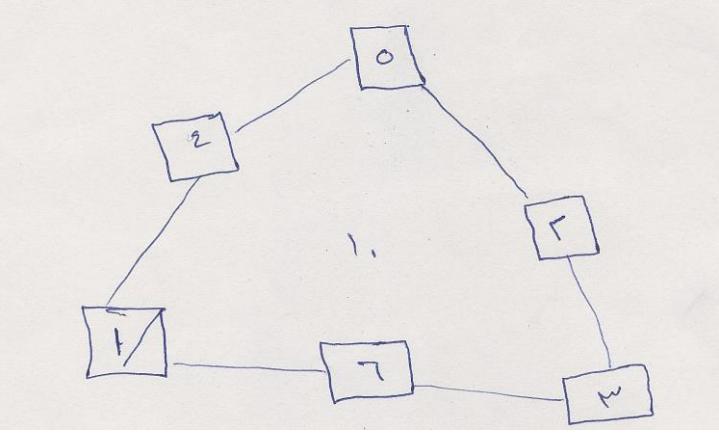
خلال مرحلة التفاوض السابقة، قال شريف: "أصغر ثلاث أعداد لازم يكونوا مشتركات"، فكلمة (مشتركات) كانت "متفقاً لغوياً" بينهم للدلالة على الأعداد التي كتبوها عند رؤوس المثلث. وكذلك استخدامهم مصطلح (العوامل المشتركة) يقصدون بها الرؤوس لأنها أعداد مشتركة بين ضلعين.

3. التفاوض من أجل إيجاد توزيع للأعداد بحيث يكون مجموع أعداد كل ذراع10

3. 1 التفاوض للتوصل إلى قرار:

بدأ بدر بهذه المرحلة مشيراً للفرع التالي فقال "هون بدنا مجموع الضلع 10"، وبدأ الجميع بمحاولة توزيع الأعداد، بعدها دار النقاش الآتي:

- محمد: لقيتها..
- الجميع: شو هي؟
- محمد: 1، 3، 5



أي أن الطلاب من خلال هذا التفاوض توصلوا إلى "قرار" بوضع الأعداد 1، 3، 5 –كما في الصورة أعلاه– عند رؤوس الشكل حتى يصبح مجموع كل ضلع 10.

3. 2 تفسير الحديث بين الذاتي:

في التفاوض السابق، عندما سأل الطلاب محمد عن الحل الذي وجده، أجاب: "1، 3، 5" وفهموا منه أنه يقصد أن يضعوا هذه الأعداد عند الرؤوس.

3. 3 التفاوض للتوصل إلى معنى:

بعد أن تمكّن الطلاب من حل فرعي السؤال، حدث نقاش تبين منه أن الطلاب توصلوا إلى ملاحظات حول السؤال، حيث قال زيد عن الفرع الذي يطلب مجموع أعداد الذراع10: "لاحظوا انه الرؤوس هون هي الأعداد الفردية والأعداد غير المشتركة زوجية" فحدث النقاش الآتي:

- محمد: بدنا مجموع الضلع10 وهو زوجي.. ولما تكون الرؤوس فردية يعني أنه هناك عددين فرديين على الضلع وبيكون مجموعهم زوجي وبنحتاج عدد زوجي حتى نحصل على مجموع الضلع زوجي.
- *الباحثة: وعندما كان العدد 9 وسط الشكل؟؟*
- زيد: الرؤوس بتكون زوجية
- *الباحثة: لماذا؟*
- زيد: لأن مجموع الرأسين بيكون زوجي + زوجي = زوجي

وبدنا مجموع الضلع 9 وهو فردي.. عشان هيك بدنا عدد فردي بالوسط.

فمن خلال هذا التفاوض، نرى أن الطلاب ربطوا بين العدد وسط الشكل والرؤوس، بحيث إذا كان المجموع المطلوب لكل ضلع زوجياً –مثلاً 10– تكون الرؤوس أعداداً فردية، وإذا كان المجموع المطلوب لكل ضلع فردياً –مثلاً 9– تكون الرؤوس أعداداً زوجية.

2– أحداث تعلم مجموعة (ب) من الذكور (حكمت، مجدي، مهدي، وليد):

حدثت مراحل تعلم الطلاب بالتسلسل الآتي:

1. التفاوض من أجل إيجاد توزيع للأعداد بحيث يكون مجموع أعداد كل ذراع يساوي9
   1. 1 التفاوض للتوصل إلى قرار
   1. 2 موقف عدم تيقن
   1. 3 تفسير الحديث بين الذاتي
2. التفاوض من أجل بناء ملاحظات حول السؤال
   2. 1 التفاوض للتوصل إلى قرار ومعنى
   2. 2 تفسير الحديث بين الذاتي

3. التوصل إلى قرار بالاعتماد على تجربة سابقة

وفيما يأتي نفصّل هذه المراحل:

1. التفاوض من أجل إيجاد توزيع للأعداد بحيث يكون مجموع أعداد كل ذراع يساوي9

1. 1 التفاوض للتوصل إلى قرار:

بدأ وليد بقراءة السؤال بصوت مرتفع، ثم بادر حكمت ودعا زملاءه للتجربة: "خلونا نجرب.."، وأخذوا فترة من الوقت في محاولة لتوزيع الأعداد، وأثناء تفاوضهم للبحث عن حل، تساءل مهدي: "بجوز نكرر عدد؟؟" فأجابه مجدي: "لا.. لأنه عنا 6 أعداد و6 مربعات..".

نرى من هذا النقاش أن الطلاب اتخذوا "قراراً" بأنه لا يجوز تكرار عدد لأن عدد الأعداد المعطاة في السؤال يساوي عدد المربعات.

وبعد فترة قصيرة، قدم حكمت أول جزء من الحل حيث قال: "3، 5، 1... =9 (وكتبها على الضلع الأيمن من المثلث)، كما تبين الصورة التالية.

ثم انشغلوا فترة من الوقت لتعبئة باقي المربعات... وحدث النقاش الآتي:

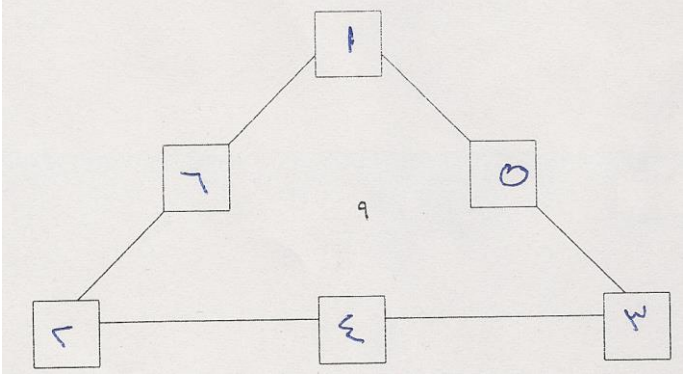
- مهدي: طلعت!

3 و 4 و2 (وقد كتبها على قاعدة المثلث)

9= 2+..7=4 +3

- مجدي: بضل ال6 بنكتبه في المربع الأخير..2 و6 و1.. مجموعهم 9

إذاً صحيحة... لأنه هيك كل ذراع مجموعه 9



من التفاوض السابق، نلاحظ أن الطلاب تعاونوا للتوصل إلى توزيع صحيح للأعداد، وتوصلوا إلى "قرار" بأن التوزيع الذي قاموا به صحيح بعد أن تأكدوا أن كل ضلع مجموع أعداده 9 حيث قال مجدي "إذاً صحيحة.. لأنه هيك كل ذراع مجموعه 9"

1. 2 موقف عدم تيقن:

نرى في بداية تفاوض الطلاب السابق للوصول إلى حل، كان مهدي "غير متيقن" من شرط السؤال فيما إذا يُسمح بتكرار عدد فلجأ لزملائه وساعدوه في ذلك.

1. 3 تفسير الحديث بين الذاتي:

أثناء نقاش الطلاب للتوصل إلى حل للسؤال، كان جزء من حديثهم "حديثاً بين ذاتي"، فعندما قال مجدي: "إذاً صحيحة... لأنه هيك كل ذراع مجموعه 9" فهو اختصر الجملة وقال (مجموع الذراع) وهو يقصد أن مجموع (الأعداد) لكل ذراع هو 9.

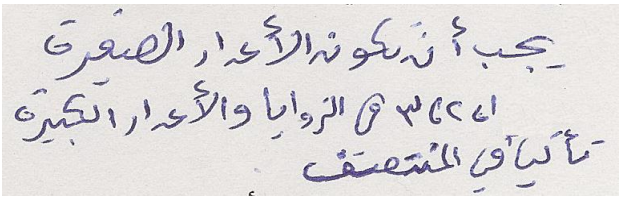
2. التفاوض من أجل بناء ملاحظات حول السؤال

2. 1 التفاوض للتوصل إلى قرار ومعنى:

في هذه المرحلة قرأ حكمت الفرع التالي: "ما هي ملاحظاتنا؟" فنظروا للسؤال قليلاً... لكنهم لم يفهموا بالضبط المقصود منه، أي أنهم واجهوا صعوبة من نوع "نقص في الفهم" حسب جوز (1998)، وللتغلب على هذه الصعوبة، سأل مهدي الباحثة: "شو المقصود هون؟" فدار النقاش الآتي:

– الباحثة: *ماذا لاحظتم في الشكل بعد توزيع الأعداد؟ أي كيف نجحتم في توزيعها بطريقة صحيحة؟*

– حكمت ووليد: خلينا الأعداد الصغيرة عند الرؤوس



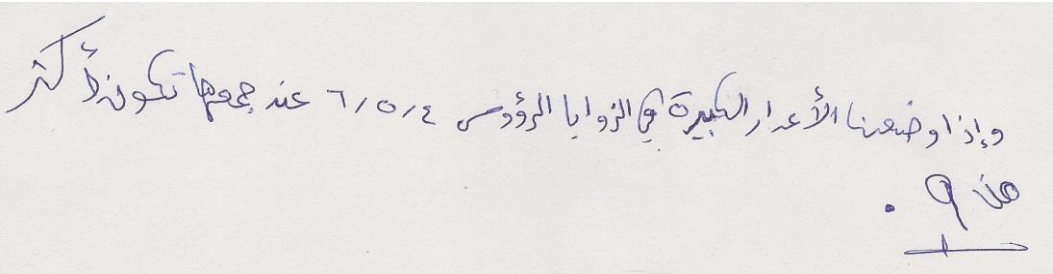
– *الباحثة: لماذا الأعداد الصغيرة عند الرؤوس؟*

– وليد: لو كتبنا 4، 5، 6 عند الرؤوس بدلاً من 1، 2، 3 رح يكون مجموع الضلع

أكبر من 9!

– مجدي: صحيح! لأنه لو كتبنا 4، 5، 6 عند الرؤوس.. 4+ 5=9 مجموع عددين من الضلع أنتج 9! إذاً مجموع الضلع كامل رح يكون أكبر من 9

– الجميع: صحيح



من النقاش أعلاه، يمكننا أن نرى أن الطلاب توصلوا إلى "قرار" بأن يضعوا الأعداد الصغيرة عند الرؤوس، واعتمدوا على هذا القرار كي يقدموا "تفسيراً للظاهرة" فهم "قرروا" أن لا يضعوا أعداداً كبير عند الرؤوس كي لا يكون مجموع أعداد الضلع أكبر من.9

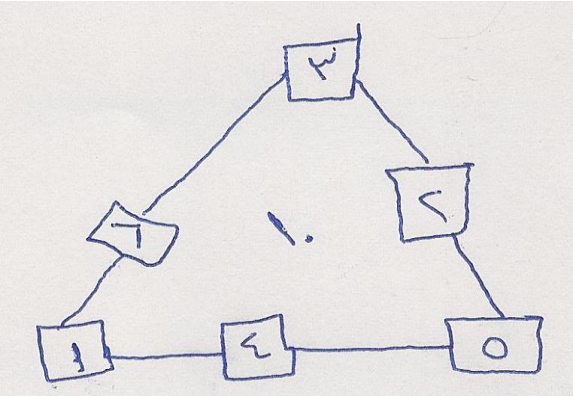
2. 2 تفسير الحديث بين الذاتي:

خلال تفاوض للتوصل إلى قرار ومعنى، ورد في نقاشهم "حديث بين ذاتي" وذلك عندما قال وليد: "لو كتبنا 4، 5، 6 عند الرؤوس بدلاً من 1، 2، 3 رح يكون مجموع الضلع أكبر من 9!"، فهو يقصد من (مجموع الضلع أكبر من9) أن مجموع (أعداد) الضلع أكبر من9.

3. التوصل إلى قرار بالاعتماد على تجربة سابقة:

انتقل الطلاب إلى الفرع التالي فقال وليد: "بدنا نرتبها بحيث يكون مجموع كل ضلع 10 بدل من 9" فاعتمدوا على تجربتهم في الفرع السابق، وحاولوا في البداية إيجاد ثلاثة أعداد منها تعطي المجموع10، فقال مهدي: "تجرب نعمل أحد الأضلاع 1، 6، 3... لأنه مجموع هاي الأعداد 10" ووضعوا أحد الرؤوس1 وأحدها3.

بعد ذلك، أكملوا محاولتهم في توزيع الأعداد بحيث كانوا يجربون الأعداد التي يمكن وضعها عند الرأس المتبقي حيث أنهم استنتجوا من الفرع السابق أن الأعداد عند الرؤوس يجب أن لا تكون كبيرة كي لا يصبح مجموع الضلع أكبر من المطلوب، وقد جربوا وضع 2 عند الرأس المتبقي كونه أصغر الأعداد المتبقية إلا أنهم لم ينجحوا بهذا، وبعد قليل قال حكمت: "ال5 زبطت... و2 هنا (مشيراً للمربع الأوسط من الضلع الأيمن)، و4 هنا (مشيراً للمربع المتبقي في قاعدة المثلث).



ونلاحظ من نقاشهم أن تركيزهم كان على الأعداد عند الرؤوس كونهم أدركوا أن الرأس يكتسب أهمية خاصة لأنه مشترك بين ضلعين، وكذلك لاحظوا أنه ليس من الضروري أن تكون الرؤوس أصغر ثلاثة أعداد وهذا يتضح من قول مجدي: "إذاً مش شرط تكون الرؤوس هي أصغر ثلاث أعداد! المهم أنه نحاول وضع أعداد صغيرة وكبيرة في نفس الجهة، وما نكتب عددين كبار في نفس الجهة مشان ما يكون المجموع أكبر من 10 للضلع" وأيده زملاؤه حيث أجاب الجميع: "آه، صحيح"

3- أحداث تعلم مجموعة (أ) من الإناث (أماني، بيان، أزهار، ميس):

حدثت مراحل تعلم الطلاب بالتسلسل الآتي:

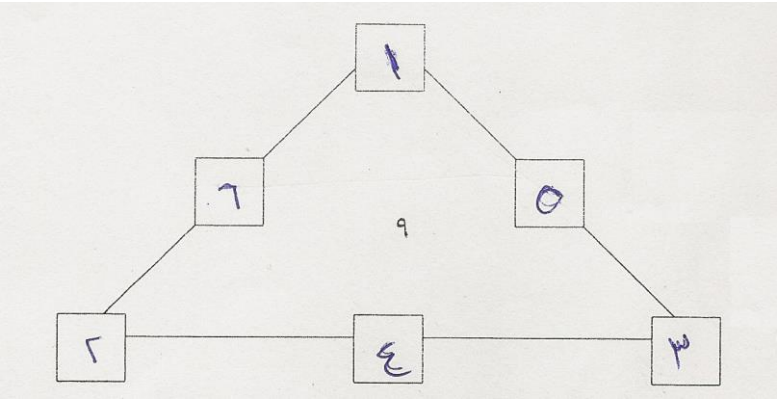
1. اتخاذ قرار بكيفية بدء التعلم
2. التفاوض للتوصل إلى معنى للظاهرة
3. التفاوض من أجل توزيع الأعداد بحيث مجموع أعداد كل ذراع يساوي10
    3. 1 التوصل إلى قرار بالاعتماد على تجربة سابقة
    3. 2 موقف عدم تيقن
4. بناء ملاحظات وتفسيرها
    4. 1 التوصل إلى معنى
    4. 2 تفسير الحديث بين الذاتي

وفيما يأتي نفصّل هذه المراحل:

1. اتخاذ قرار بكيفية بدء التعلم:

بادرت أماني لقراءة نص السؤال، فدعت بيان زميلاتها للتجريب فقالت: "تعالوا نجرّب" ووافقتها زميلاتها وبدأن التجريب، أي أن الطالبات اتخذن "قراراً" ببدء التعلم عن طريق "التجريب" وكان ذلك بمبادرة من الطالبة بيان.

بعد فترة قصيرة من التجريب، اقترحت بيان وضع الأعداد 6 ، 1 ، 2 على أحد الأضلاع لأن مجموعها9 (وقد وضعت 6 ، 2 عند الرؤوس و 1 في الوسط)، وبعد متابعة التجريب، قدمت أماني ثلاثة أعداد مجموعها9 فقالت: "3 ، 4، 2 تعطي 9" ووضعوها على أحد الأضلاع وقامت الطالبات ببعض التبديلات عند الرؤوس، والمربع المتبقي وضعن فيه العدد المتبقي وهو العدد5، عندها قامت الطالبات بتبديل موقع العددين1 و 6 بحيث أصبح العدد1 عند الرأس، وتوصلن للتوزيع المبين في الصورة أدناه.



2. التفاوض للتوصل إلى معنى للظاهرة:

وفيما يتعلق بملاحظات الطالبات حول السؤال وتفسيرهن لهذه الملاحظات، سألت الباحثة الطالبات: "أثناء تجربتكم للأعداد وتوزيعها على كل ذراع، وأثناء تبديل المواقع للأعداد, ماذا لاحظتم؟ ماذا فعلتم حتى نجحت محاولاتكم؟"، فأجابت جميع الطالبات: "جرّبنا.."، عندها دار النقاش الآتي:

- الباحثة: عندما وضعتم في أول محاولة 6 ، 1 ، 2 ثم بعد قليل بدّلتم مواقع العددين 6 ، 1 بحيث أصبحت 1 ، 6 ، 2 ، لماذا فعلتم ذلك؟ أي لماذا لم تنجحوا عندما وضعتم ال6 عند الرأس؟

– ميس: لأن مجموع الضلع وقتها رح يكون أكبر من 9.

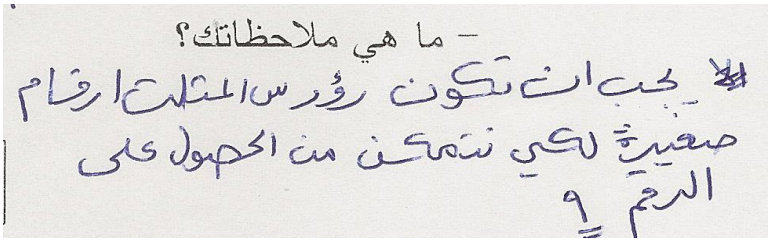
– بيان: أكيد!!

– أماني: لو كتبنا ال6 في الرأس السفلي مثلاً رح يكون مجموع القاعدة 3 ، 4 ، 6 أكبر من 9!!

– بيان: إذاً لازم تكون الرؤوس أعداد صغيرة.

– ميس: مشان ما نحصل على مجموع أكبر من 9 للذراع!

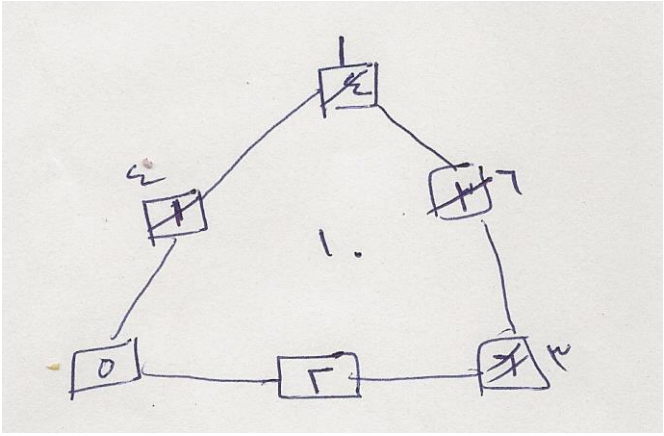
نلاحظ من خلال هذا النقاش، نلاحظ أن المجموعة توصلت إلى "معنى للظاهرة" عندما استنتجت أن وضع أعداد كبيرة عند الرؤوس سيعطي مجموعاً أكبر من المطلوب للضلع الواحد، وقامت المجموعة بتدوين هذه الملاحظة.



3. التفاوض من أجل توزيع الأعداد بحيث مجموع أعداد كل ذراع يساوي10

3. 1 التوصل إلى قرار بالاعتماد على تجربة سابقة:

في هذه المرحلة انتقلت الطالبات للفرع التالي فقالت أماني: " بدنا نوزع الأعداد بحيث مجموع الذراع 10"، فبادرت ميس ودعت زميلاتها للبحث عن ثلاثة أعداد مجموعها 10 من بين الأعداد المطلوب توزيعها فقالت: "تعالوا نشوف كيف بنحصل على 10 من هذه الأعداد"، وبعد المحاولة، قالت بيان: "1 + 4 + 5 = 10"، وقالت ميس: "6 ، 3، 1 تعطي10". وبعد المحاولات، اتخذت الطالبات "قراراً" بوضع العدد1 عند الرأس كونه عدداً مشتركاً بين مجموعتي الأعداد التي مجموع أعداد كل منها10 حيث قالت بيان: "الواحد مشترك بين المجموعتين 1 ، 4 ، 5 و 1 ، 3 ، 6 بنوضعه على رأس المثلث." وبقي العدد2 فوضعنه في المربع المتبقي وهنا احتاجت الطالبات إلى تبديل مواقع بعض الأعداد وكان التوزيع النهائي كما في الصورة أدناه.



نلاحظ في هذه المرحلة أن المجموعة "اعتمدت على تجربتها السابقة" لتوزيع الأعداد بحيث كانت الطالبات تضع العدد المشترك بين الثلاثيات –التي مجموع كل منها10– عند الرأس.

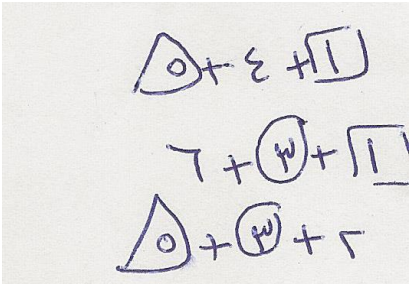
3. 2 موقف عدم تيقن:

عندما قرأت الطالبات هذا الفرع من السؤال، تساءلت أماني: "نفس الأعداد؟؟" وأجابتها زميلاتها: "آه!"، نلاحظ هنا أن أماني كانت "غير متيقنة" من المطلوب من السؤال وطلبت التأكيد من زميلاتها لمعرفة المطلوب.

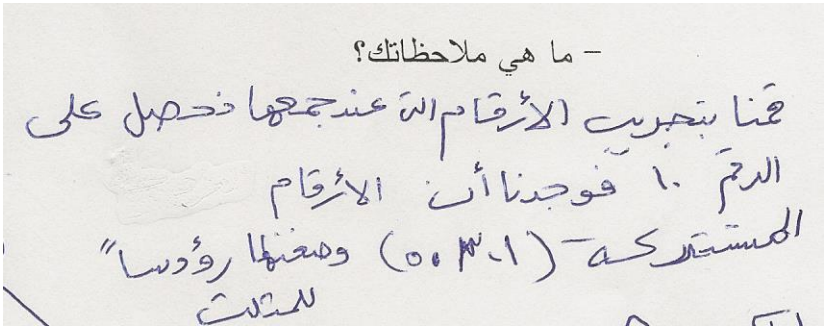
4. بناء ملاحظات وتفسيرها

4. 1 التوصل إلى معنى:

قرأت أزهار: "ما هي ملاحظاتك؟"، فقالت أماني: "العدد المشترك بين كل مجموعتين وضعناه عند الرأس" وقامت بيان بكتابة المجاميع الثلاثة كما تبين الصورة أدناه.



يتضح من الصورة أن الطالبات وضعن إشارتين متشابهتين حول العدد المشترك بين الثلاثيات الثلاثة التي وجدنها، بحيث يكون كل عدد مكرر بين ثلاثيين رأساً من رؤوس الشكل، وقد دونت الطالبات ملاحظتهن كما في الصورة أدناه.



4. 2 تفسير الحديث بين الذاتي:

خلال مرحلة التوصل إلى معنى، كان جزء من الحديث "حديثاً بين ذاتي"، حيث قالت أماني: "العدد المشترك بين كل مجموعتين وضعناه عند الرأس"، فاستخدمت الطالبات مصطلح (مجموعة) للدلالة على الثلاثي الذي مجموع أعداده10، فتقصد أماني هنا أن العدد الذي تكرر في الثلاثيين الذي وجدتهما الطالبات يوضع عند الرأس.

4- أحداث تعلم مجموعة (ب) من الإناث (شيماء، دعاء، مرجان، تسنيم):

حدثت مراحل تعلم الطلاب بالتسلسل الآتي:

1. اتخاذ قرار بكيفية بدء التعلم
2. التفاوض من أجل توزيع الأعداد بحيث يكون مجموع أعداد كل ضلع يساوي9
    2. 1 التفاوض للتوصل إلى قرار
    2. 2 تفسير الحديث بين الذاتي
3. التفاوض للتوصل إلى معنى
4. التفاوض من أجل توزيع الأعداد بحيث يكون مجموع أعداد كل ضلع يساوي10
    4. 1 التوصل إلى قرار بالاعتماد على تجربة سابقة
    4. 2 تفسير الحديث بين الذاتي
5. التوصل إلى ملاحظات وتفسيرها
    5. 1 التفاوض للتوصل إلى معنى
    5. 2 تفسير الحديث بين الذاتي

وفيما يأتي نفصّل هذه المراحل:

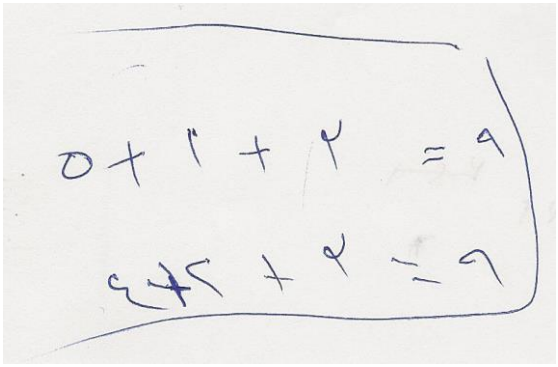
1. اتخاذ قرار بكيفية بدء التعلم:

بعد أن قرأت الطالبات السؤال، اقترحت شيماء طريقة لبدء الحل فقالت: "تعالوا نبحث بالأول عن أي ثلاث أعداد من المجموعة تعطينا 9" وبدأ الجميع يحاول البحث عن ثلاث أعداد من 1 إلى 6 مجموعها 9" ، نرى من هنا أن الطالبات توصلن إلى "قرار" بكيفية البدء بالحل.

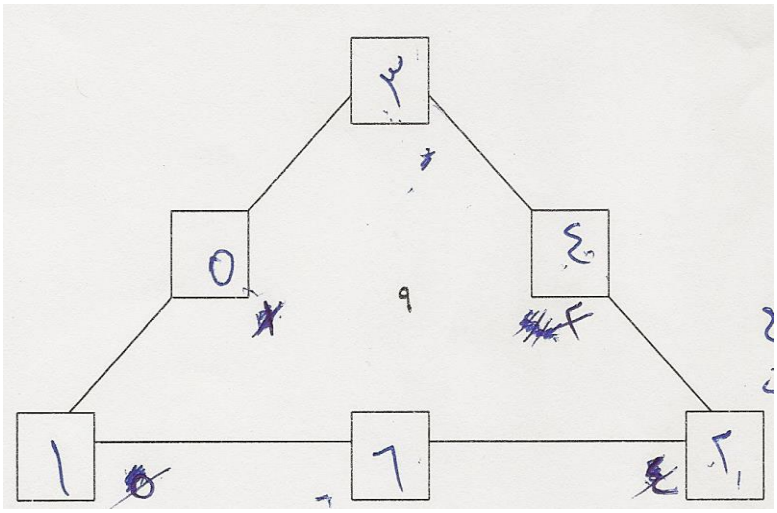
2. التفاوض من أجل توزيع الأعداد بحيث يكون مجموع أعداد كل ضلع يساوي9

2. 1 التفاوض للتوصل إلى قرار:

بعد فترة قصيرة من الوقت وجدت تسنيم ثلاثياً مجموع أعداده هو9 فقالت: "3، 5، 1 بعطوا 9"، وأيدتها شيماء بذلك وقدمت ثلاثياً آخر مجموع أعداده9 فقالت: "صح! وكمان 3، 2، 4 بعطوا 9.."



ولفتت دعاء نظر زميلاتها لملاحظة قائلة: "ال3 لازم تكون عند الرأس لأنها موجودة في المجموعتين اللي لقيناهم"، أي أن الثلاثيين من الأعداد التي وجدتها الطالبات والتي تعطي مجموع9 كلاهما تحوي العدد3، من هنا استنتجت دعاء أن العدد3 يجب أن يوضع عند الرأس لأن الرأس مشترك بين الذراعين. ثم قالت تسنيم: "لازم نبحث عن ثلاث أعداد تعطينا9 مشان الضلع الثالث" إلا أن شيماء اقترحت أمراً آخر فقالت: "ما ضل عنا غير ال6 بنكتبها في المربع اللي ضل وبنتأكد إنه 9" وأيدها الجميع: "آآه، صح"، لكن قاعدة الشكل لم يكن مجموعها9 فقامت الطالبات بتبديل موقع بعض الأعداد وتمكنّ من جعل كل ضلع مجموع أعداده9.



2. 2 تفسير الحديث بين الذاتي:

خلال التفاوض السابق، قالت تسنيم: "3، 5، 1 بعطوا 9" وكانت تقصد بذلك أن مجموع الأعداد 3، 5، 1 يساوي9، وكانت كلمة (بعطوا) متفقاً لغوياً بين الطالبات حيث ردت عليها شيماء: "صح! وكمان 3، 2، 4 بعطوا 9..".

3. التفاوض للتوصل إلى معنى:

في هذه المرحلة انتقلت الطالبات إلى تسجيل ملاحظاتهن، فبعد أن قرأت دعاء: "ما هي ملاحظاتك؟" قالت الطالبة مرجان: "الأعداد الصغيرة عند الرؤوس" وأيدتها زميلاتها وقلن: "صح!". سألت الباحثة: *"لماذا؟"* فأجابت شيماء: "لأنه لو كانت الأعداد الكبيرة عند الرؤوس رح يصير عنا مجموع أكبر من9 للضلع".

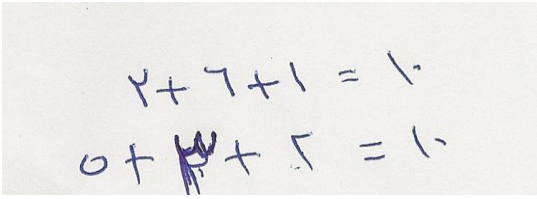
نرى من هذا النقاش أن الطالبات توصلنّ إلى أنه لو وضعن أعداداً كبيرة عند الرؤوس لكان مجموع أعداد الضلع أكبر من المطلوب.

4. التفاوض من أجل توزيع الأعداد بحيث يكون مجموع أعداد كل ضلع يساوي10

4. 1 التوصل إلى قرار بالاعتماد على تجربة سابقة:

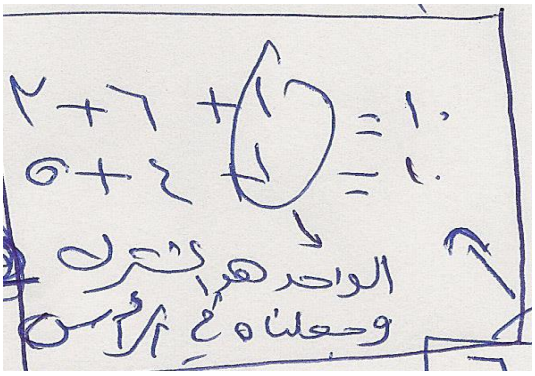
عندما انتقلت الطالبات للفرع التالي الذي يطلب توزيع نفس الأعداد بحيث يكون مجموع الضلع10 بدلاً من9، اعتمدت الطالبات على تجربتهن في الفرع السابق واعتمدن نفس الطريقة في الحل حيث قالت دعاء: "إذاً لازم ندوّر على 3 أعداد من 1إلى 6 تعطي 10" أي أن على الطالبات إيجاد ثلاثة أعداد مجموعها9، ووجدت دعاء الثلاثي (2، 3، 5)، وقالت مرجان: "1، 6، 3 بتعطي 10"،

وأوضحت شيماء أن العدد3 يجب أن يكون عند أحد الرؤوس كونه مشتركاً بين الثلاثيين اللذين وجدتهما الطالبات فقالت: "إذاً ال3 عدد مشترك..بنكتبه عند الرأس".

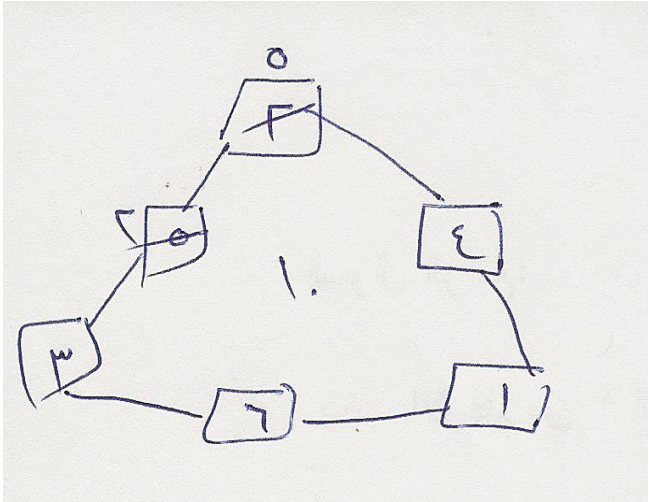


سألت الباحثة الطالبات: "كيف اخترتم الرؤوس 1، 2؟" فأجابت تسنيم: "ال لانه3 مشترك بين الأعداد اللي لقيناها، وال1 وال2 لأنهم صغار" ثم قالت الطالبات: "مشان ما يصير الضلع اكبر من 10". وأضافت شيماء ملاحظة أخرى: "أول ما نبدأ بالمحاولة نضع الأعداد الصغيرة عند الرؤوس وإذا احتجنا نبدل مواقع الأعداد.

ثم قدمت دعاء إثباتاً أنهم قاموا بتوزيع الرؤوس بطريقة صحيحة: "آه، صحيح لأننا لو كتبنا 10= 1،6، 3 و 10= 1، 4، 5 بنلاحظ انه العدد المشترك هو 1 وعشان هيك لازم يكون الرأس 1"



فهي تقول أن الطالبات لو قمن من البداية بكتابة ثلاثة ثلاثيات مجموع أعداد كل منها 10 وأخذن العدد المشترك بين كل ثلاثيين فهذه الأعداد المشتركة هي الرؤوس، حيث قالت تسنيم: "ال5 هو المشترك بين 3، 2، 5.....و5، 4، 1 فلازم يكون الرأس5".



4. 2 تفسير الحديث بين الذاتي:

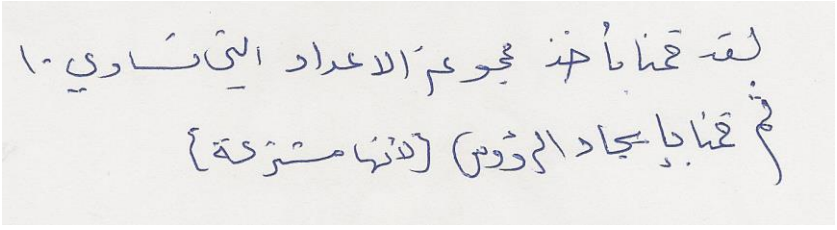
كان جزء من حديث الطالبات خلال التفاوض السابق "حديثاً بين ذاتي" فعندما قالت دعاء: "إذاً لازم ندوّر على 3 أعداد من 1إلى 6 تعطي 10" فهي تقصد بكلمة (تعطي) أن مجموع الأعداد الثلاثة التي عليهن إيجادها يجب أن يكون10.

وعندما قالت تسنيم: "ال لانه3 مشترك بين الأعداد اللي لقيناها" فهي تقصد بذلك أن العدد3 تكرر في الثلاثيين اللذين وجدتهما الطالبات.

5. التوصل إلى ملاحظات وتفسيرها

5. 1 التفاوض للتوصل إلى معنى:

بعد أن أنهت الطالبات توزيع الأعداد سألت الباحثة: "*ما هي ملاحظاتكم؟*" لاحظت الباحثة أن الطالبات بعد تجربتهن الثانية توصلن إلى طريقة أسهل وهي أنهم لو كتبن الثلاثيات الثلاثة التي أوجدنها ثم اخترن العدد المشترك بين كل ثلاثيين ووضعنه رأساً لكان من الأفضل. حيث أجابت شيماء: "بنبحث عن كل الاحتمالات اللي بتعطينا 10 باستخدام الأعداد من 1 إلى 6 ونضع العدد المشترك بين كل مجموعتين عند رأس، هيك أسهل لو انتبهنا من أول"



5. 2 تفسير الحديث بين الذاتي:

عندما قالت شيماء: "بنبحث عن كل الاحتمالات اللي بتعطينا 10 باستخدام الأعداد من 1 إلى 6" فهي تقصد بكلمة (الاحتمالات) الثلاثيات التي وجدنها، فكلمة الاحتمالات كانت "متفقاً لغوياً" بين الطالبات.

نلخص نتائج المجموعات المتعلقة بالسؤال الرابع في جدول (5).

جدول(5): تشابه المجموعات المختلفة واختلافها بما يتعلق بتعلمها وتعاونها خلال حل السؤال الرابع.

التشابه	الاختلاف	ملاحظات
– تشابهت مجموعتا الذكور والمجموعة (أ) من الإناث في بداية الحل، فبدؤوا "بتجريب" توزيع الأعداد، وبعد مرحلة من التفاوض ونجاحهم في التوزيع، بنوا ملاحظات تتعلق بالحل. – مراحل حل هذا السؤال كانت خالية من الصعوبات ومواقف عدم التيقن، واحتاجت المجموعات الوقت الأقل لحل هذا السؤال من بين بقية الأسئلة.	– المجموعة (ب) من الإناث بدأت الحل للفرع الأول بطريقة مختلفة، حيث بدأت مرحلة التفاوض باقتراح أحد الطالبات للبحث عن ثلاثيات من الأعداد المطلوب توزيعها بحيث يكون مجموع كل ثلاثي هو9، ثم أخذ العدد المشترك بين كل ثلاثيين ووضعه عند رأس من الرؤوس.	– لاحظت الباحثة أن أفراد المجموعات أثناء التفاوض كانوا يركزون على الأعداد عند الرؤوس، وأعطوها اهتماماً خاصاً إدراكاً منهم أن العدد عند الرأس يتم جمعه مع الأعداد في كلا الذراعين.

نتائج المقابلات

تصور الطلاب للعمل التعاوني:

اشتمل رأي أفراد المجموعات بالعمل التعاوني على أنه: إيجابي، ممتع، مشوق، جميل، مفيد لأفراد المجموعة.

فالنشاط التعاوني – كما وصفه بعض الطلاب– يؤثر على العمل بشكل إيجابي وهو مفتاح النجاح في الوصول إلى حل لأنه يؤدي إلى الحصول على أفكار متنوعة من أفراد المجموعة، حيث قال محمد: "لقد كان إيجابياً والتعاون هو مفتاح النجاح للحل"، أما مهدي فقال: "التعاون شيء إيجابي، لأن مجموعة عقول تفكر أفضل من عقل واحد"، وعبّر حكمت عن هذا بقوله: "التعاون أمر إيجابي لأنه يؤدي لطرح الكثير من الأفكار حول المسألة الرياضية والتي تساعد في حلها"، كذلك الطالب مجدي أيد هذا الرأي مبرراً تأييده بكون أفكار الطلاب ومهاراتهم تظهر بشكل أكبر خلال التعاون لأنهم يستفيدون من بعضهم البعض، فقال: "التعاون يفيد الجميع، ومهارات الأصدقاء تخرج أثناء التعاون"، وعبرت ميس عن هذا أيضاً فقالت: "مفيد لأننا نستعين ببعضنا".

وبعض الأفراد وصفوه بأنه ممتع ومشوق، حيث وصفه وليد قائلاً: "التعاون طريقة مشوقة وجميلة جداً"، وكذلك الطالبة بيان قالت: "ممتع جداً لأنه يساعد في فهم الأسئلة بشكل أكبر وأوسع"، وقد قالت دعاء: "ممتع لأنني قد أواجه صعوبة وصديقتي تساعدني للتغلب عليها".

أما الطالبة أزهار فوصفته: "ممتاز، لأنه يساعدنا في فهم السؤال"، وقد وصفته ميس بأنه: "جميل جداً" مبررة ذلك بقولها: "لأنني أتعرف لأفكار جديدة".

أحد الطلاب كان رأيه مختلفاً حيث وصفه "بالسلبي" لأنه إذا توصل أحد الطلاب لفكرة الحل فقد كان باقي أفراد المجموعة يأخذون الفكرة منه، أي أنه يقول أنهم يتوقفون عن البحث عن الفكرة والحل.

وخلال المقابلات، أشار بعض الطلاب في حديثهم عن النشاط التعاوني إلى دور "النقاش" وأهميته بين أفراد المجموعة، فقال زيد: "عند الاختلاف حول سؤال معين تزداد نظرتنا للسؤال عن طريق المناقشة، حيث نفهمه من النواحي المختلفة لفهم الزملاء له، فيزداد التوسع في السؤال"، وأضاف

حكمت: "النقاش يساعد على حل المسالة"، وقال مجدي: "عندما أكون غير قادر على فهم السؤال فإننا بالتعاون والنقاش نستطيع أن نفهمه من الزملاء".

أما الطالبة شيماء فقد أشارت إلى أن "النقاش" يساعد في التغلب على الصعوبة فقالت: "عندما أواجه مشكلة في فهم سؤال ما تساعدني زميلاتي فيه ونتناقش مع بعضنا للتغلب على الصعوبة".

وحول الصعوبات التي واجهت الطلاب أثناء العمل التعاوني، فقد أكد الطلاب أن العمل التعاوني ساعدهم في التغلب عليها، حيث أوضحوا أن أفراد مجموعاتهم تعاونوا وساعدوا بعضهم البعض ما ساعدهم على التغلب على الصعوبات من جهة والوصول للحل بشكل أسرع من جهة أخرى، وحول هذا، قال محمد: "كنا نفكر كلنا في السؤال وكان شخص يحل بداية السؤال والثاني يكمل ما سرّع الحل"، وأضاف زيد: "التعاون ساعدنا كثيراً في فهم السؤال وإيجاد جوابه بشكل أسرع". أما شريف فقال: "كان لدي بعض الصعوبات وساعدني زملائي فيها"، وكذلك الطالب بدر قال: "التعاون أحياناً يعطي أفكار وحلول وطرق متنوعة لإيجاد النتيجة بسرعة" ثم أضاف: "واجهت صعوبات وأرشدني إليها زملائي، حيث كنا نتناقش في كل ملاحظة ويعطي كلَ منا رأيه في الموضوع" ما يدل على تعاون أفراد المجموعة للتغلب على الصعوبات، وهذا التعاون بدوره يسرّع الوصول للحل. وأكدت الطالبة بيان تعاون أفراد مجموعتها قائلة: "كنا نتساعد جميعاً في كل الأسئلة" وأضافت ميس: "يزيد سرعة التوصل للحل". أما مرجان فقالت: "التعاون في حل المسائل يسهل حلها حيث نجمع أفكار الجميع ونجد الحل بشكل أسرع"، وأضافت دعاء: "يوفر الوقت ويسرع إيجاد الحل".

توقعات الطلاب عن تعاون الزملاء في المجموعة التعاونية:

أكد الجميع أنهم كانوا يتوقعون من زملائهم أن يتعاونوا مع بعضهم البعض، وقد أشار بعضهم أنه كان يتوقع هذه الدرجة من التعاون، وبعضهم قال أنه توقع أن يتعاون زملاؤه مع بعضهم البعض لكن ليس بهذه الصورة الكبيرة، أي أن التعاون الذي حصل بين الأفراد فاق توقعاتهم السابقة.

فمثلاً، الطالب محمد أبدى إعجابه من تعاون زملائه وقال أنه لم يتوقع حصول هذه الدرجة من التعاون، فقال: "كانوا ممتازين! ولم أتوقع ذلك". أيضاً الطالب بدر أعجِب بتعاون زملائه ونقاشهم فقال: "كانوا متعاونين كثيراً، والكل يبدي رأيه بنقاش هادئ". أما الطالب زيد فتوقع هذه الدرجة من التعاون حيث قال: "كان تعاوننا جيداً، وتوقعت هذا التعاون".

مهدي بدوره توقع حدوث هذا التعاون وبرره بأن أفراد المجموعة من الطلبة المجتهدين في الصف فقال: "توقعت هذا التعاون لأنهم طلاب مجتهدون"، وكذلك مجدي كان لديه نفس التبرير للتعاون الذي تم بين أفراد المجموعة فقال: "توقعت، لأنهم من المتفوقين في الصف ولديهم معلومات عديدة، وعملوا بجهد كبير ولم يقصروا". أيضاً الطالبة شيماء بررت حدوث التعاون بين الأفراد بقولها: "كنت أتوقع هذا التعاون لأننا جميعاً متقاربون في الأفكار والمستوى في الرياضيات"

أما حكمت ووليد فقالا أنهما كانا يتوقعان حدوث تعاون بين الأفراد بشكل أكبر قائلين: "كنت أتوقع أفضل من ذلك".

دور المعلمة:

حول رأي الطلاب المتعلق بدور المعلمة (الباحثة)، أوضح بعضهم أن التساؤلات التي واجهتهم كانت بسيطة وكان زملاؤهم في المجموعة يجيبونهم عليها، ولذلك لم يكونوا بحاجة للتوجه للمعلمة، فمثلاً، الطالب شريف قال: "لم أشعر أنني كنت بحاجة لسؤال الباحثة لأن زملائي أجابوا عن أسئلتي"، وكذلك الطالبة تسنيم قالت: "لم أتوجه للباحثة لأن زميلاتي ساعدوني".

بعض الطلاب واجهتهم بعض المواقف أو الصعوبات التي احتاجوا فيها المعلمة للتغلب عليها، فمثلاً بدر قال أنه احتاج المعلمة لمعرفة معنى مصطلح وهو "الإثبات الرياضي"، وكذلك الطالب مهدي أوضح أنهم عندما اختلفوا في الرأي ولم يستطيعوا اتخاذ قرار حول جواز تكرار عدد أم لا في أحد الأسئلة كان بحاجة للتوجه للمعلمة، حيث قال: "عند الاختلاف على أمر معين مثل: هل يجوز تكرار رقم؟".

أما طالبات المجموعة (ب) من الإناث جميعهم كانوا بحاجة للمعلمة في السؤال الثالث لأنهم لم يستطيعوا إيجاد تفسير للظاهرة لوحدهم، حيث قالت أماني: "في السؤال الثالث، لأننا لم نستطع التوصل للتفسير لوحدنا" وأضافت بيان: "في السؤال الثالث حيث احتجنا أن تقرب لنا تفسيره".

وبعض أفراد المجموعات أوضحوا أنهم كانوا ينتظرون التغذية الراجعة من المعلمة ليتأكدوا من صحة ما توصلوا له، فمثلاً، قالت مرجان: "كنت أشعر أنني بحاجة أن تؤكد لنا صحة التعميم الذي نتوصل له بعد حل السؤال"، وأوضحت دعاء هذا أيضاً حين قالت: "للتأكد من صحة التعميمات التي نتوصل لها".

نرى من هنا أن المعلمة بنظر الطلاب كانت أحياناً تمارس دور الملاحظ فقط حينما لم يكونوا بحاجة لسؤالها عن أمر ما، وأحياناً كانت المعلمة هي "الشخص العارف" حيث كانوا يتوجهون إليها عندما لم يستطيعوا التغلب على بعض الصعوبات، وأحياناً أخرى كانت المعلمة هي المرجع النهائي للطلاب للتأكد من صحة ما قاموا به من خطوات.

الفصل الخامس

النقاش

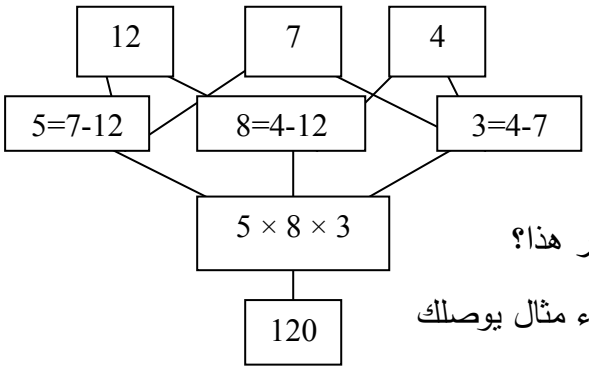
نناقش في هذا الفصل نتائج المراحل التي مرت بها المجموعات الأربع، وكذلك المقارنة بين المراحل التي مرت بها، وسنحاول عرض الاختلاف والتشابه في هذه المراحل.

أولاً: النقاش حول السؤال الأول

نص السؤال الأول:

خذ أي ثلاثة أعداد مختلفة، ثم احسب الفروق بين كل عددين من هذه الأعداد، أي أنه سيصبح لديك ثلاثة نواتج من الفروقات، الآن اضرب هذه الفروقات الثلاثة مع بعضها ولاحظ الناتج. مثل: 4، 7، 12. الفرق بين 4 و 7 هو (3)، الفرق بين 7 و 12هو (5)، الفرق بين 4 و 12 هو (8). ناتج ضرب هذه الفروقات هو $3 \times 5 \times 8 = 120$

خذ ثلاثة أعداد جديدة وأجرِ نفس العملية ولاحظ الناتج، كرر الخطوات لأعداد جديدة ولاحظ الناتج في كل مرة...



- ماذا تلاحظ؟
- هل تعتقد أن هذا صحيح دائماً؟
- إذا كانت إجابتك نعم، فهل تستطيع تفسير هذا؟
- وإذا كانت إجابتك لا، فهل تستطيع إعطاء مثال يوصلك لنتائج معاكسة؟

****

اعتمدت مجموعات الطلاب جميعها والتي حلت السؤال الأول على "التجريب" كبداية للحل، وجربت المجموعات عن طريق التفاوض عدداً من الأمثلة في محاولة لإيجاد علاقة بين النتائج، وقامت المجموعات بتصنيف الأمثلة التي تعاملت معها إلى أربعة أصناف كمرحلة من مراحل التفاوض: ثلاثة أعداد زوجية، ثلاثة أعداد فردية، عددان زوجيان والثالث عدد فردي، وعددان فرديان والثالث عدد زوجي.

بعد تجريب العديد من الأمثلة، تمكنت المجموعات من ملاحظة أن الناتج في جميع الأمثلة كان عدداً زوجياً وبذلك توصلت المجموعات لقرار بأن الناتج يكون زوجياً دائماً معتمدةً على أدلة تجريبية. وعند بحث المجموعات عن تفسير لملاحظتها لكي تتوصل إلى معنى، واجهت المجموعة (أ) من الذكور صعوبة في تفسير النتيجة أي كان هناك نقص في التقدم في الحل، وللتغلب على هذه الصعوبة استعانت المجموعة بالمعلمة للمساعدة في الوصول لتفسير الظاهرة. وكذلك المجموعة (ب) من الذكور واجهت صعوبة في التفسير بالرغم من أن الطالب مهدي قدم إشارة تساعد على التفسير عندما بيّن العلاقة بين كون الأعداد فردية والفروق بينها. لكن الطلاب لم يستطيعوا الاستفادة من هذه المعلومة لتفسير الحالات الأربع للأمثلة التي جربوها، وللتغلب على الصعوبة في التوصل إلى معنى وتفسير للظاهرة، قاموا بحساب الفروقات بين الأعداد في الأمثلة الأخرى، ثم مرّوا بمرحلة من التفاوض وتمكنوا من الوصول للتفسير الصحيح لجميع الحالات.

ترى الباحثة أن سبب مواجهة مجموعتي الذكور صعوبة في الوصول للتفسير يعود لعدم قدرتهم على الربط بين الفروقات بين الأعداد المختارة وحواصل الضرب لهذه الفروقات.

بالنسبة للمجموعة (أ) من الإناث فإنها توصلت لتفسير الظاهرة بسهولة حيث قدمت الطالبة بيان تفسيراً صحيحاً للأمثلة التي اختاروا فيها ثلاثة أعداد زوجية قالت: "هيها..شوفوا، لما نوخذ 3 أعداد زوجية بتكون الفروقات بينها زوجية.. ولما نضرب 3 أعداد زوجية رح يكون الناتج زوجي"، واعتمدت زميلاتها طريقتها في التفسير لتفسير باقي الحالات. وكذلك المجموعة (ب) من الإناث توصلت للتفسير بسهولة، حيث بادرت الطالبة دعاء لتفسير الحالة الأولى فقالت: "آه، في حال أخذنا كل الأعداد زوجية، رح تكون الفروقات الثلاث بينها زوجية... وعشان هيك بطلع الناتج زوجي× زوجي × زوجي = زوجي"، وتابعت المجموعة تفسير باقي الحالات.

لاحظت الباحثة أن مجموعتي الإناث كان لديهن قدرة أكبر في التعامل مع الأعداد، ولذلك توصلن إلى معنى للظاهرة بسهولة، وترى الباحثة أن الأمر يعتمد على صفات شخصية للطالب، ومنها تجربة الطالبات السابقة مع الأعداد، وفي هذا السؤال، يبدو أن الطالبة بيان من المجموعة (أ)، والطالبة شيماء من المجموعة (ب) هما من كانت لهما تجربة أغنى تتعلق بالأفكار المرتبطة بالسؤال وهي الأعداد الزوجية والفردية والفروقات بينها وحواصل ضربها، ولذلك هما من بيّنتا طريقة

التفسير لباقي أفراد المجموعة. وهذا التفسير يؤكده شونفيلد (Schoenfeld, 1992) حيث قال بأن الإنسان هو شخص معالج للمعلومات ويقوم بعملية الترميز متأثراً بالمحفزات التي جربها سابقاً.

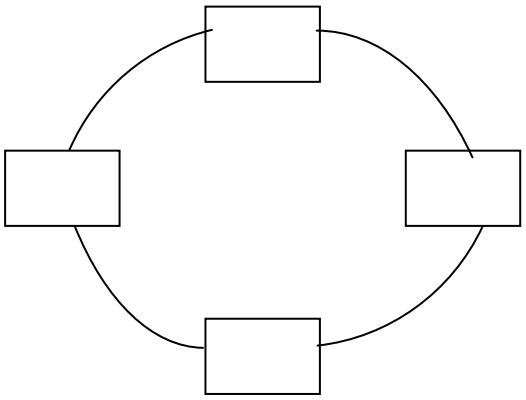
وبالنسبة لمجموعتي الذكور، لاحظت الباحثة أن الطلاب اكتسبوا خبرة من هذا السؤال واستفادوا منها في الأسئلة اللاحقة، فقد تعاملوا مع الأعداد بشكل أسرع وبطلاقة أكثر في السؤال اللاحق.

تقول (Ontario Ministry of Education, 2006) أن الطلاب إذا لم يكونوا قد تعرضوا لمشكلات سابقة مشابهة للمشكلة التي يحاولون إيجاد حل لها، يقوم الطلاب باستخدام المعلومات التي جمعوها من المشكلة التي يواجهونها والاستفادة منها في التخطيط للمشكلات المستقبلية.

رأينا من خلال هذا السؤال أن وظائف التفاوض فيه كانت: من أجل الوصول إلى معنى، من أجل إيجاد تفسير للظاهرة، للوصول إلى قرار بالاعتماد على أدلة تجريبية، ومن أجل تفسير أحد الأمثلة. أي أن التفاوض قدّم وظائف تعلم مهمة يشدد عليها باحثو التربية الرياضية والمؤسسات التربوية مثل: معرفة علاقات، وتفسير علاقات رياضية. فقد ذكر المجلس القومي لمعلمي الرياضيات (NCTM, 2000) في تقريره عن معايير العمليات الرياضية أن التفسير يعدّ عملية ضرورية في صف الرياضيات، أي أن العمل في مجموعات والتفاوض بين أفراد هذه المجموعات ساعد في عملية التفسير للعلاقات التي توصلوا لها. فقد ذكر (NCTM, 2000) في المستوى الأول من مستويات المحتوى وهو مستوى الأعداد والعمليات عليها (Number & Operations Standards) أن البرامج التعليمية المطبقة في المدرسة يُفترَض أن تجعل الطالب قادراً على فهم الأعداد، والعلاقات بين الأعداد، وكيف ترتبط العلاقات بعضها ببعض. وفي المستوى الثالث من مستويات العمليات الرياضية الذي وضعه (NCTM,2000) وهو مستوى الاتصال (Communication)، فيؤكد هذا المستوى أنه يمكن تنظيم وتثبيت وتقوية التفكير الرياضي من خلال عمليات الاتصال المختلفة سواء بين الطلاب أنفسهم، أو بين الطلاب والمعلم، وهذا الاتصال نرى أنه من الممكن تحقيقه من خلال تعاون الطلاب في مجموعات.

أما بالنسبة للقرارات التي اتخذتها المجموعات، فكانت قراراتها متعلقة بكيفية بدء التعلم، وكذلك اتخذت المجموعات قرارات بالاعتماد على أدلة تجريبية وقرارات بالاعتماد على شخص عارف وكانت القرارات تُتّخذ بعد التفاوض والمناقشة بين أفراد المجموعات.

وبالنسبة لمواقف عدم التيقن، لاحظت الباحثة عدم وجودها خلال حل هذا السؤال، باستثناء حالة عدم التأكد من نهاية الحل التي واجهتها المجموعة (أ) من الذكور بعد انتهائها من حل السؤال.

نص السؤال الثاني: اختر أربعة أعداد من 1 إلى 9 وضعها في المربعات في الشكل، بحيث يكون الفرق بين أي عددين متصلين مع بعضهما فرقاً فردياً. عليك أن تستعمل أربعة أعداد مختلفة. -ماذا تقول عن مجموع أي عددين متصلين؟ - إلى ماذا توصلت من هذه الملاحظات؟ - هل يمكنك تفسير النتائج التي توصلت لها؟ - إذا وضعت في المربع الأول عدداً فردياً، فإن العدد في المربع المرتبط به سيكون ..... وإذا وضعت في المربع الأول عدداً زوجياً فإن العدد في المربع المرتبط به سيكون ..... لذلك فإن مجموع أي عددين متصلين في الشكل هو ..... - هل تستطيع أن تثبت ذلك رياضياً؟	

ثانياً: النقاش حول السؤال الثاني

****

احتاجت المجموعة (أ) من الذكور وقتاً قصيراً للتوصل لفكرة الحل، حيث توصلوا لها بعد تفاوض قصير عن طريق الطالب محمد الذي أوضح أن الأعداد يجب أن توزع على المربعات بالتتابع: فردي، زوجي، فردي، زوجي، واتخذت المجموعة قراراً بهذا معتمدةً على المثال والأعداد به كدليل تجريبي، حيث قال الطالب محمد: "7، 4، 3، 2... فردي، زوجي، فردي، زوجي".

وترى الباحثة أن المجموعة (أ) توصلت للحل بسهولة وبسرعة لأنها استفادت من السؤال السابق في التعامل مع الأعداد الزوجية والفردية، أي أنهم لاحظوا أن كون العدد زوجياً أم فردياً يؤثر في

الحل، وكأنهم كان لديهم تصور مسبق أن الحل متعلق بالعدد من ناحية أنه زوجي أو فردي، أي أن المهام التي قام بها الطلاب نمّت قدرتهم على حل مشاكل وزودتهم بمجموعة من المهارات والعمليات الضرورية لهم، وهذا هو أحد الأهداف المهمة لحل المشكلات الرياضية.(Severin, 2009)

وهذه المجموعة اهتمت بالتأكد من تحقق شرط السؤال أثناء التفاوض، حيث أنهم بعد توزيع الأعداد على المربعات، عادوا وحسبوا الفروقات بين كل عددين متصلين للتأكد أن الفروقات فردية. وكانت المجموعة دقيقةً في ألفاظها خلال تفاوضها لحل هذا السؤال، حيث أنهم عندما كانوا يتحدثون عن مجموع العددين المتصلين، قال الطالب محمد: "مجموع أي عددين لازم يكون فردي"، فدقق الطالب زيد فقال "صحيح، بس لازم نحكي مجموع أي عددين (متصلين) فردي وليس أي عددين".

لكن هذه المجموعة واجهت صعوبة ونقص في التقدم عندما انتقلت إلى مرحلة الإثبات الرياضي للظاهرة، وهي أن المجموع والفرق كان فردياً لكل عددين متصلين لأن أحدهما فردي والآخر زوجي، ولم يفهموا المقصود من مصطلح (إثبات رياضي)، ولجؤوا للمعلمة لطلب المساعدة لكي يتغلبوا على هذه الصعوبة.

وبعدما فهموا المقصود من الإثبات الرياضي، بدأت المجموعة التفاوض للتوصل إلى معنى وتفسير للظاهرة حيث بدؤوا البحث عن الإثبات الرياضي، ولاحظت الباحثة خلال هذه المرحلة وجود مشكلة لدى الطلاب في استخدامهم للرموز الرياضية، حيث استخدموا نفس الرمز "ك" للعددين الفردي والزوجي فقالوا الفردي: 2ك+1 والزوجي 2ك، وحول هذا الموضوع، سألت الباحثة الطلاب لماذا يستخدمون نفس الرمز للعددين، فقال أحدهم: " ك لأي عدد.. شو الداعي إني أجيب رمز ثاني؟!"، وقال آخر: "لما نقول 2ك يعني أي عدد زوجي، ولما نقول 2ك+1 يعني أي عدد فردي لأنها ك بتتغير"، وعندما قالت الباحثة أن الكتابة بهذه الصورة تعني أن العددين متتاليين فقال أحدهم: "احنا ما افترضنا انها ك تضل نفسها لأنها بتتغير".

وبشكل عام، ترى الباحثة من واقع عملها كمدرسة رياضيات أن غالبية الطلاب يواجهون صعوبة في التعامل مع الرموز الرياضية. فبالرغم من أن الرموز الرياضية تعدّ مكونات أساسية في اللغة الرياضية والتي توفر إمكانية التواصل الرياضي للأشخاص، إلا أنها تسبب تشويشاً كبيراً لدى

الطلاب.(Rubenstein & Thompson, 2001)، فالخبراء الرياضيون أو معلمو الرياضيات قادرون على العمل باستخدام الرموز الرياضية، وقادرون على رؤية الرياضيات من خلال تمثيلها الرمزي، بينما الطلاب – في الغالب– يجدون صعوبة كبيرة في ذلك وهم بحاجة لإبلاغهم بكيفية رؤية هذه الرموز وكيفية التفسير باستخدام الرموز الرياضية. (Bakker, Doorman, & Drijvers, 2003; Kinzel, 1999; Stacey & MacGregor, 1999)

وبالنسبة للرمز "ك"، فلم يوضح الطلاب ما هو هذا الرمز، فسألتهم الباحثة عنه فأجاب الطالب محمد بأنه "عدد صحيح"، إذاً نلاحظ أن الطلاب خلال مرحلة التفاوض كانوا يعرفون ما هو هذا الرمز وكان متفقاً لغوياً بينهم، إلا أنهم لا يعطون أهمية لكتابة هذه التوضيحات أثناء الحل.

وبعد أن أنهى الطلاب حل تفاوضهم، سألت الباحثة عن عدم توضيحهم للرمز " ك" كتابةً أثناء الحل، فأجابوا أنه "ليس أمراً ضرورياً"، فالطلاب بشكل عام أثناء حلهم لا يفضلون توضيح ما يفكرون به، أو تفسير ما يكتبونه أثناء الحل، بل يفضلون بدلاً من هذا إيجاد الجواب أو الحل ومن ثم التقدم نحو بقية الأسئلة. (Colton, 2010)

وترى الباحثة أن عدم مطالبة المعلم للتلاميذ بمثل هذه التفصيلات أثناء النقاش والحل في غرفة الصف وفي الاختبارات يعد من أسباب إهمال الطلاب لها واعتقادهم أنها "غير مهمة".

المجموعة (ب) من الذكور أيضاً تفاوض أفرادها لوقت قصير وتوصلوا لفكرة الحل عن طريق الطالب حكمت حيث قال: "زوجي.. فردي.. زوجي.. فردي"، أي أنه أشار لتوزيع الأعداد بالتتابع بين فردي وزوجي، واهتمت المجموعة بالتأكد من تحقق شرط السؤال، حيث أنهم بعد توزيع الأعداد على المربعات، عادوا وحسبوا الفروقات بين كل عددين متصلين للتأكد أن الفروقات فردية.

واجهت هذه المجموعة صعوبة ونقص في الفهم والتقدم في الحل عندما وصلوا للفرع المتعلق بالإثبات الرياضي، حيث ظنّ أحد الطلاب أن الإثبات يكون عن طريق كتابة مزيد من الأمثلة، ولم يكن هناك أية أفكار لدى باقي أفراد المجموعة عن الإثبات الرياضي، ولذلك، قامت الباحثة بطرح أسئلة على الطلاب لسبر غورهم ومساعدتهم في التوصل إلى المقصود من الإثبات الرياضي، وحول هذا الموضوع، يقول (Epp, 2003) أن استخدام مثال كبرهان غير رسمي informal proof من قبل بعض المعلمين يجعل الطلاب يظنون أن ذلك دليل على صحة الظاهرة التي هم

في صدد إثباتها وأنه يُعد برهاناً. منطقياً، إثبات أن جملة رياضية ما صحيحة عند أخذ حالة معينة لا يعني إثبات الظاهرة لجميع الحالات.

وبعد أن أدركوا المقصود من الإثبات الرياضي، بدأت مرحلة التفاوض للتوصل إلى تفسير للظاهرة، وأثناء هذه المرحلة، تكررت نفس المشكلة في الرموز التي ظهرت لدى المجموعة السابقة، حيث استخدم الطلاب نفس الرمز (ك) في رمزهم للعددين الزوجي والفردي أي 2ك، 2ك+1، وهذا ليس صحيحاً من ناحية رياضية، فكان عليهم أن يستخدموا رمزاً مختلفاً في العدد الفردي عن العدد الزوجي، وكذلك كان عليهم أن يوضحوا ما هو الرمز (ك).

وبعد إنهائهم التفاوض وتوصلهم للحل، تناقشت الباحثة مع طلاب هذه المجموعة وسألتهم عن استخدامهم لنفس الرمز وعدم استخدامهم رمزاً مختلفاً لكل عدد، فأبدوا تعجبهم من قول الباحثة، وأجابوا أنه ليس هناك داعي لاستخدام رمز مختلف لأن ك متغير وقيمته تتغير من عدد لآخر.

وسألت الباحثة الطلاب أيضاً: "ما هو الرمز ك؟" وأجاب جميع الطلاب أن "ك" عدد صحيح، ولكنهم لم يكتبوا ذلك أثناء حلهم، والسبب في ذلك –حسب قولهم– أنه لا داعي لذكر هذه التفاصيل كما قال أفراد المجموعة (أ) من الذكور، وأضاف أحد الطلاب أن المعلم لا يحاسب على هذه التفصيلات في الاختبارات، نرى إذاً أن الطلاب خلال تفاوضهم وحلهم للسؤال كانوا يعرفون ما هو هذا الرمز وكان ذلك متفقاً لغوياً بينهم إلا أنهم لا يرون ضرورةً لتوضيح ماهيّته.

أيضاً المجموعة (أ) من الإناث توصلت للحل بسهولة بعد مرحلة قصيرة من التفاوض، وكذلك تأكدت الطالبات من تحقق شرط السؤال بأن الفروق بين الأعداد هي فروق فردية.

وعندما انتقلت الطالبات لمرحلة البحث عن تفسير للظاهرة عن طريق محاولة الإثبات الرياضي للظاهرة، لم يكن لديهن صعوبة في ذلك كما حدث مع مجموعتي الذكور، إلا أن ظاهرة استخدام الرمز ك للعددين الفردي(2ك+1) والزوجي(2ك) أثناء الحل تكررت لدى هذه المجموعة أيضاً، وبعد نقاش مع الباحثة أدركت المجوعة أن عليها استخدام رمزين مختلفين.

لكن الطالبات في هذه المجموعة وضّحن أثناء التفاوض أن الرموز التي استخدمنها هي رموز لأعداد صحيحة وقامت الطالبات بكتابة ذلك، أي أن هذه المجموعة اهتمت بالتفصيلات التي لم تولي لها مجموعتا الذكور اهتماماً خلال مرحلة التوصل إلى تفسير للظاهرة.

وفيما يتعلق بالمجموعة (ب) من الإناث، تمكنت المجموعة من حل السؤال بسرعة حيث تفاوضت الطالبات لفترة قصيرة ثم توصلنَ لفكرة كتابة الأعداد بالتتابع من ناحية زوجي وفردي، وكذلك تأكدت المجموعة من أن الفروقات فردية بين الأعداد التي اختارتها الطالبات.

أما بالنسبة للإثبات الرياضي، فقد كان هناك صعوبة لدى إحدى الطالبات في فهم المقصود منه، فوضحت إحدى الطالبات للمجموعة المقصود من الإثبات الرياضي أي أن المجموعة تغلبت على الصعوبة من خلال التفاوض والتعاون بين الطالبات. وأثناء التفاوض والحل، لم توضح الطالبات ماهية الرمز المستخدم، تماماً كما حدث مع مجموعتي الذكور، إلا أن الطالبات هنا أجبنَ أنه رمز للعدد الصحيح عندما سألتهم الباحثة عنه ما يشير إلى أن هذا الرمز كان "متفقاً لغوياً" بين الطالبات في هذه المجموعة ولا ترى المجموعة أهمية لكتابة ذلك. وأضافت إحدى الطالبات أن كتابة هذا التفصيل ليس ضرورياً! ونرى أن هذا "التعبير" تكرر لدى كل المجموعات!

وترى الباحثة أن السبب في عدم اكتراث الطالبات في ذكر تفصيلات الرموز خلال التفاوض والحل يكمن في عدم الاعتياد على تفصيل كل أمر في الحل، وبعض المعلمين لا يحاسبون الطلاب على مثل هذه الأمور في الامتحانات ما جعل الطلاب يعتقدون أنها غير مهمة.

ويقول كولتون (Colton, 2010) أن توضيح الطلاب وتفسيرهم لما يكتبونه أثناء حلهم يعدّ أمراً مفيداً لكل من الطالب والمعلم، فالطالب إذا قام بتوضيح وتفصيل الحل فإن مصدر الخطأ يمكن اكتشافه بسهولة إذا توصل الطالب لنتيجة غير مقبولة، وأن الطالب في حالة كتابته تفصيلات الحل، فيمكنه أن يصحح خطأه معتمداً على نفسه بصورة أفضل منها في حالة عدم كتابة التفصيلات. ومن جهة أخرى، فإن كتابة الطالب لتفصيلات الحل وتوضيحه يزود المعلم بفرصة لتحديد مصدر الصعوبة عند الطالب وتحديد المشكلة بشكل أفضل.

ويضيف (Colton, 2010) أن مطالبة التلاميذ بالتعبير عن أفكارهم وتوسيعها عن طريق تزويد تفسير وشرح لها خلال التفاوض والمناقشة يساعدهم في تحقيق مُلكية لأفكارهم واعتقاداتهم، وهنا يعدّ الاتصال الذي يمكن تحقيقه من خلال النقاش والعمل في مجموعات أداةً لبناء ثقة الطالب بنفسه وبالتالي يمكنه التعبير عن أفكاره بشكل أفضل.

وعندما سألت الباحثة المجموعة عن استخدام نفس الرمز للفردي والزوجي؟" فكان هذا السؤال إشارة للطالبات بأن هناك خلل في الرموز المستخدمة حيث قالت إحدى الطالبات: "لاا، ما بصير نستخدم نفس الرمز لأنه إذا نفس الرمز بكونوا متتاليين وإحنا مش شرط عنا يكونوا متتاليين" ونرى أن هذه الطالبة ربما يكون لها أغنى تجربة من بين زميلاتها حيث وضحت لزميلاتها لماذا لا يجوز استخدام نفس الرمز للعددين. ثم قامت الطالبات بتغيير الرموز وتعديل الحل.

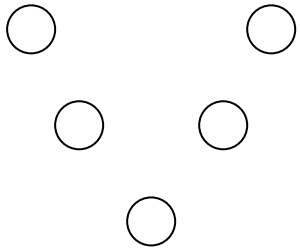
ونرى أن التفاوض لدى المجموعات في هذا السؤال خدمها في بناء ملاحظات حول الظاهرة، ثم محاولة تفسيرها، وكذلك في البحث عن إثبات رياضي من أجل التوصل إلى تفسير للظاهرة. وكانت المجموعات تتغلب على مواقف عدم التيقن التي تواجهها بعد التفاوض بين أفراد المجموعة أحياناً وهذا أمر يؤيده التربويون، فتقول (Ontario Ministry of Education, 2006) أن التفاوض والنقاش بين الطلاب يزودهم بفرصة لطرح أسئلة ومشاركة الأفكار واقتراح الاستراتيجيات وكذلك يساعدهم في الشرح والتفسير ما يساعدهم في التمييز بين الاستراتيجيات الفعالة وغير الفعالة لحل المشكلة.

وأحياناً أخرى كان الطلاب يتغلبون على الصعوبة عن طريق التفاوض بين المجموعة والمعلمة حول الموقف الذي يواجههم ومن ثم يتخذون قرارهم.

ثالثاً: النقاش حول السؤال الثالث

نص السؤال الثالث:

في الشكل المرسوم جانباً، وزع الأعداد من 1 إلى 5 على الدوائر بحيث يكون الذراعان في الشكل V لهما نفس المجموع.



- كيف يمكنك إيجاد طريقة أخرى لتوزيع هذه الأعداد؟
- كم عدد الحلول الممكنة لذلك (بكم طريقة مختلفة يمكنك توزيع هذه الأعداد تحت هذه الشروط)؟
- ماذا تلاحظ في جميع الحلول التي أوجدتها؟
- كيف يمكنك شرح وتفسير ما تراه؟

- كيف تقنعنا أنك قد وجدت جميع الحلول الممكنة؟
- ماذا يحدث إذا استخدمت الأعداد من 2 إلى 6؟
- ماذا الذي يمكنك اكتشافه في شكل V الذي طول كل من ذراعيه هو4 بدلاً من 3 واستخدمت الأعداد من1 إلى 7؟

****

تشابهت بداية الحل لدى مجموعتي الذكور والمجموعة (ب) من الإناث حيث بدؤوا التفكير عن طريق التجريب وذلك بوضع العدد1 عند رأس الشكلV، وترى الباحثة أنهم بدؤوا التجريب بالعدد1 كونه أصغر الأعداد الموجودة، والطلاب دائماً يحبون التعامل مع الأعداد الصغيرة ظناً منهم أنها تسهل الحل، وهذا ما تؤكده (Ontario Ministry of Education, 2006) بقولها أن حل مسألة مشابهة للمسألة الأصلية باستخدام أعداد أبسط هو أحد الاستراتيجيات المناسبة للطلاب لمساعدتهم في البحث عن حل لها، فغالباً قيمة الأعداد المعطاة في المسألة تمنع الطلاب من التعامل مع المشكلة بسهولة، أي أن تعديل الأعداد في المشكلة وتبسيطها يجعل فهم وتحليل المشكلة أمراً أبسط للتعامل معه، واستخدام أعداد أصغر يساعد الطلاب في التركيز على الإجراء الواجب أخذه دون تشتيت انتباههم بالأعداد الكبيرة التي قد يكون من الصعب حسابها بالنسبة لهم.

أما المجموعة (أ) من الإناث بدأت بالتفاوض والتجريب لإيجاد حل دون وضع عدد محدد عند الرأس، وفكرت الطالبة بيان بطريقة مختلفة حيث وجدت مجموعتين من الأعداد تعطي نفس المجموع ثم أخذت الطالبات العدد المشترك بين مجموعتي الأعداد ووضعنه عند الرأس، حيث قالت بيان: "3 ، 4 ، 1 = 8 و 5 ، 2 ، 1 = 8" وأضافت ميس: "إذاً 1 عند الرأس لأنه مشترك".

وعندما انتقلت المجموعات للتفاوض والنقاش لإيجاد توزيع جديد للأعداد، جربت المجموعة (أ) من الذكور توزيع الأعداد مع وضع العدد5 عند الرأس، وكان ذلك اقتراحاً عشوائياً من أحد الطلاب، بينما المجموعة (ب) من الذكور أخذوا فترة من الوقت وهم يتفاوضون محاولين إيجاد توزيع آخر للأعداد مع بقاء العدد1 عند الرأس، وواجهوا صعوبة في إيجاد حل آخر ولم يدركوا أن عليهم تغيير العدد عند الرأس وأرشدتهم الباحثة عن طريق طرح السؤال "هل جربتم تغيير العدد عند الرأس؟" وبعد هذه الإشارة التي قدمتها الباحثة لهم، اختاروا العدد2 لوضعه عند الرأس، كونه العدد التالي للعدد1 الذي جربوه سابقاً.

أما الإناث في كلا المجموعتين، فاخترن العدد2 لوضعه عند الرأس للبحث عن توزيع جديد للأعداد كونه العدد التالي للعدد1 الذي اخترنه في الفرع السابق، وعندما لم يتمكنَّ من توزيع الأعداد مع وضع العدد2 عند الرأس قُمنَ باختيار العدد التالي وهو العدد3 ووضعنه عند الرأس ووجدْنَ توزيعاً جديداً.

لاحظت الباحثة أن مجموعتي الإناث كانتا تفكران أثناء التفاوض للوصول إلى حل بشكل متسلسل ومرتب أكثر من مجموعتي الذكور، حيث كان اختيار الأعداد بشكل متسلسل بحيث جربت مجموعتا الإناث العدد1 ثم العدد2 وهكذا..

وبالنسبة لمرحلة التفاوض لتفسير الظاهرة، كانت المجموعة (أ) من الذكور هي أسرع المجموعات وصولاً للتفسير بعد التفاوض والنقاش بين أفراد المجموعة، حيث أنهم بعد عثورهم على توزيع للأعداد مع وضع العدد1 عند الرأس، وتوزيع آخر مع وضع العدد5 عند الرأس، تمكنوا من تفسير الظاهرة في السؤال، وأوضحوا أن عليهم وضع عدد فردي عند الرأس كي يستطيعوا قسمة باقي الأعداد إلى مجموعتين بين الذراعين بحيث يكون لهما نفس المجموع، وربما يكون السبب وراء سرعة هذه المجموعة في التوصل إلى تفسير للظاهرة أنها تمتلك سرعة في التفكير ودقة في الملاحظة بنسبة أكبر من باقي المجموعات. فالطلاب الذين يفكرون بطلاقة وسلاسة حول المشكلة يمكنهم التفكير بطرق جديدة وبديلة تساعدهم في الوصول للحل بسرعة، وربما يكون الطلاب قد تعرضوا لفرص تعلم مختلفة عن تلك التي تعرضت لها باقي المجموعات وبالتالي مخرجات التعلم عندهم كانت مختلفة. (Rigleman, 2007)

ولاحظت الباحثة أن هذه المجموعة كانت دقيقة في الكتابة، حيث أنهم ومع استخدامهم مصطلح "عامل مشترك" أثناء التفاوض، إلا أنهم استبدلوه بمصطلح "العدد المشترك" عند الكتابة، ما يدل على أن هذا المصطلح يُعدّ متفقاً لغوياً بينهم فقط، وعند الكتابة استبدلوه بالمصطلح المناسب، فتعبير "عامل مشترك" لا يصلح هنا من ناحية رياضية.

وبما أنهم توصلوا لتفسير الظاهرة بسهولة، قاموا باستخدام نفس طريقة الحل في تفاوضهم لحل الفرعين الآخرين، حيث كانوا يبدؤون الحل بجمع الأعداد المطلوب توزيعها ومعرفة إذا كان زوجياً أم فردياً لاختيار العدد عند الرأس بناء على المجموع.

أما المجموعة (ب) من الذكور، فكانت بداية توصلهم للتفسير عندما توقّع أحد الطلاب أن العدد عند الرأس يجب أن يكون فردياً بعد إيجادهم توزيعين صحيحين بوضعهم عدداً فردياً عند الرأس، حيث قال: "تعالوا نجرب ال5 لأنه ال1 وال3 زبطوا وهما فرديين"، ثم تفاوض الطلاب ونجحوا في ذلك فعلاً، وتوصلوا للتفسير الصحيح، وبالتالي تمكنوا من حل الفرعين الآخرين بسهولة لأنهم تمكنوا من تفسير الظاهرة، والقدرة على توقع أمر ما أثناء حل المسائل الرياضية يُعتبر أمراً مفيداً، والطالب الذي استطاع بناء توقع حول المسألة لا بد أنه تعرض لخبرة كبيرة تتعلق بحل المشكلات الرياضية، حيث أن حل المشكلات الرياضية تعد عملية أساسية يصبح الطلاب من خلالها قادرين على بناء توقعات عند حل مشكلات رياضية. (Ontario Ministry of Education. 2002)

مجموعتا الإناث كلاهما، وبعد ملاحظتهما بأن الأعداد التي يمكن وضعها عند الرأس هي أعداد فردية، توصلتا إلى تفسير (خاطئ) للظاهرة وهو أن غالبية الأعداد المطلوب توزيعها – وهي من 1 إلى 5– هي أعداد فردية، ولذلك العدد عند الرأس يجب أن يكون فردياً حتى يتساوى توزيع باقي الأعداد بين الذراعين من ناحية الفردي والزوجي، أي أن يحصل كل ذراع على عددين أحدهما فردي والآخر زوجي بالإضافة للرأس.

وعندما تفاوضت الطالبات من أجل حل الفرع الذي يطلب توزيع الأعداد من 1إلى 7، أدركن أن تفسيرهن خاطئ، فغالبية الأعداد هنا كانت أعداداً فردية إلا أن الطالبات لم يجدنَ أي حل للسؤال عندما وضعن عدداً فردياً عند الرأس، وعندما وضعن عدداً زوجياً نجحن في حل السؤال، فاكتشفن أن التفسير الذي قدّمنه ليس صحيحاً.

وعندما لم تتمكن المجموعة (أ) من الإناث من إيجاد تفسير للظاهرة وواجهن صعوبة في التقدم والتطور، توجهت المجموعة للمعلمة لطلب المساعدة، فاقترحت عليهن: "ما رأيكم لو قمتم بجمع الأعداد في كل مجموعة من المجموعات الثلاث.."، وذلك كان إشارة لمساعدة الطالبات، فقامت الطالبات بالتفاوض وجمع الأعداد المطلوب توزيعها في الفرع الأول – من 1 إلى 5– والناتج كان15، وكذلك الأعداد في الفرع الثاني – من 2 إلى 6 – ووصلن لناتج 20. وقبل جمع الأعداد من 1 إلى 7، ظهرت أول ملاحظة عن طريق الطالبة بيان حين قالت: "شوفوا ال15 فردي ونجحت الرؤوس الفردية فيه، و ال20 زوجي ونجحت الرؤوس الزوجية فيه"، وبعد التفاوض قدمت المجموعة التفسير الصحيح للظاهرة.

وتكرر الموقف لدى المجموعة (ب) من الإناث حيث واجهت الطالبات صعوبة في التوصل لأي تفسير للظاهرة ونقص في التقدم والتطور، فتوجهت الطالبات للمعلمة لطلب المساعدة، فقالت لهن: "لو جمعنا الأعداد المطلوب توزيعها في كل فرع؟... ما هو الناتج؟".

بعدما قامت الطالبات بجمع الأعداد في الفروع الثلاثة، ظهرت أول فكرة للوصول للتفسير الصحيح للظاهرة عندما قالت شيماء: "ملاحظين إنه المجموع نفس الرؤوس؟!"، وبعد هذه الملاحظة، تفاوضت الطالبات وتناقشنَ ثم تمكنت المجموعة من تقديم التفسير الصحيح.

نلاحظ أن مجموعتي الذكور كانتا الأسرع في التوصل للتفسير. أما بالنسبة لمجموعتي الإناث، فالمجموعة (أ) كانت أسرع قليلاً من المجموعة (ب)، حيث لاحظنا أن المجموعة (أ) احتاجت جمع الأعداد في فرعين فقط للتوصل لأول ملاحظة توصل للتفسير الصحيح، أما المجموعة (ب) فقد احتاجت جمع الأعداد في الفروع الثلاثة للتوصل لأول ملاحظة توصل للتفسير الصحيح.

وترى الباحثة أن السبب في ذلك هو أن مجموعتي الذكور كانوا يفكرون خلال الحل بشكل منطقي أكثر حيث أنهم لم يتوصلوا إلى ملاحظة فقط، بل بحثوا عن تفسير لها وهذا ما جعلهم يتوصلون لتفسير الظاهرة بشكل صحيح، أما مجموعتا الإناث فلم يضعن سبباً منطقياً لملاحظتهن ولم يضعن تفسيراً واضحاً لها، ولذلك توصلن إلى تفسير خاطئ واعتمدنه في باقي الفروع. وبما أن مجموعتي الإناث أخطأن نفس الخطأ وكان لهما نفس التاريخ في التعلم حيث تعلّمنَ في مدرسة واحدة وعلى يد نفس المعلمات، فهذا قد يدل على أن الخبرة التي تعرضت لها الطالبات في مثل هذه المشكلات أقل من الخبرة التي تعرضت لها مجموعتا الذكور.

نرى في هذا السؤال أن التفاوض خدم المجموعات في التجريب عندما اختاروه كطريقة لبدء الحل، وعند البحث عن حلول جديدة حيث تفاوض أفراد كل مجموعة من أجل التوصل لطريقة جديدة لحل السؤال عن طريق محاولة التوصل لتوزيع جديد للأعداد، وبعد أن وجدت المجموعات حلولاً جديدة، خدمهم التفاوض في التوصل لتفسير للظاهرة.

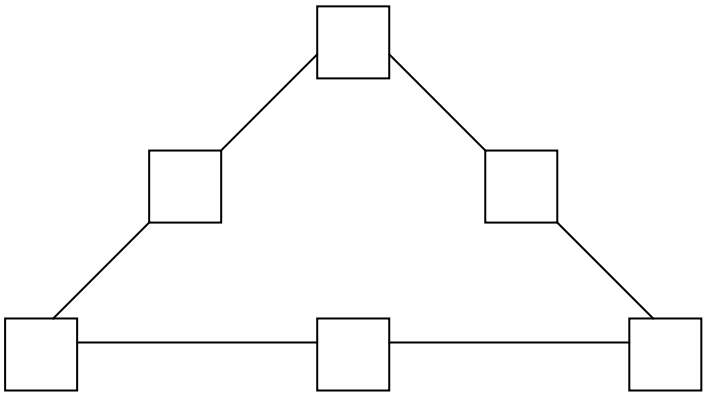
وكما أسلفنا في النقاش حول السؤال السابق، نرى أن التفاوض قدّم وظائف تعلم مهمة يشدد عليها باحثو التربية الرياضية والمؤسسات التربوية مثل: معرفة علاقات، وتفسير علاقات رياضية. فقد ذكر المجلس القومي لمعلمي الرياضيات (NCTM, 2000) في تقريره عن معايير العمليات الرياضية والذي تحدثنا عنه في السؤال السابق.

وجاءت مراحل حل هذا السؤال خالية من مواقف عدم التيقن، إلا أن مجموعتي الإناث واجهن صعوبة في إيجاد تفسير للظاهرة، أي كان لديهما نقص في التقدم والتطور في مرحلة تفسير الظاهرة، وتوجهت المجموعتان للمعلمة لطلب المساعدة، فاقترحت فأعطتهما الباحثة إشارة للقيام بجمع الأعداد في كل مجموعة من المجموعات الثلاث لمساعدتهما في التغلب على الصعوبة.

رابعاً: النقاش حول السؤال الرابع

نص السؤال الرابع:

رتب الأعداد من 1 إلى 6 بحيث يكون مجموع كل ضلع من الأضلاع الثلاثة مساوياً للعدد 9 المكتوب في وسط الشكل.



- كيف يمكنك فعل ذلك؟
- ما هي ملاحظاتك؟
- رتب هذه الأعداد بحيث يكون العدد المكتوب في وسط الشكل هو 10.
- ما هي ملاحظاتك؟

****

بدأت مجموعتا الذكور والمجموعة (أ) من الإناث الحل والتفاوض في الفرع الأول "بتجريب" توزيع الأعداد، وبعد مرحلة من التفاوض ونجاحهم في التوزيع، بنوا ملاحظات تتعلق بالحل أي أنهم بدؤوا بالتوصل إلى معانٍ تتعلق بالظاهرة، مثل قول المجموعة (أ) من الذكور عن الأعداد عند رؤوس الشكل: "أصغر ثلاث أعداد لازم يكونوا مشتركات"، وقول المجموعة (ب) من الذكور: "خلينا الأعداد الصغيرة عند الرؤوس". ولاحظت الباحثة أن هذه المجموعة كانت أكثر دقة في مرحلة لاحقة حيث قال أحد أفرادها خلال تفاوضهم عندما طُلب منهم أن يكون مجموع أعداد الذراع10: "إذاً مش شرط تكون الرؤوس هي أصغر ثلاث أعداد! المهم أنه نحاول وضع أعداد صغيرة وكبيرة في نفس الجهة، وما نكتب عددين كبار في نفس الجهة مشان ما يكون المجموع أكبر من 10 للضلع" ، وقول المجموعة (أ) من الإناث: " إذاً لازم تكون الرؤوس أعداد صغيرة ".

أما المجموعة (ب) من الإناث فبدأت الحل للفرع الأول بطريقة مختلفة، حيث بدأت مرحلة التفاوض باقتراح الطالبة شيماء طريقة لبدء الحل قائلة: "تعالوا نبحث بالأول عن أي ثلاث أعداد من المجموعة تعطينا 9"، ثم تفاوضت الطالبات وكتبنَ ثلاثيات من الأعداد المطلوب توزيعها بحيث يكون مجموع أعداد كل ثلاثي منها9، وأخذنَ العدد المشترك بين كل ثلاثيين ووضعنه عند رأس من الرؤوس. هذه الطريقة في الحل توصلت لها المجموعة (أ) من الإناث عندما انتقلوا للفرع التالي، أي اكتشفتها لاحقاً ولم تستخدمها منذ البداية.

نلاحظ أن الطالبة شيماء قدمت طريقة مختلفة ومميزة عن طريقة باقي المجموعات التي اعتمدت التجريب العشوائي للتوصل إلى حل، أي أن شيماء فكرت بطريقة منظمة أكثر، وهذا قد يدل على أن لديها التجربة الأغنى من بين أفراد المجموعات.

فالطلاب من خلال خبرتهم ذات الصلة بالمشكلة التي يواجهونها، يستطيعون تطوير ذخيرة من الاستراتيجيات والعمليات المتعلقة بخطوات حل المشكلات – مثلاً– ، والتي يمكنهم تطبيقها عند مواجهتهم لمشكلات مشابهة، وهذه الخبرات تتطور مع مرور الوقت فيصبحوا أكثر نضجاً بمهاراتهم في حل المشكلات. (Ontario Ministry of Education. 2002)

وبعد أن قامت المجموعة (ب) من الإناث بالتفاوض وحل السؤال، توصلت لنفس ملاحظة المجموعات الأخرى فقالت إحدى الطالبات: "الأعداد الصغيرة عند الرؤوس".

لاحظت الباحثة أن أفراد المجموعات أثناء التفاوض كانوا يركزون على الأعداد عند الرؤوس، وأعطوها اهتماماً خاصاً إدراكاً منهم أن العدد عند الرأس يتم جمعه مع الأعداد في كلا الذراعين.

ولاحظت الباحثة أيضاً أن السؤال السابق (السؤال الثالث) كان له تأثير على المجموعة (أ) من الذكور التي توصلت لملاحظة تتعلق بالعدد عند الرأس من ناحية أنه زوجي أو فردي، فربط الطلاب بين العدد المكتوب وسط الشكل والرؤوس، بحيث إذا كان المجموع المطلوب لكل ضلع زوجياً تكون الرؤوس أعداداً فردية، وإذا كان المجموع المطلوب لكل ضلع فردياً تكون الرؤوس أعداداً زوجية، وقاموا بتبرير هذه الملاحظة، ففي الفرع الذي يطلب مجموع أعداد كل ذراع 10، قال أحد الطلاب: " بدنا مجموع الضلع10 وهو زوجي.. ولما تكون الرؤوس فردية يعني أنه هناك عددين فرديين على الضلع وبيكون مجموعهم زوجي وبنحتاج عدد زوجي حتى نحصل على مجموع الضلع زوجي".

في هذا السؤال، نرى أن التفاوض أفاد مجموعتي الذكور في بداية الحل عندما اختارت المجموعات التجريب كطريقة لبدء الحل، أما مجموعتا الإناث فقد خدمها التفاوض بطريقة مختلفة عندما قامت الطالبات بكتابة ثلاثيات من الأعداد المطلوب توزيعها بحيث يكون مجموع أعداد كل ثلاثي منها9، ثم أخذ العدد المشترك بين كل ثلاثيين ووضعه عند رأس من الرؤوس. وكذلك استفادت أفراد المجموعات من التفاوض في بناء ملاحظات حول السؤال وتكوين أفكار حول الظاهرة التي يدرسونها.

ورأينا أن مراحل حل هذا السؤال كانت خالية من الصعوبات ومواقف عدم التيقن، واحتاجت المجموعات الوقت الأقل لحل هذا السؤال من بين بقية الأسئلة، وترى الباحثة أن السبب في ذلك كان تعرض الطلاب لعدة أسئلة قبل هذا السؤال ما أعطاهم خبرة وذخيرة من المعلومات والأفكار المتعلقة بالأعداد، وكما أسلفنا سابقاً أن اكتساب الطلاب لخبرات سابقة يعد سبباً في نجاحهم لحل أسئلة مستقبلية تتعلق بنفس الأفكار التي امتلكوها سابقاً.

الفصل السادس

التوصيات

توصي الباحثة بإجراء مزيد من الأبحاث حول الأنشطة الإثرائية وتسليط الضوء عليها في الدراسات العربية، فعدد الدراسات العربية التي تناقش هذا الموضوع قليلة.

وتوصي الباحثة أيضاً بإجراء دراسات حول أثر استخدام استراتيجية التعلم التعاوني لحل أنشطة إثرائية وذلك لكافة الفئات التحصيلية للطلبة: العليا والمتوسطة والدنيا، بحيث يتم فيها مقابلة الطلاب وسؤالهم عن الطرق التي استخدموها في الحل، وسبب اختيارهم طريقة معينة دون غيرها، وكذلك تدريب الطلاب على حل الأنشطة الرياضية في مجموعات بحيث يتوصلوا معاً إلى معاني رياضية وعلاقات ويفسرون ظواهر جديدة بحيث يستفيدون من خبرات بعضهم البعض ويتعاونوا معاً للتغلب على الصعوبات لما في ذلك من توفير للوقت والجهد.

تقترح الباحثة إدخال أنشطة إثرائية لمنهاج الرياضيات بحيث يحلها الطلاب كأنشطة من خارج الكتاب المقرر، وعمل آلية متابعة للطلاب تحثهم على حل مثل هذه الأنشطة، وتوعية الطلاب بضرورة هذه الأنشطة في تنمية تفكيرهم الرياضي ودورها في تطوير قدرتهم على حل المسائل.

توصي الباحثة بتدريب المعلمين على آلية تدريس أنشطة إثرائية للطلاب بشكل لا يؤثر على الكتاب المقرر، وذلك بإدخال طرق تدريس حديثة على دليل المعلم بما فيها التعلم التعاوني بحيث تكون خطوات تنفيذ هذه الطرق واضحة للمعلم.

وتقترح الباحثة إجراء مسابقات بين الطلاب وبين المدارس تتعلق بالأنشطة الإثرائية بحيث يكون هناك أسئلة من خارج الكتب المدرسية يعدها مختصون في مجال القياس والتقويم تقدم للطلاب للتدريب على حل هذه الأنشطة قبل المسابقة ما يسهم في تطوير قدرة الطلاب على حل المسائل.

وتؤكد الباحثة على ضرورة توفير بيئة صفية ومدرسية غنية بمصادر لتعلم الرياضيات مثل الكتب الرياضية والوسائل التعليمية والألعاب التعليمية التي تدمج بين الرياضيات والأمور الحياتية ما يسهّل تعلم وتعليم الرياضيات ويجلها قريبة من واقع الطلاب ما يكسبهم ثقافة الرياضيات.

وتشير الباحثة إلى ضرورة عمل أبحاث للتوصل لكيفية إشراك أولياء أمور الطلاب والمجتمع بعملية تطوير ثقافة الرياضيات، لما لهم من اتصال وثيق بالطلاب وتأثير عليهم.

المصادر والمراجع

- أبو زينة، فريد كامل (1989). ***أثر الإستراتيجية التفاضلية في تدريس الرياضيات على تعلم الطلبة في المرحلة الإعدادية***، **مجلة أبحاث اليرموك** *"سلسة العلوم الإنسانية والاجتماعية"* المجلد5، العدد1، ص175-196.
- أبو عطية، عصام فهد يوسف (1999). ***أثر التعلم بنظام المجموعات التعاونية وحجم المجموعة على تحصيل طلاب الصف الخامس الأساسي في الرياضيات في محافظة جنين.*** (رسالة ماجستير غير منشورة). جامعة النجاح الوطنية. نابلس. فلسطين.
- أبو عميرة، محبات (1997). **تجريب استخدام استراتيجيتي التعلم التعاوني الجمعي والتعلم التنافسي الجمعي في تعليم الرياضيات لدى طلاب المرحلة الثانوية العامة.** دراسات في المناهج وطرق التدريس. العدد44. 181- 219.
- إسماعيل، حمدان (2003). **فعالية بعض الأنشطة العلمية الإثرائية في تنمية التفكير الابتكاري لدى التلاميذ المتفوقين في مادة العلوم بالمرحلة الإعدادية.** (رسالة ماجستير غير منشورة). جامعة حلوان. القاهرة. جمهورية مصر العربية.
- الخضر، نوال سلطان. **فاعلية استخدام بعض الأنشطة الإثرائية في تدريس الرياضيات على التحصيل الدراسي والتفكير الابتكاري لدى تلميذات الصف الأول المتوسط بمنطقة القصيم.** (رسالة ماجستير غير منشورة). كلية التربية للبنات ببريده.
- الديب، محمد مصطفى (2004). **دراسات في أساليب التعلم التعاوني.** ط1. القاهرة: عالم الكتب.
- الربيعي، محمود داود (2011). **استراتيجيات التعلم التعاوني.** إربد- الأردن: عالم الكتب الحديث.
- السعيد، رضا مسعد (2007). **استراتيجيات التدريس التعاوني.** ط2. الرياض: دار الزهراء.
- الطنطاوي، عفت مصطفى (2002). **أساليب التعليم والتعلم وتطبيقاتها في البحوث التربوية.** القاهرة: مكتبة الأنجلو المصرية.

- العقيل، محمد بن عبد العزيز (2011). **أثر استخدام أنشطة علمية إثرائية مقترحة في تنمية عمليات العلم التكامليّة والتفكير الإبداعي لدى التلاميذ الموهوبين في المرحلة الابتدائية.** (رسالة دكتوراه). جامعة الملك سعود. الرياض. المملكة العربية السعودية.
- الفقي، محمد محمد السباعي (2003). ***فعالية استخدام مدخل التعلم التعاوني في تعلم الرياضيات لدى فئات الطلاب اللتحصيلية المختلفة بالصف الخامس الابتدائي.*** **مجلة كلية التربية**، 1 (32)، 1- 51.
- المالكي، عبد الملك بن مسفر بن حسن (2002). ***أثر استخدام التعلم التعاوني في تدريس الرياضيات على تحصيل طلاب الصف الثاني المتوسط في الرياضيات واتجاهاتهم نحوها بمدينة جدة.*** (رسالة ماجستير غير منشورة). جامعة أم القرى. مكة المكرمة. المملكة العربية السعودية.
- المقدادي، أحمد محمد (2006). ***استخدام استراتيجية التعلم التعاوني لدى طلبة معلم الصف عند حلهم المسائل الهندسية وأنماط التواصل اللفظي المستخدمة*** **، المجلة التربوية. المجلد20.العدد80. ص 183- 215.**
- حج يحيى، ميرفت أسامة محمد (2011). **فاعلية استخدام استراتيجية التعليم التعاوني في تحصيل طلبة الصف السابع الأساسي في الرياضيات واتجاهاتهم نحوها في مدينة طولكرم.** (رسالة ماجستير غير منشورة). جامعة النجاح الوطنية. نابلس. فلسطين.
- رمل، غادة أحمد خليل (2010). **فاعلية الأنشطة الإثرائية في تنمية التفكير الإبداعي والتحصيل الدراسي في مادة الرياضيات لدى تلميذات الصف الخامس الابتدائي الموهوبات بالمدارس الحكومية في مدينة مكة المكرمة.** (رسالة ماجستير غير منشورة). جامعة أم القرى. المملكة العربية السعودية.
- زامل، مجدي علي (2006). ***وجهات نظر معلمي المرحلة الأساسية الدنيا ومعلماتها في مدارس الأونروا نحو ممارستهم التعلم النشط في محافظتي رام الله ونابلس*** **، مجلة المعلم،** *الطالب*. تصدر عن الأونروا: عمان، العددان الأول والثاني. 49- 64.

- عبد الحميد، جابر (1999). ***استراتيجيات التدريس والتعلم، سلسلة المراجع في التربية وعلم النفس،*** *الكتاب العاشر*. دار الفكر العربي: القاهرة.
- عبد السلام، أسامة محمد (2001). **دور حقيبة تعليمية لأنشطة إثرائية في العلوم لتنمية مهارات الاستقصاء العلمي.** (رسالة ماجستير غير منشورة). جامعة القاهرة. جمهورية مصر العربية.
- عبد الفتاح، آمال جمعة (2010). **التعلم التعاوني والمهارات الاجتماعية.** ط1. العين، الإمارات العربية المتحدة: دار الكتاب الجامعي.
- عبيدات، حيدر (2000). **أثر استخدام استراتيجية التعلم التعاوني والخريطة المفاهيمية في الفهم المفاهيمي لطلبة الصف السابع الأساسي في مادة العلوم.** (رسالة ماجستير غير منشورة). الجامعة الأردنية. المملكة الأردنية الهاشمية.
- عمدة، أمل بنت عبد الله محمد (2008). **فاعلية استخدام التعلم التعاوني في تدريس الاقتصاد المنزلي على تنمية مهارات التفكير الابتكاري لدى تلميذات الصف السادس الابتدائي.** (رسالة ماجستير غير منشورة). جامعة أم القرى. مكة المكرمة. المملكة العربية السعودية.
- محسن، أحمد محمد جواد (2007). **آراء تربوية في تعليم مادة الرياضيات.** دمشق: دار كيوان للنشر والتوزيع.
- محمد، مديحة حسن (2004). **اتجاهات حديثة في تربويات الرياضيات.** ط1. عالم الكتب:القاهرة.
- ميخائيل، ناجي ديسقورس(2001). ***مبادئ ومستويات الرياضيات المدرسية 2000 للمنهج والتقويم.*** **المؤتمر العلمي السنوي للرياضيات المدرسي**ة: معايير ومستويات2001 . الجمعية المصرية لتربويات الرياضيات.
- يوسف، وصفي وجيه سعيد (1998). **أثر نموذجين من نماذج التعليم التعاوني على تحصيل طلبة الصف التاسع الأساسي في الرياضيات في محافظة طولكرم واتجاهاهم نحوها.** (رسالة ماجستير غير منشورة). جامعة النجاح الوطنية. نابلس. فلسطين.

- Artzt, A. F., & Annour-Thomas, E. (1992). ***Development of a cognitive metacognitive framework for protocol analysis of mathematical problem solving in small groups***. *Cognition and Instruction,* 9(2),137-175.
- Bakker, A., Doorman, M., Drijvers, P. (2003). **Design research on how IT may support the development of symbols and meaning in mathematics education**. Retrieved August 10, 2013, from http://www.fi.uu.nl/publicaties/literatuur/5896.pdf
- Chanceller, J. & Barbosa, G. (1992). ***Social, Economic and Cultural Transformations in the Portuguese Urban System***. International Journal of Urban and Regional Research, 16, 442-461.
- Clarke, D.J. & Helme, S. (1997**). The resolution of uncertainty in mathematics classrooms**. In F. Biddulph and K. Carr (Eds.), *People in Mathematics Education*. *Proceedings of the Twentieth Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, (pp. 116-123). Waikato, New Zealand: MERGA.
- Colton, C. (2010). **Justifying Answers and Providing Explanations fo Mathematical Thinking: The Impact on Student Learning in a Middle-School Classroom**. Retrieved from August 10, 2013, from
- http://scimath.unl.edu/MIM/files/research/Colton_AR_FinalLA.pdf
- Davidson, N. (1990). **Small-group cooperative learning in mathematics**. In T. J. Cooney & C. R. Hirsch (Eds.), *Teaching and Learning Mathematics in the 1990s (1990 Yearbook)* (pp.

52-61). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

- Epp, S. S. (2003). **The role of logic in teaching proof** .*The American Mathematical Monthly*, *110*, 886-899.
- Goos, M. (1998). **"I don't know if I'm doing it right or I'm doing it wrong!" Unresolved uncertainty in the collaborative learning of mathematics**. In C. Kanes, M. Goos, & E. Warren (Eds.), Teaching mathematics in new times. *Proceedings of the 21st annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 225-232). Gold Coast, Qld: MERGA
- Guttman, J., Farmer W. & Thayer J. (1993). ***IMPS: An interactive mathematical proof system***. Journal of Automated Reasoning. 11(2), 213-248.
- Hawley, D.R. & Olson D. H. (1995). **Enriching Newlyweds: an Evaluation of Three Enrichment Programs**. *The American Journal of Family Therapy*, 23, 129-147.
- Johnson, D.W. & Johnson ,R.T. (1986). ***Mainstreaming and Cooperative Learning Strategies***. American Psychological Association. 52(6), 553-561.
- Kinzel, M. (1999). **Understanding algebraic notation from the students' perspective**. *Mathematics Teacher*, *95*(5), 436-4
- Klinzing, H.G. (2003). ***Improving accuracy of decoding emotions from facial expressions by cooperative learning techniques, Two***

experimental studies. The annual meeting of the American Educational Research Association. (pp. 1-30). Chicago.

Ontario Ministry of Education. (2006). ***A guide to effective instruction in mathematics, Kindergarten to Grade 6***. Toronto: Author.

- Ontario Ministry of Education. (2002). ***Targeted implementation and planning supports for revised mathematic****s*. Toronto: Author.
- Posamenter and Stepleman . (1991) . **Exact eigenfunctions**
- **squarawave grating: Application to diffraction and surfaceplasmon**
- **calculations phys .**
- Rigelman, Nicole. (2007). **Fostering mathematical thinking and problem solving**. *Enriching Children mathematics.* 13 (6), 308 – 314.
- Ross. J. A., Rolheiser, C. & Hoaboam, A. (1998**). Impact of Self Evaluation Training on Mathematics Achievement in A cooperative Learning Environment**. The Annual Meeting of the American Educational Research Association. (pp. 1-29). San Diego.
- Rubenstein, R.N, & Thompson, D.R. (2001). **Learning mathematical**
- **symbolism: Challenges and instructional strategies**. *Mathematics Teacher*, *94*(4), 265-271.
- Schoenfeld, A. H. (1992). **Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in**

mathematics. In D.Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York: MacMillan.

- Stacey, K. & MacGregor, M. (1999). **Ideas about symbolism that students bring to algebra**. In Barbra Moses (Ed.), *Algebraic Thinking Grades K-12* (pp. 308-312). Reston, VA: NCTM.
- Stepleman, R. S.& Sanda, P. N. (1982)**. Exact eigenfunctions for square-**
- **Wave gratings: Application to diffraction and surface-Plasmon**
    - **Calculations**. *American Physical Society's New Journal. 26 (6*),
    - 2907–2916.
- Strauss, A. & Corbin, J. (1998). **Basics of qualitative research: Techniques and procedures for developing grounded theory (2nd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.**
- Tarim, k. & Işık, D. (2009). **The Effects of The Cooperative Learning Method Supported by Multiple Intelligence Theory on Turkish Elementary Students Mathematics Achievement**. *Asia Pacific Education Review*, 10(4), 465-474.
- Vygotsky, L. S. (1978). ***Mind in Society***. Cambridge, MA: Harvard University Press.

الملاحق

ملحق (1): نقاش المجموعة (أ) من الإناث خلال حل السؤال الأول كمثال على المشاهدات.

ملحق (2): مقابلة مع أحد المجموعات بعد الانتهاء من تنفيذ الأنشطة.

ملحق (3): المسائل الإثرائية المقدمة للطلاب.

ملحق (4): إجابات المسائل الإثرائية المقدمة للطلاب.

ملحق (5): التخطيط للعمل مع المجموعات.

ملحق (1)

نقاش المجموعة (أ) من الإناث خلال حل السؤال الأول كمثال على المشاهدات

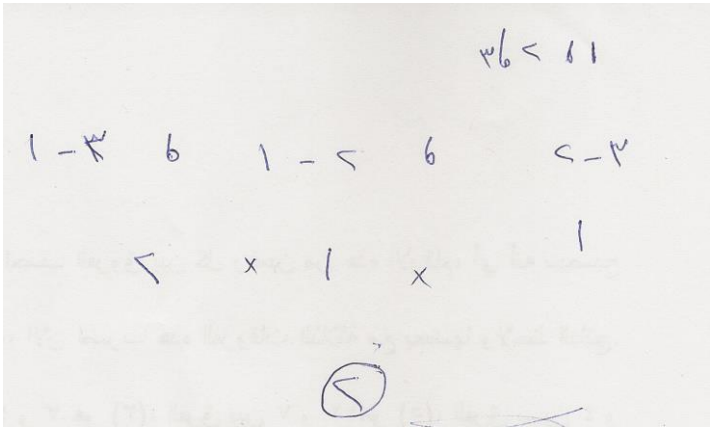
بدأت بيان بقراءة السؤال بصوت مرتفع والجميع يتمعن في السؤال أثناء قراءتها.

– ميس: تعالوا نوخذ أي ثلاث أعداد

– بيان: آه، لأنه السؤال ما حددلنا أعداد معينة (تأكيد على شرط السؤال)

– ميس: تعالوا نجرّب أعداد صغيرة بالأول..مثلاً 1 ، 2 ، 3

والجميع عمل معها.. وكان الناتج النهائي 2



– أماني: المثال المعطى جوابه 120 ، تعالوا نجرّب أعداد كبيرة ونشوف النواتج

– ميس: 5 ، 8 ، 13 ...

– أماني: 13 – 5 = 8

3 = 5 – 8

5 = 8 – 13

– أزهار: نضرب 3 × 5 × 8 ..

– بيان: الناتج رح يكون 120 لأنها نفس فروقات المثال..

– ميس: آه، صحيح 120 (لم يتوصلوا لأي ملاحظة لأنه نفس ناتج المثال)

– أماني: بدنا نجرب أعداد كمان

– بيان: 4 ، 8 ، 15

4 = 4 – 8

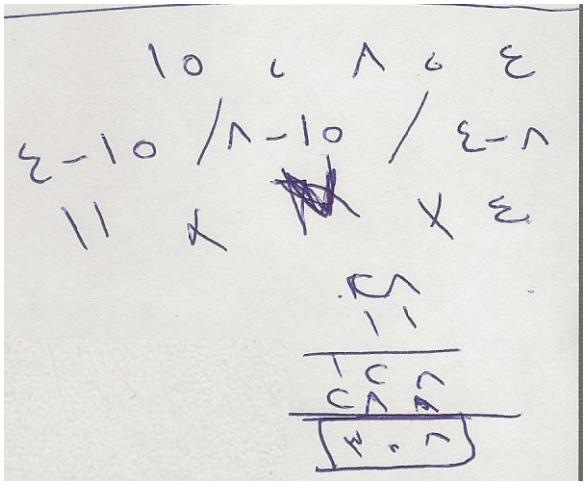
7 = 8 – 15

11 = 4 – 15

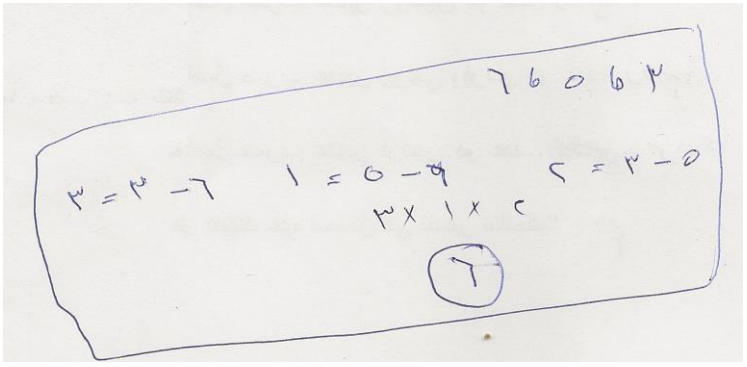
– أزهار: 4 × 7 × 11 ..

قامت بيان بضربها

وكتبت الناتج 308



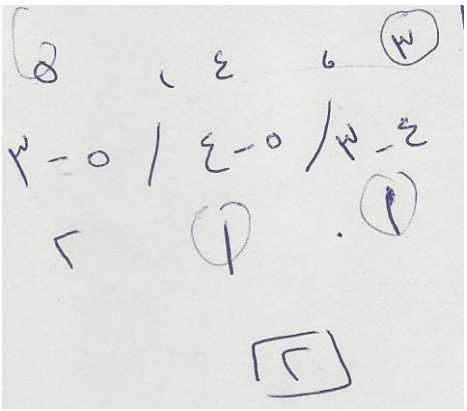
أثناء ذلك كانت ميس تجرب 3 ، 5 ، 6



– ميس: أنا جربت 3 ، 5 ، 6 والناتج 6

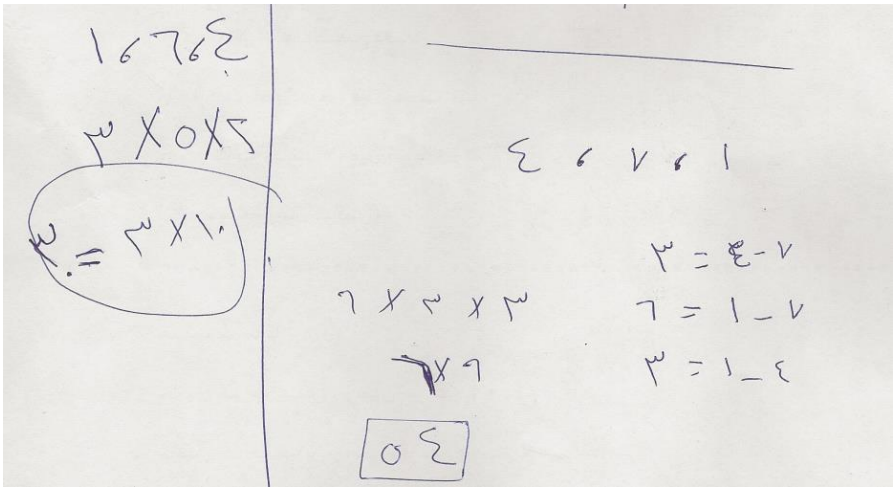
– أزهار: بدنا نجرب كمان

– بيان: 3 ، 4 ، 5 وقامت بكتابتها وحساب الفروقات وتوصلت للناتج 2.



وأثناء ذلك كانت أزهار تجرب 6 ، 7 ، 8 وتوصلت للناتج 2

وقامت أماني بتجريب الأعداد 1 ، 7 ، 4 وتوصلت للناتج 54، والأعداد 4 ، 6 ، 1 وتوصلت للناتج 30



– أماني: كلهم أجوبتهم زوجية!!

الجميع التفتوا إليها

الجميع عادوا ينظرون للنواتج التي ظهرت في كل مرة

– بيان: صحيح! دايماً الناتج زوجي!

ثم انتقلت الطالبات للبحث عن تفسير لهذا، وبعد فترة..

– بيان: هيها.. شوفوا

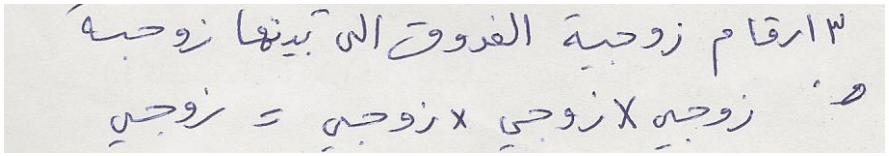
لما نوخذ 3 أعداد زوجية بتكون الفروقات بينها زوجية

– أزهار: صح.. لأنه زوجي – زوجي = زوجي

– بيان: ولما نضرب 3 أرقام زوجية رح يكون الناتج زوجي

– الجميع: صح!

وقاموا بكتابة ذلك.



– ميس: ولما يكون عنا 3 أعداد فردية رح تكون الفروقات كمان زوجية

– أزهار :آه، لأنه فردي – فردي = زوجي

– ميس: ولما نضربها رح يكون زوجي

– الجميع: آه

– أماني: إذاً وضحنا حالتين، لما تكون كل الأعداد فردية أو كلها زوجية، بدنا نفسر لما نوخذ أعداد فردية وزوجية مع بعض

– بيان: آه، لما نوخذ رقمين فرديين وواحد زوجي

ولما نوخذ رقمين زوجيين وواحد فردي

– أماني: عنا 4 حالات

– الجميع: آه

– ميس: الحالة الأولى لما يكون عنا ثلاث أعداد زوجية

والثانية لما يكون عنا ثلاث أعداد فردية

– بيان: والحالتين الباقيات لما نوخذ أعداد فردية مع زوجية

اثنين فردي وزوجي أو اثنين زوجي وفردي

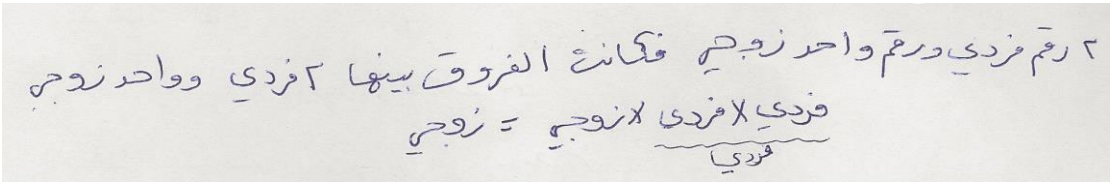
– *الباحثة: لقد فسرتم الحالتين الأولى والثانية، فكيف تفسرون الحالتين الأخريين؟*

– ميس: لما نوخذ اثنين فرديين وواحد زوجي رح تكون الفروق:

فردي – زوجي، فردي – زوجي، فردي – فردي

وبينتج الفروقات: فردي × فردي × زوجي

وقاموا بكتابتها



– أماني: فردي × فردي بينتج فردي

ولما نضربه بزوجي نحصل على زوجي

– الجميع: صح

– أزهار: بيضل عنا اثنين زوجي وواحد فردي

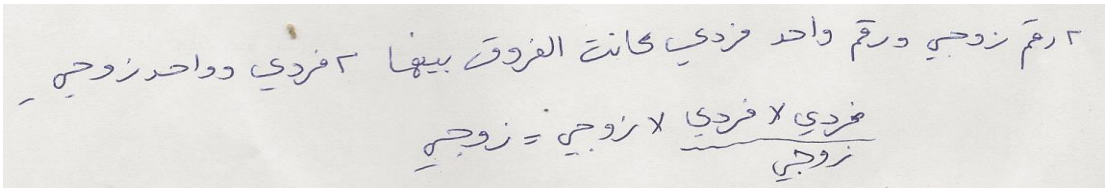
– بيان: بتكون الفروق بينها: فردي و فردي و زوجي

– أماني: صحيح

– ميس: ولما نضرب فردي × فردي × زوجي بنحصل على ..

فردي × فردي بعطي زوجي... وزوجي × زوجي يساوي زوجي

– بيان: صح



ملحق (2)

مقابلة مع أحد المجموعات بعد الانتهاء من تنفيذ الأنشطة

المقابلة مع الطالب محمد من المجموعة (أ) من الذكور:

– ما رأيك بالتعاون في حل المسائل الرياضية؟ ولماذا؟

– بالتعاون تمكنا من حل جميع المسائل، فقد كان إيجابياً والتعاون هو مفتاح النجاح.

– كيف يساعدك التعاون في الحل، أي كيف استفدت منه؟

– بأننا كنا نفكر كلنا في السؤال وكان شخص يحل بداية السؤال والثاني يكمل.

– هل كان لديك صعوبة معينة واجهتها أثناء الحل وساعدك أحد أفراد المجموعة في التغلب عليها؟

– نعم، لم أستطع إجابة السؤال المتعلق بالشكل V، وصديقي قام بإرشادنا لحله.

– هل كنت تتوقع من زملائك أن يتعاونوا بهذه الصورة؟ أم كنت تتوقع أكثر من ذلك؟

– كانوا ممتازين! ولم أتوقع ذلك.

– متى كنت بحاجة لسؤال الباحثة عن أمر معين؟

– في السؤال المتعلق بالشكل V حيث تساءلت إن كان يجوز تكرار رقم.

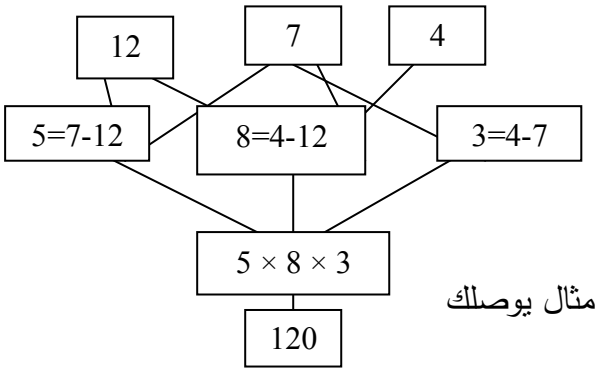
ملحق (3)

المسائل الإثرائية المقدمة للطلاب

السؤال الأول:

خذ أي ثلاثة أعداد مختلفة، ثم احسب الفروق بين كل عددين من هذه الأعداد، أي أنه سيصبح لديك ثلاثة نواتج من الفروقات، الآن اضرب هذه الفروقات الثلاثة مع بعضها ولاحظ الناتج. مثل: 4، 7، 12. الفرق بين 4 و 7 هو (3)، الفرق بين 7 و 12هو (5)، الفرق بين 4 و 12 هو (8). ناتج ضرب هذه الفروقات هو $3 \times 5 \times 8 = 120$

خذ ثلاثة أعداد جديدة وأجرِ نفس العملية ولاحظ الناتج، كرر الخطوات لأعداد جديدة ولاحظ الناتج في كل مرة...



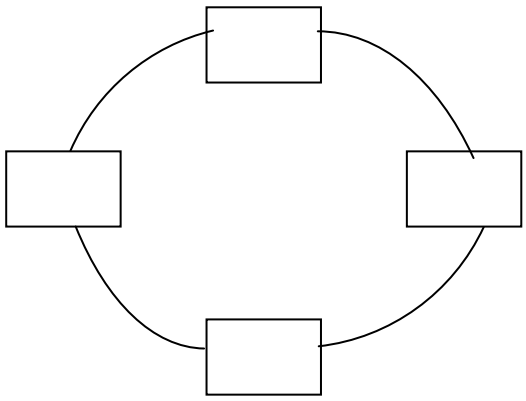
- ماذا تلاحظ؟
- هل تعتقد أن هذا صحيح دائماً؟
- إذا كانت إجابتك نعم، كيف تفسر هذا؟
- وإذا كانت إجابتك لا، فهل تستطيع إعطاء مثال يوصلك لنتائج معاكسة؟

حاصل ضرب عددين زوجي وفردي هو عدد.....

حاصل ضرب عددين فرديين هو عدد.....

كيف تفيدك هذه الحقائق في تفسير نتائجك؟

السؤال الثاني:



اختر أربعة أعداد من 1 إلى 9 وضعها في المربعات في الشكل، بحيث يكون الفرق بين أي عددين متصلين مع بعضهما فرقاً فردياً. عليك أن تستعمل أربعة أعداد مختلفة.

– ماذا تقول عن مجموع أي عددين متصلين؟

– إلى ماذا توصلت من هذه الملاحظات؟

– كيف يمكنك تفسير النتائج التي توصلت إليها؟

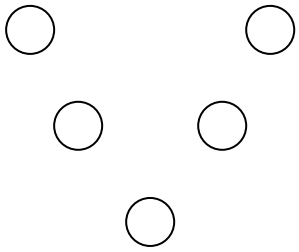
– إذا وضعت في المربع الأول عدداً فردياً، فإن العدد في المربع المرتبط به سيكون.....

وإذا وضعت في المربع الأول عدداً زوجياً فإن العدد في المربع المرتبط به سيكون.....

لذلك فإن مجموع أي عددين متصلين في الشكل هو.....

– كيف تثبت ذلك رياضياً؟

السؤال الثالث:



في الشكل المرسوم جانباً، وزع الأعداد من 1 إلى 5 على الدوائر بحيث يكون الذراعان في الشكل V لهما نفس المجموع.

– كيف نجد طريقة أخرى لتوزيع هذه الأعداد؟

– كم عدد الحلول الممكنة لذلك (بكم طريقة مختلفة يمكنك توزيع هذه الأعداد تحت هذه الشروط)؟

– ماذا تلاحظ في جميع الحلول التي أوجدتها؟

– كيف تشرح وتفسر ما تراه؟

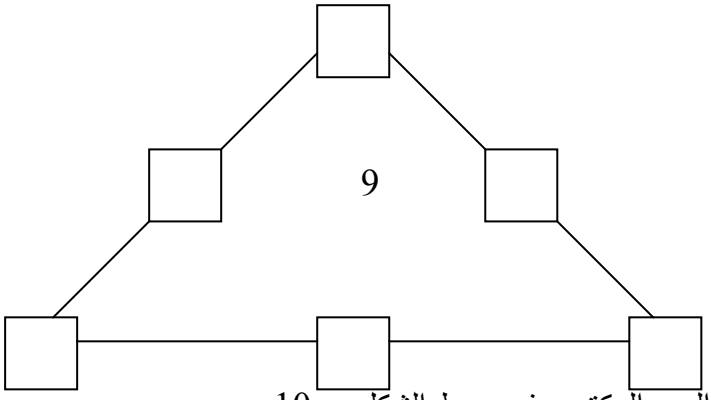
– كيف تقنعنا أنك قد وجدت جميع الحلول الممكنة؟

– ماذا يحدث إذا استخدمت الأعداد من 2 إلى 6؟

– ماذا الذي يمكنك اكتشافه في شكل V الذي طول كل من ذراعيه هو 4 بدلاً من 3 واستخدمت الأعداد من 1 إلى 7؟

السؤال الرابع:

- رتب الأعداد من 1 إلى 6 بحيث يكون مجموع كل ضلع من الأضلاع الثلاثة مساوياً للعدد(9) المكتوب في وسط الشكل.



- كيف يمكنك فعل ذلك؟
- ما هي ملاحظاتك؟
- كيف ترتب هذه الأعداد إذا كان العدد المكتوب في وسط الشكل هو10.
- ما هي ملاحظاتك؟

ملحق (4)

إجابات المسائل الإثرائية المقدمة للطلاب

إجابة السؤال الأول:

تختار المجموعة أية ثلاثة أعداد وتجري نفس العملية الموضحة بالرسم المرفق مع السؤال، ثم تكرر ذلك عدة مرات.

وهناك 4حالات:

1- إذا اختارت المجموعة ثلاثة أعداد زوجية مثل 2، 6، 8 فستكون الفروقات بينها:4، 2، 6

ويكون حاصل ضرب هذه الفروقات: 4× 2× 6= 48

2- إذا اختارت المجموعة ثلاثة أعداد فردية مثل 3، 7، 11 فستكون الفروقات بينها: 4،4، 8

ويكون حاصل ضرب هذه الفروقات: 4× 4× 8= 128

3- إذا اختارت المجموعة عددين زوجيين وعدداً فردياً مثل 2، 6، 7 فستكون الفروقات بينها: 4، 1، 5 ويكون حاصل ضرب هذه الفروقات: 4× 1× 5= 20

4- إذا اختارت المجموعة عددين فرديين وعدداً زوجياً مثل 3، 5، 9 فستكون الفروقات بينها: 2، 4، 6 ويكون حاصل ضرب هذه الفروقات: 2× 4× 6= 48

- بعد أخذ العديد من الأمثلة، يلاحظ الطلاب أنه مهما كانت الأعداد المختارة، يكون حاصل ضرب الفروقات هو عدد زوجي.

- وهذا صحيح دائماً

- وتوضيح ذلك يكون عن طريق أخذ كل حالة لوحدها:

1- الأعداد المختارة زوجية (زوجي، زوجي، زوجي):

الفرق بين كل عددين منها يكون زوجياً لأن: عدد زوجي – عدد زوجي= عدد زوجي

فيكون حاصل ضرب الفروقات: عدد زوجي× عدد زوجي× عدد زوجي= عدد زوجي

2- الأعداد المختارة فردية (فردي، فردي، فردي):

الفرق بين كل عددين منها يكون زوجياً لأن: عدد فردي – عدد فردي = عدد زوجي

فيكون حاصل ضرب الفروقات: عدد زوجي× عدد زوجي× عدد زوجي= عدد زوجي

3- الأعداد المختارة اثنان منهما زوجيان والثالث فردي (زوجي، زوجي، فردي):

سيكون هناك فرق بين (عدد زوجي وعدد زوجي) وهو عدد زوجي، وفرقان بين (عدد زوجي وعدد فردي) وهو عدد فردي

فيكون حاصل ضرب الفروقات: عدد زوجي × عدد فردي × عدد فردي= عدد زوجي

لأن عدد زوجي × عدد فردي = عدد زوجي.

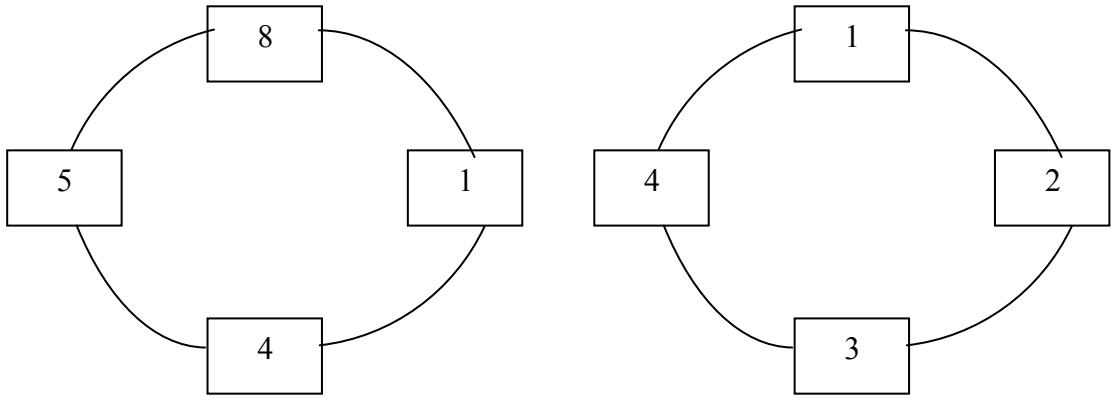
4- الأعداد المختارة اثنان منهما فرديان والثالث زوجي (فردي، فردي، زوجي):

سيكون هناك فرق بين (عدد فردي وعدد فردي) وهو عدد زوجي، وفرقان بين (عدد فردي وعدد زوجي) وهو عدد فردي

فيكون حاصل ضرب الفروقات: عدد زوجي × عدد فردي × عدد فردي= عدد زوجي

إجابة السؤال الثاني:

هناك عدة حلول مثل:



- مجموع أي عددين متصلين هو عدد فردي.

- نلاحظ أنه عند توزيع الأعداد بحيث يكون الفرق بين كل عددين متصلين هو فرق فردي، فإن الأعداد ستكون موزعة بالتناوب بين فردي وزوجي، فمثلاً إذا بدأت المجموعة بعدد فردي فإن العدد المتصل به بالرسم سيكون زوجياً، أي ستكون الأعداد: فردي، زوجي، فردي، زوجي.

- نفسر ذلك بأننا إذا وضعنا في المربع الأول عدداً زوجياً، فحتى يكون الفرق فردياً بين العددين المتصلين، علينا وضع عدد فردي في المربع المتصل به بالرسم، وإذا وضعنا في المربع الأول

عدداً فردياً، فحتى يكون الفرق فردياً بين العددين المتصلين، علينا وضع عدد زوجي في المربع المتصل به بالرسم، وذلك لأن الفرق بين عدد فردي وعدد زوجي هو عدد فردي.

– إذا وضعت في المربع الأول عدداً فردياً، فإن العدد في المربع المرتبط به سيكون زوجياً.

وإذا وضعت في المربع الأول عدداً زوجياً فإن العدد في المربع المرتبط به سيكون فردياً.

لذلك فإن مجموع أي عددين متصلين في الشكل هو عدد فردي.

– الإثبات الرياضي:

نفرض أن 2م + 1 هو عدد فردي حيث م عدد صحيح

ونفرض أن 2ك هو عدد زوجي حيث ك عدد صحيح

مجموع عدد فردي مع عدد زوجي = 2م+ 1+ 2ك

= 2 (م+ك)+ 1

= 2ل +1 ، ل= م+ ك، لϵ ص، وهذا رمز العدد الفردي

أي أن مجموع عددين أحدهما زوجي والآخر فردي هو عدد فردي.

الفرق بين عدد فردي وعدد زوجي= 2م+1 – 2ك

= 2(م– ك)+1

= 2ع +1، ع= م– ك، ع ϵ ص وهذا رمز العدد الفردي

أي أن الفرق بين عددين فردي وزوجي هو عدد فردي.

إجابة السؤال الثالث:

يمكن توزيع الأعداد من 1 إلى 5 بأكثر من طريقة:

– 5، 2، **1**، 3، 4 بالترتيب، 5، 1، **3**، 2، 4 بالترتيب، 4، 1، **5**، 2، 3

(يجب أن يكون العدد عند الرأس فردياً حتى ينجح التوزيع)

– أي أن المجموعة تجد طريقة أخرى بكتابة توزيع مختلف عن الذي وجدته في المرة الأولى، وذلك عن طريق محاولة تغيير العدد عند الرأس وتوزيع باقي الأعداد بين الذراعين بحيث يكون لهما نفس المجموع.

– عدد الحلول الممكنة هو ثلاثة، وذلك لأنه لدينا ثلاثة أعداد فردية.

– نلاحظ في جميع الحلول التي وجدناها أن العدد عند الرأس هو عدد فردي.

– نفسر ذلك بجمع الأعداد من 1 إلى 5 ويساوي 15 وهو فردي، ونريد توزيع الأعداد على خمس دوائر فلذلك نضع في الوسط (عند رأس الشكل V) عدداً فردياً فيتبقى لدينا مجموع زوجي فيمكن قسمته بين الذراعين.

– نقول أننا وجدنا جميع الحلول الممكنة ولا يوجد غيرها لأن العدد عند الرأس يجب أن يكون فردياً ولدينا هنا ثلاثة أعداد فردية فقط، أي أن الحل يكون بوضع أحد الأعداد 1، 3، 5

– إذا استخدمنا الأعداد من 2 إلى 6 فإن مجموع الأعداد المطلوب توزيعها هو 20 وهو زوجي، فلذلك يجب وضع عدد زوجي في الوسط (عند رأس الشكل V) فيتبقى لدينا مجموع زوجي فيمكن قسمته بين الذراعين.

أي أن التوزيع يكون بوضع أحد الأعداد 2، 4، 6 في الوسط، فيكون التوزيع:

6، 3، **2**، 4، 5 أو 3، 5، **4**، 6، 2 أو 2، 5، **6**، 4، 3

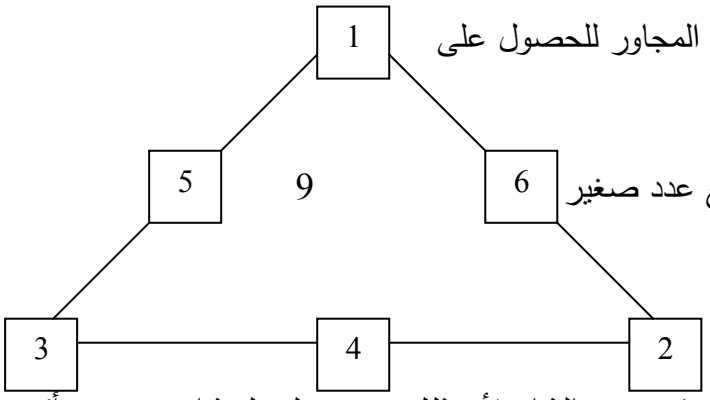
– إذا كان لدينا شكل V طول كل من ذراعيه هو4 بدلاً من 3 واستخدمنا الأعداد من1 إلى 7 فإن مجموع الأعداد المطلوب توزيعها هو 28 وهو زوجي فلذلك يجب وضع عدد زوجي في الوسط (عند رأس الشكلV) حتى يتبقى لدينا مجموع زوجي فيمكن قسمة الأعداد المتبقية بين الذراعين، فتكون التوزيعات الممكنة:

1، 5، 7، **2**، 3، 4، 6 أو 1، 5، 6، **4**، 7، 3، 2 أو 5، 2، 4، 6، **1**، 3، 7

(ملاحظة: يمكن تبديل مواقع الأعداد في الذراع الواحد دون تغيير الرأس، فمثلاً التوزيع 1، 5، 7، **2**، 3، 4، 6 هو نفسه 7، 1، 5، **2**، 6، 3، 4).

إجابة السؤال الرابع:

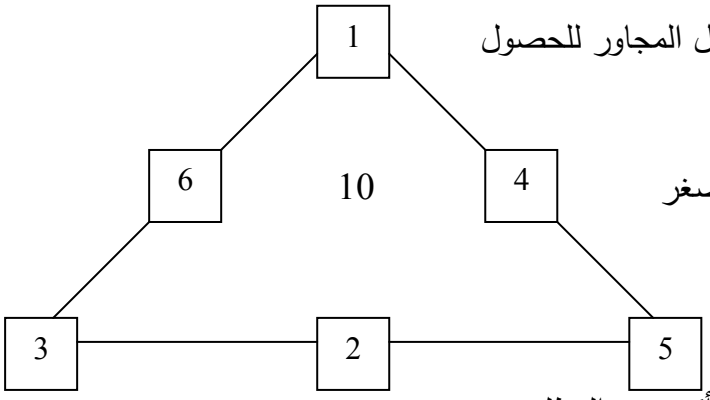
- يمكن توزيع الأعداد كما في الشكل المجاور للحصول على مجموع 9 لكل ضلع.



- نقوم بذلك عن طريق محاولة وضع عدد صغير عند الرأس، ثم نجرب حتى نحصل على مجموع يساوي لكل ضلع.

- نلاحظ أننا لا نضع عددين كبيرين في نفس الذراع لأن ذلك سيؤدي لجعل ذراع مجموعه أكبر من 9 وذراع أقل من 9، وكذلك إذا وضعنا أعداد كبيرة عند الرؤوس سنحصل على مجموع أكبر من المطلوب، فمثلاً لو جعلنا الأعداد 4، 6، 2 في ضلع واحد سيكون مجموع هذا الضلع 12 وهو أكبر من المجموع المطلوب.

- يمكن توزيع الأعداد كما في الشكل المجاور للحصول على مجموع 10 لكل ضلع.



- نلاحظ أنه ليس شرطاً أن تكون أصغر أعداد عند الرؤوس، ولكننا نجرب وضع أعداد صغيرة نسبياً عند الرؤوس كي لا نحصل على مجموع أكبر من المطلوب.

ملحق (5)

التخطيط للعمل مع المجموعات

- أولاً: التخطيط لعمل المجموعات لحل السؤال الأول:

المراجع المستخدمة	مدخلاتي كمعلم	نشاط المتعلم	المدة الزمنية
التوصل إلى تعميم يتعلق بحاصل ضرب الفروقات بين ثلاثة أعداد			
- يوزع المعلم على طلاب كل مجموعة أوراق تحوي نص السؤال المطلوب حله، بحيث يكون لكل طالب ورقته.	- يلاحظ عمل المجموعة ويدون ملاحظات. - يتوقع المعلم أن يدور نقاش بين المعلم والطلاب حول كيفية تفسير التعميم الذي يتم التوصل له. - يطرح المعلم بعض الأسئلة على الطلاب لسبر غور تفكيرهم وتوجيههم نحو فكرة الحل إذا لاحظ المعلم أنهم بحاجة لذلك. - قد يصدر أحد الطلاب قراراً أثناء حلهم للسؤال دون أن يفسر هذا القرار، ولذلك يسأل المعلم ويستفسر من الطلاب عن مثل هذه القرارات إذا ظهرت. - يتدخل المعلم إذا استعانت به المجموعة "كشخص	- يقرأ الطلاب نص السؤال ثم يتناقش الطلاب لتحديد المطلوب منه. يتناقش الطلاب لاتخاذ قرار بكيفية بدء الحل. - تجريب أعداد مختلفة، أي تجريب العديد من الحالات لمحاولة التوصل إلى ملاحظات تتعلق بالظاهرة. - التوصل إلى تعميم يتعلق بحاصل ضرب الفروقات بين ثلاثة أعداد. - يعمل الطلاب على تدوين ما يتوصلون له.	40 دقيقة

	عــارف" أي للتغلــب علــى صعوبة لم تتمكن المجموعة من التغلب عليها لوحدها. أو إذا لجـأت لــه المجموعــة للتحقـق مــن فهمهـم لــنص السؤال المقدم. – بعـد انتهـاء الطـلاب مـن الحل، يقدم لهم تغذية راجعة.		

- ثانياً: التخطيط لعمل المجموعات لحل السؤال الثاني:

المراجع المستخدمة	مدخلاتي كمعلم	نشاط المتعلم	المدة الزمنية
التوصل إلى تعميم يتعلق بالمجموع والفرق بين عددين أحدهما زوجي والآخر فردي			
- يوزع المعلم على طلاب كل مجموعة أوراق تحوي نص السؤال المطلوب حله، بحيث يكون لكل طالب ورقته.	- يلاحظ عمل المجموعة ويدون ملاحظات. - قد يقدم المعلم إشارة للطلاب لإرشادهم نحو التعبير عن أفكارهم إذا لاحظ أنهم لا يستطيعون ترتيب معلوماتهم. - يطرح المعلم أسئلة على الطلاب لإرشادهم واستدراجهم لمعنى الإثبات الرياضي، حيث يتوقع المعلم أن بعض الطلاب لا يعرفون المقصود بالإثبات الرياضي. - يسأل المعلم الطلاب أسئلة لسبر الغور للتوصل	- يقرأ الطلاب نص السؤال المقدم. - يتناقش الطلاب للتأكد من فهمهم للمطلوب. - يتخذ الطلاب قراراً بتجريب توزيع الأعداد. - يبني الطلاب ملاحظاتهم، وإن لم يتمكنوا من بناء الملاحظات بعد توزيع الأعداد فيحاولون إيجاد توزيع جديد كي يتمكنوا من بناء الملاحظات. - يفسر الطلاب الملاحظات والنتائج التي توصلوا لها. - يتوصل الطلاب لتعميم أن المجموع	20 دقيقة

	للإثبات الرياضي إذا لم تستطع المجموعة فعل ذلك لوحدها. - يتوقع المعلم أن يقوم بعض الطلاب فإعطاء العديد من الأمثلة اعتقادا أنه إثبات رياضي فيوضح المعلم أن المثال لا يعد إثباتاً رياضياً. - يتدخل المعلم إذا استعانت به المجموعة "كشخص عارف" أي للتغلب على صعوبة لم تتمكن المجموعة من التغلب عليها لوحدها. أو إذا لجأت له المجموعة للتحقق من فهمهم لنص السؤال المقدم. - بعد انتهاء الطلاب من الحل، يقدم لهم تغذية راجعة.	والفرق بين عددين فردي وزوجي هو عدد فردي. - يثبت الطلاب التعميم السابق رياضياً.	

- ثالثاً: التخطيط لعمل المجموعات لحل السؤال الثالث:

المراجع المستخدمة	مدخلاتي كمعلم	نشاط المتعلم	المدة الزمنية
التوصل إلى كيفية توزيع مجموعة من الأعداد المتتابعة بين ذراعي الشكلV بحيث يكون مجموعي أعداد الذراعين متساويين.			
- يوزع المعلم على طلاب كل مجموعة أوراق تحوي نص السؤال المطلوب حله، بحيث يكون لكل طالب ورقته.	- يلاحظ عمل المجموعة ويدون ملاحظات. - قد يتساءل أحد الطلاب عن إمكانية تكرار عدد وعدم استخدام كل الأعداد، فيؤكد المعلم شرط السؤال أنه لا يمكن تكرار عدد وعلينا توزيع كل الأعداد المطلوب توزيعها في السؤال. - قد تواجه أحد المجموعات صعوبة في التوصل لتفسير للظاهرة، فيقوم المعلم بطرح الأسئلة لإرشادهم نحو طريقة التفكير الصحيحة للتوصل للتفسير، مثل: (ماذا لو جمعنا الأعداد المطلوب توزيعها بين الذراعين؟) في إشارة لهم أن مجموع	- يقرأ الطلاب نص السؤال، ويتناقشون لتأكدهم من فهمه للمطلوب منه. - يتخذ الطلاب قراراً بالتجريب لإيجاد توزيع للأعداد من 1 إلى 5 بين ذراعي الشكلV بحيث يكون للذراعين المجموع نفسه. - يتناقش الطلاب أثناء محاولاتهم وتجريبهم لإيجاد توزيع آخر. - بعد إيجاد أكثر من توزيع للأعداد، يبني الطلاب ملاحظاتهم حول الظاهرة. - يفسر الطلاب الملاحظات التي	40 دقيقة

	الأعداد المطلوب توزيعها (فردي أم زوجي) هو نقطة البداية للتوصل إلى تفسير للظاهرة. – يتدخل المعلم إذا استعانت به المجموعة "كشخص عارف" أي للتغلب على صعوبة لم تتمكن المجموعة من التغلب عليها لوحدها. أو إذا لجأت له المجموعة للتحقق من فهمهم لنص السؤال المقدم. – بعد انتهاء الطلاب من الحل، يقدم لهم تغذية راجعة.	توصلوا لها. – يستخدم الطلاب الملاحظات التي توصلوا لها لإيجاد توزيع للأعداد من 2 إلى 6، وكذلك للأعداد من 1 إلى 7. – يتأكد الطلاب أن الملاحظات التي بنوها وفسروها للأعداد من 1 إلى 5 صحيحة عند توزيعهم للأعداد من 2 إلى 6 وكذلك عند توزيعهم للأعداد من 1 إلى 7.	

- رابعاً: التخطيط لعمل المجموعات لحل السؤال الرابع:

المراجع المستخدمة	مدخلاتي كمعلم	نشاط المتعلم	المدة الزمنية
وضع الأعداد المطلوب توزيعها في المربعات بحيث يكون لها المجموع نفسه في الأضلاع الثلاثة.			
- يوزع المعلم على طلاب كل مجموعة أوراق تحوي نص السؤال المطلوب حله، بحيث يكون لكل طالب ورقته.	- يلاحظ عمل المجموعة ويدون ملاحظات. - يسأل المعلم الطلاب عن سبب وضعهم أعداد صغيرة عند رؤوس الشكل. - قد يتساءل الطلاب عن إمكانية تكرار عدد، فيوضح المعلم عدم إمكانية التكرار. - يتدخل المعلم إذا استعانت به المجموعة "كشخص عارف" أي للتغلب على صعوبة لم تتمكن المجموعة من التغلب عليها لوحدها. أو إذا لجأت له المجموعة للتحقق من فهمهم لنص السؤال المقدم. - بعد انتهاء الطلاب من الحل، يقدم لهم تغذية راجعة.	- يتناقش الطلاب لاتخاذ قرار بالمحاولة والتجريب لتوزيع الأعداد. - يلاحظ الطلاب أن الأعداد عند رؤوس الشكل لها أهمية خاصة لأنها مشتركة بين ضلعين. - يقوم الطلاب بتغيير الرؤوس إذا لاحظوا أن مجموع أعداد الضلع أكبر من المجموع المطلوب. - يلاحظ الطلاب أنه ليس شرطاً أن تكون الأعداد الأصغر عند الرؤوس، وإنما نضع عند الرؤوس أعداد صغيرة نسبياً.	20 دقيقة

An-Najah National University

Faculty of Graduate Studies

Collaboration Types of Grade 10 Students when Solving Enrichment Activities, their Difficulties and Methods to Overcome them

By

Bisan Omar Aref Jaradat

Supervised by

Dr. Wajeeh Daher

This Thesis is Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Master of Educational Sciences in Methods of Teaching Mathematics, Faculty of Graduate Studies, An-Najah National University, Nablus, Palestine

2013

Collaboration Types of Grade 10 Students when Solving Enrichment Activities, their Difficulties and Methods to Overcome them

By
Bisan Omar Aref Jaradat
Supervised
Dr. Wajeeh Daher

Abstract

This study aimed to focus on the cooperation of tenth grade students in solving enrichment mathematical activities in order to find out the types of students' cooperation, the difficulties they face during their collaborative activity and then how they overcome these difficulties by answering the following main question:

What are collaboration types of grade 10 students when solvin enrichment activities and what are the difficulties they face and howthey overcome them?

So the researcher selected four groups of tenth grade students so that there re two groups of males and two groups of females. The researcher provided the groups by enrichment questions and requested from these groups to solve the problems. The researcher supervised the groups, followed up their cooperation and its types, discussed students about their ideas in some situations and photographed their work while resolving the enrichment questions. After that, the researcher analyzed the learning events of each of the four groups, so that she observed the behavior of students in each of the following learning processes: reading, understanding, analyzing and exploration the problem and planning to solve it, implementation of the plan and finally verification and validation the solution.

The study answered to the following questions: (1) What are collaboration types of grade 10 students when solving enrichment activities? (2) What are the difficulties they face while solving enrichment activities in a collaborative way? (3) How they overcome these difficulties?

The researcher found several results such as: students used negotiation mainly to find meanings about the mathematical problems, also in their attempts to resolve these problems, to have decisions relying on empirical evidence and sometimes relying on a student who have useful information about the problem. For the inter-subjectivity, the researcher found some words with special meanings for the students in their negotiation. the students agreed upon by students.

About the difficulties faced by the groups, they often have a lack of development and progress in the solution. Students have overcome these difficulties either by negotiation between members of the group or by resorting to the researcher when non of the members of the group was able to help his/her group.

The researcher recommends several recommendations, most important is to conduct further researches on enrichment activities specially in the Arabic studies since the number of the Arabic studies that addressed such a topic was little. Also to conduct further researches on solving activities using collaborative learning strategy. As well as students should be trained to solve mathematical activities in collaborative groups so that they reach together to the meanings of mathematical relationships and explain new phenomena. The researcher recommends adding enrichment problems to

the mathematics curriculum as an activities outside of the textbook, and making a follow-up mechanism to the students that encourages them to solve such activities. Also Students must be aware of the necessity of these enrichment activities in developing their mathematical thinking and its importance in developing their ability to solve problems. The researcher also recommends providing an environment that has many sources for learning mathematics in the school and in the class.