Suora fotonituotto suurienergiaisissa ydintörmäyksissä sähkömagneettisen ja vahvan vuorovaikutuksen kertaluvussa $\mathcal{O}(\alpha_{em}\alpha_S)$

Tatu Mustonen

Pro Gradu

Ohjaaja Prof. Kari J. Eskola
Jyväskylän yliopisto
Fysiikan laitos
Kevät 2013

Sisältö

1 Kiitokset

Haluan kiittää työn aiheesta ja ohjaamisesta professori Kari J. Eskolaa, sekä perhettä, ystäviä ja tuttavia kaikesta mahdollisesta tuesta, jota olen opiskeluissani saanut.

2 Tiivistelmä

Tämä fysiikan Pro Gradu -tutkielma käsittelee suoraa fotonituottoa suurienergiaisissa ydintörmäyksissä sähkömagneettisen ja vahvan vuorovaikutuksen kertaluvussa $\mathcal{O}(\alpha_{em}\alpha_S)$. Kyseisessä kertaluvussa suora fotonituotto jakaantuu kahteen nopeaan prosessiin ja kahdeksaan fragmentaatioprosessiin. Tässä työssä lasketaan näiden suoran fotonituoton prosessien teoreettiset vaikutusalat ja verrataan näiden ennusteita viimeisimpiin LHC-kiihdyttimeltä mitattuihin suoran fotonituoton tuloksiin. Osoittautuu, että teoreettiset vaikutusalat vastaavat todella hyvin mittaustuloksia. Teoreettisia ja mitattuja vaikutusaloja verrataan toisiinsa laskemalla näiden suhdetta kuvaavat K-tekijät virherajoineen, joiden perusteella nähdään, että fragmentaatio-osuuden vaikutus suoraan fotonituottoon on merkittävä. Lisäksi tutkitaan protoni–protoni-sironnan kautta syntyvien suorien fotonien vaikutusalojen suhteita raskasionitörmäyksien vaikutusaloihin sironnoista $\mathrm{p}+\mathrm{Pb}\to\gamma+X$, $\mathrm{Pb}+\mathrm{Pb}\to\gamma+X$, $\mathrm{d}+\mathrm{Au}\to\gamma+X$ ja $\mathrm{Au}+\mathrm{Au}\to\gamma+X$. Työssä on käytetty ydinmodifikaatiofunktioita EPS09[12], EKS98[13] ja EPS08[14]. Näiden lisäksi lasketaan K-tekijät eri ydinmodifikaatioilla sironnalle $\mathrm{Pb}+\mathrm{Pb}\to\gamma+X$ käyttämällä CMS-kollaboraation mittausdataa [29]. Tulokset osoittavat, että ydinmodifikaatioilla on tärkeä vaikutus laskettaessa teoreettista suoran fotonituoton vaikutusalaa suurienergiaisille raskasionitörmäyksille.

3 Johdanto

Hiukkasfysiikan Standardimallin teoriaan kuuluu kaksi erillistä osaa, nämä ovat sähköheikko yhtenäisteoria ja kvanttiväridynamiikka eli QCD[1]. Sähköheikko yhtenäisteoria puolestaan jakautuu kahdeksi osaksi, joita ovat heikkoja vuorovaikutuksia kuvaava teoria sekä sähkömagneettisia ilmiöitä kuvaava teoria kvanttisähködynamiikka, QED[2]. Hiukkasfysiikan Standardimalli on äärimmäisen vahva ja tarkasti luontoa kuvaileva teoriakokonaisuus, fysiikan vuorovaikutuksista ainoastaan gravitaatioilmiöt eivät sisälly Standardimalliin. Standardimalli on ehkäpä ihmiskunnan tarkimmin testattu teoriakokonaisuus.

Myös tässä Pro Gradu -tutkielmassa tutkitaan sähkömagneettisen ja vahvan vuorovaikutuksen teorioiden ennusteita sekä verrataan näitä tuloksia viimeisimpiin hiukkaskiihdytinkokeiden tuloksiin. Tutkimuskohteena on suora fotonituotto suurienergiaisista ydintörmäyksistä. Suoran fotonituoton tutkimuksessa yhdistyvät atomiydinten vahvan vuorovaikutuksen ilmiöt sähkömagneettisen vuorovaikutuksen välittäjähiukkasen, fotonin, syntymiseen. Hiukkaskiihdytinkokeiden suoran fotonituoton mittaukset voivat antaa arvokasta tietoa vahvan vuorovaikutuksen hiukkasten, kvarkkien, antikvarkkien ja näitä toisiinsa sitovien gluonien jakaumista atomiytimissä. Suora fotonituotto voi auttaa myös viimeaikaisissa CERN-LHC[3]:n hiukkaskiihdytinkokeissa havaitun Standardimallin Higgsin hiukkasen [1] hajoamismekanismien ymmärtämisessä, koska ATLAS- ja CMS-kollaboraatioiden [2], [3] mittauksissa Higgsin hiukkasen hajoaminen kahdeksi fotoniksi on osoittautunut yhdeksi selkeimmistä hajoamiskanavista.

Tämän Pro Gradu -tutkielman tarkoituksena on jatkaa erikoistyössä [4] aloitettu suoran fotonituoton tutkimusta. Suorilla fotoneilla tarkoitetaan fotoneja, jotka muodostuvat vahvan vuorovaikutusten sirontaprosessien kautta, eivätkä esimerkiksi jonkin hiukkasen hajoamistuotteena. Erikoistyössä rajoituttiin tutkimaan suoraa fotonituottoa kahdesta perusprosessista, QCD-Compton-sironta ja kvarkki–antikvarkki-parin annihilaatio, ja näistä syntyvän fotonin sirontaa 90° kulmaan törmääviin ytimiin nähden. Näiden kahden prosessin kautta syntyviä suoria fotoneja kutsutaan ”nopeiksi fotoneiksi”, johtuen englannin kielen termistä ”prompt photons”. Tässä työssä jatketaan näiden nopeiden fotonien analyysiä myös muissa sirontakulmissa, ja lisäksi suorien fotonien analyysiin sisällytetään niin sanotut fragmentaatiofotonit. Fragmentaatiofotonit syntyvät suurienergiaisissa ydintörmäyksissä, kun törmäävien atomiytimien sisältämät kvarkit, antikvarkit ja gluonit, muodostavat sirontaprosessin kautta vahvan vuorovaikutuksen hiukkasen, joka säteilee fotonin. Tässä työssä tullaan näkemään, että fragmentaatiofotonit muodostavat merkittävän osuuden suoran fotonituoton vaikutusalasta. Toisinaan tässä

[1]Engl. Quantum chromodynamics = Kvanttiväridynamiikka.
[2]Engl. Quantum electrodynamics = Kvanttisähködynamiikka.
[3]LHC = Large Hadron Collider.

työssä viitataan nopeisiin fotoneihin lyhenteellä (LO, ”lowest order”) ja fragmentaatiofotoneihin lyhenteellä (frag).

Suoran fotonituoton ymmärtämiseksi tarvitaan sekä sähkömagneettisen että vahvan vuorovaikutuksen ilmiöitä. Näistä ensimmäinen kuvaa sähkömagneettisen säteilyn, fotonien, ja sähköisesti varattujen spin–$\frac{1}{2}$-hiukkasten, fermionien, välistä dynamiikkaa. Vähintään yhtä tärkeässä osassa tässä työssä on vahvan vuorovaikutuksen ilmiöt, jotka vaikuttavat kvarkkien ja antikvarkkien, jotka ovat spin–$\frac{1}{2}$-hiukkasia, ja näitä toisiinsa sitovien gluonien välillä.

Vahvaa vuorovaikutusta kuvaavan QCD-teorian perusta on että kvarkit, antikvarkit ja gluonit eivät esiinny luonnossa vapaina itsenäisinä hiukkasina, vaan ne esiintyvät QCD-värineutraaleissa kahden tai kolmen kvarkin tai antikvarkin yhdistelminä. Kvarkki–antikvarkki-kombinaation yhdistelmiä kutsutaan mesoneiksi ja kolmen kvarkin yhdistelmiä baryoneiksi. Yhteisesti mesoneita ja baryoneita kutsutaan hadroneiksi. Tunnetuimmat hadronit ovat protoni ja neutroni, joista atomiytimet koostuvat. Protonin perusrakenne muodostuu kahdesta u-kvarkista ja yhdestä d-kvarkista sekä neutronin kahdesta d-kvarkista ja yhdestä u-kvarkista, ja näitä kutsutaan protonin ja neutronin valenssikvarkeiksi. Protonin ja neutronin perusrakenteessa on siis kaksi ”kvarkkimakua”, u- ja d-kvarkit. Vaikka protoni ja neutroni koostuvat perusrakenteeltaan u- ja d-kvarkeista, niin silti nämä hadronit sisältävät myös muut tunnetut kvarkkimaut, joita ovat s-, c-, b- ja t-kvarkit. Nämä niin sanotut merikvarkit saadaan hadroneista esille, kun hadroneita kiihdytetään erittäin lähelle valon nopeutta, jolloin valenssikvarkkeihin kytkeytyneisiin gluoneihin muodostuu kvarkki–antikvarkki-silmukoita, joissa merikvarkit voivat esiintyä. Merikvarkkien esiintyvyyteen vaikuttaa merkittävästi energiaskaala, jolla näitä hiukkasia pyritään löytämään, esimerkiksi b- ja t-kvarkkien vaikutus tulee näkyviin vasta, kun näille kvarkeille ominaiset massakynnykset ylittyvät. Nämä skaalat ovat $m_b \sim 4,2\,\mathrm{GeV}$ ja $m_t \sim 173,5\,\mathrm{GeV}$ [5].

Kvarkkeja, antikvarkkeja ja gluoneja kutsutaan yhteisnimeltään partoneiksi ja näiden jakaumia atomeissa partonijakaumiksi. Partonijakaumat kuvaavat partonien lukumäärätiheyttä hadronissa energiaskaalan ja liikemääräosuuden funktioina. Partonin liikemääräosuus lasketaan tässä alkuperäisen hadronin liikemäärästä. Eräs tämän työn motiiveista on tutkia, miten ydinpartonijakaumat vaikuttavat suorien fotonien syntymiseen suurienergiaisissa raskasionitörmäyksissä.

4 Vaikutusala

Hiukkas- ja ydinfysiikassa hiukkasvuorovaikutusten todennäköisyyttä kuvaa vaikutusala, jota merkitään yleensä kreikkalaisella kirjaimella σ. Vaikutusalalla tarkoitetaan sirontatapahtumien $A + B \to 1 + \ldots + n$ lukumäärää aikayksikössä yhtä kohtiohiukkasta B kohti, jaettuna sisään tulevien ammushiukkasten A vuolla.

Hiukkasten A ja B vuorovaikutusten kautta syntyy n kappletta hiukkasia. Käytännössä vaikutusala riippuu törmäävistä hiukkastyypeistä A ja B, hiukkasvuorovaikutusten voimakkuudesta sekä hiukkasten A ja B törmäysenergioista.

Vaikutusalan dimensio on sama kuin pinta-alan dimensio. Hiukkasfysiikassa käytetään yleensä yksikköjärjestelmää, jossa luonnonvakiot asetetaan ykkösiksi,

$$\hbar = c = 1.$$

Tällöin mitattavien suureiden yksikkö on jokin energian potenssi elektronivoltteina. Vaikutusalan dimensio käytettäessä tätä yksikköjärjestelmää on $[\sigma] = \mathrm{eV}^{-2}$.

Törmäysprosessissa $A + B \to 1 + \ldots + n$ kvanttimekaaniset hiukkaset A ja B törmäävät toisiinsa erittäin suurella energialla, jolla tarkoitetaan, että hiukkaset törmäävät toisiinsa lähes valon nopeudella. Merkitään hiukkasten A ja B energioita ja liikemääriä 4-liikemäärien avulla $p_A = (E_A, \mathbf{p}_A)$ ja $p_B = (E_B, \mathbf{p}_B)$, missä E_A ja E_B ovat hiukkasten energiat sekä $\mathbf{p}_A$ ja $\mathbf{p}_B$ 3-komponenttiset liikemäärät. Sivulla 59 yhtälössä (32) on määritelty nelivektorien sisätulo, jonka avulla saadaan törmääville hiukkasille A ja B massan, energian ja liikemäärän relaatiot $m_A^2 \equiv p_A^2 = E_A^2 - |\mathbf{p}_A|^2$ ja $m_B^2 \equiv p_B^2 = E_B^2 - |\mathbf{p}_B|^2$. Vastaavasti sirontaprosessissa syntyvien hiukkasten 4-liikemäärät ovat $k_i = (k_i^0, \mathbf{k}_i), i = 1, \ldots, n$, missä k_i^0 ja $\mathbf{k}_i$ ovat i:nnen hiukkasen energia ja 3-liikemäärä.

Differentiaalinen vaikutusala sirontaprosessille $A + B \to 1 + \ldots + n$ [6, s.808] on

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\sigma &= \frac{\overline{|\mathcal{M}_n|^2}}{F} \mathrm{d}\Pi_n \\ &= \frac{\overline{|\mathcal{M}_n|^2}}{2E_A 2E_B |v_A - v_B|} \prod_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{k}_i}{(2\pi)^3 2k_i^0} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - \sum_{j=1}^{n} k_j)\,, \end{aligned} \tag{1}$$

missä $\overline{|\mathcal{M}_n|^2}$ on spin- ja väri-keskiarvoistettu sironta-amplitudin neliö, F törmäävien hiukkasten A ja B vuotekijä ja $\mathrm{d}\Pi_n$ lopputilan hiukkasten faasiavaruuselementti.

Sironta-amplitudin $\mathcal{M}_n$ kirjoittamiseksi matematiikan kielelle tarvitaan kvanttikenttäteorioiden Feynmanin sääntöjä, joita sovelletaan kussakin törmäysprosessissa erikseen. Tässä työssä tutkitaan fotoneja, jotka syntyvät atomiydinten kvarkkien ja gluonien sironnoissa, joten tässä työssä tarvitaan sekä sähkömagneettisen että vahvan vuorovaikutuksen Feynmanin sääntöjä. Nämä löytyvät tämän tutkielman liitteistä sivulta 61 kuvasta 36 sekä sivulta 62 kuvasta 37.

Vaikutusalassa (1) esiintyvässä vuotekijässä $F = 2E_A 2E_B |v_A - v_B|$ tekijä $|v_A - v_B|$ edustaa törmäävien hiukkasten A ja B nopeuksia suhteessa toisiinsa. Vuotekijä voidaan ilmaista vaikutusalalaskujen kannalta käytännöllisemmässä muodossa hiukkasten A ja B 4-liikemäärien ja massojen avulla, $F = 4\sqrt{(p_A \cdot p_B)^2 - m_A^2 m_B^2}$, tämän laskun tarkemmat yksityiskohdat ovat liitteiden sivulla 59 yhtälössä (34).

Faasiavaruuselementissä $\mathrm{d}\Pi_n$ esiintyy kunkin lopputilan hiukkasen $i = 1, \ldots, n$ differentiaalinen liikemääräelementti muodossa $\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{k}_i}{(2\pi)^3 2k_i^0}$, jossa $\mathbf{k}_i$ on hiukkasen i 3-liikemäärä ja k_i^0 energia. Elementissä esiintyvä neliulotteinen deltafunktio $\delta^{(4)}(p_A + p_B - \sum_{j=1}^n k_j)$ kuvaa energian ja liikemäärän säilymistä sirontaprosessissa, missä siis p_A, p_B ja $\sum_{j=1}^n k_j$, ovat kaikkien sirontaprosessissa mukana olevien hiukkasten 4-liikemäärät.

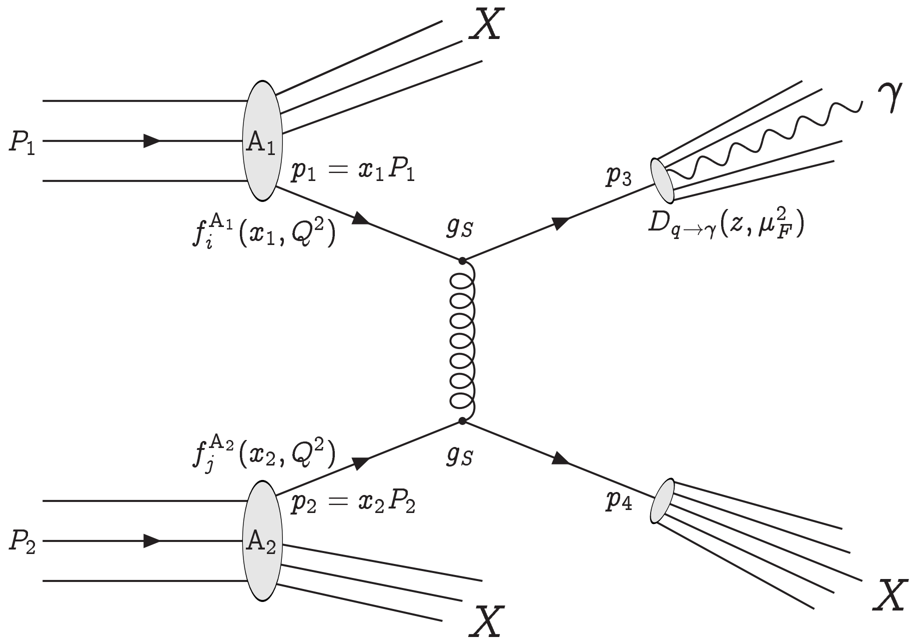
5 Suoran fotonituoton mekanismit raskasionitörmäyksissä

Suoran fotonin muodostuminen suurienergiaisesta raskasionitörmäyksestä voi tapahtua kahdella tavalla, joko siten, että fotoni on suoraan osallisena sirontaprosessissa tai siten, että vahvan vuorovaikutuksen sironnassa tuotettu kvarkki tai gluoni säteilee fotonin. Prossessia, jossa fotoni on suoraan osallisena sirontaprosessissa kutsutaan nopeaksi fotoniksi ja jälkimmäisessä tapauksessa syntynyttä fotonia fragmentaatiofotoniksi. Molemmissa tapauksissa suoran fotonituoton sironnat sisältävät sekä vahvan että sähkömagneettisen vuorovaikutuksen ilmiöitä. Suora fotonituotto on teoreettisen tutkimuksen kannalta erinomainen prosessi vahvan vuorovaikutuksen prosessien tutkimiseen, koska prosesseissa syntyvien fotonien fysikaaliset ominaisuudet ovat tarkasti mitattavissa. Tässä työssä sekä nopeat prosessit että fragmentaatioprosessit ovat efektiivisesti verrannollisia vahvan vuorovaikutuksen kytkinvakioon $\alpha_S(\mu_R^2)$, jossa μ_R^2 on prosessin vuorovaikutusenergian skaala, ja sähkömagneettisen vuorovaikutuksen voimakkuuteen $\alpha_{em} = \frac{e^2}{4\pi} \sim \frac{1}{137}$ vuorovaikutusten kertaluvussa $\mathcal{O}(\alpha_{em}\alpha_S)$.

Fragmentaation kautta syntyvien fotonien vaikutusalalaskut noudattavat pääpiirteittäin julkaisussa [7] esitettyjä vaikutusalalaskuja, joissa fragmentoituva hiukkanen on hadroni. Häiriöteoreettisesti hiukkasten vuorovaikutusmekanismit voivat sisältää äärettömiä suureita, jotka voidaan sisällyttää QCD:n faktorisaatioteoreeman perusteella partonijakaumien ja fragmentaatiofunktioiden määrittelyihin. QCD:n faktorisaatioteoreeman mukaan suoran fotonituoton vaikutusala fragmentaation kautta on

$$\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{frag}}^{\mathrm{A_1+A_2}\to\gamma+\mathrm{X}} = \sum_{ijk} f_i^{A_1}(x_1, Q^2) f_j^{A_2}(x_2, Q^2) \mathrm{d}\hat{\sigma}^{ij\to k+X}(x_1, x_2, Q^2, \alpha_S(\mu_R^2)) D_{k\to\gamma}(z, \mu_F^2), \quad (2)$$

missä atomiytimistä A_1 ja A_2 peräisin olevat partonit i ja j muodostavat partonitason sirontaprosessin $\mathrm{d}\hat{\sigma}^{ij\to k+X}$ kautta hiukkasen k, joka säteilee fotonin γ. Vaikutusalassa (2) esiintyvät funktiot $f_i^{A_1}(x_1, Q^2)$ ja $f_j^{A_2}(x_2, Q^2)$ ovat partonien i ja j ydinpartonijakaumia, joissa x_1 ja x_2 ovat partonien i ja j 4-liikemääräosuudet ydinten A_1 ja A_2 4-liikemääristä ja partonijakaumien energiaskaala on Q^2. Fragmentaatiofunktiossa $D_{k\to\gamma}(z, \mu_F^2)$ muuttuja z on fotonin γ ja hiukkasen k ener-



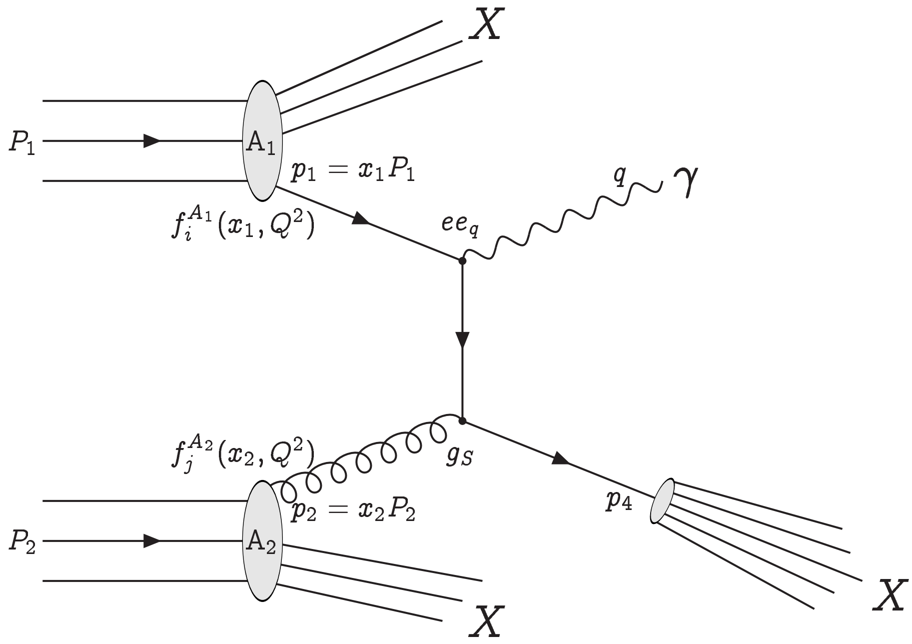
Kuva 1: Esimerkki fragmentaatiofotonin synnystä prosessista $\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 \to \gamma + X$, jossa atomiytimien A_1 ja A_2 sironnan kautta syntyy fotoni γ ja joukko muita hiukkasia X. Kuvassa ytimien A_1 ja A_2 4-liikemäärät ovat P_1 ja P_2, jolloin näistä ytimistä peräisin olevat partonit i ja j, 4-liikemääriltään p_1 ja p_2, vuorovaikuttavat vahvan vuorovaikutuksen g_S ($\alpha_S = g_S^2/4\pi$) kautta muodostaen 2–2-sironnan kautta lopputilaan kaksi kvarkkia, 4-liikemäärillä p_3 ja p_4, joista toisesta fragmentoituu fotoni. Funktiot $f_i^{\mathrm{A}_1}(x_1, Q^2)$ ja $f_j^{\mathrm{A}_2}(x_2, Q^2)$ ovat alkutilan partonien i ja j partonijakaumia liikemääräosuuksilla x_1 ja x_2 sekä energiaskaalalla Q^2. Fotonin fragmentaatiota kvarkista kuvaa funktio $D_{q\to\gamma}(z, \mu_F^2)$, missä z on fotonin energiaosuus kvarkin energiasta, josta fotoni muodostuu, sekä μ_F^2 on fragmentaation energiaskaala. Vahvan vuorovaikutuksen kytkinvakio $\alpha_S(\mu_R^2)$ on myös riippuvainen vuorovaikutuspisteen kautta kulkevasta energiasta μ_R^2.

gioiden suhde, ja μ_F^2 on fragmentaation energiaskaala. Kuvassa 1 on esimerkki vaikutusalan (2) mukaisesta fragmentaatiofotonin synnystä.

Erikoistyössä [4] käsiteltiin kahta nopeaa prosessia, joiden kautta suora fotoni yleisimmin syntyy, nämä prosessit ovat QCD-Compton-sironta ja kvarkki–antikvarkki-parin annihilaatio. Näihin prosesseihin viitataan englanninkielisissä artikkeleissa termillä ”prompt photon”, joka tarkoittaa nopeaa fotonia. Nopeiden fotonien vaikutusala QCD:n faktorisaatioteoreeman mukaan on

$$\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{prompt}}^{\mathrm{A}_1+\mathrm{A}_2\to\gamma+\mathrm{X}} = \sum_{ijk} f_i^{A_1}(x_1, Q^2) f_j^{A_2}(x_2, Q^2) \mathrm{d}\hat{\sigma}^{ij\to\gamma+X}(x_1, x_2, Q^2, \alpha_S(\mu_R^2)), \qquad (3)$$

missä $\mathrm{d}\hat{\sigma}^{ij\to\gamma+X}$ eroaa fragmentaatiofotonien vaikutusalassa (2) esiintyvästä $\mathrm{d}\hat{\sigma}^{ij\to k+X}$ siten, että nopeat fotonit syntyvät suoraan 2–2-sirontaprosesseista eivätkä sironnan jälkeisestä fragmentaatiosta $D_{k\to\gamma}$. Kuvassa 2 on nopean fotonituoton periaate QCD-Compton-sironnasta.



Kuva 2: Esimerkkisironta nopean fotonin synnystä QCD-Compton-sironnan kautta. Atomiytimestä A_1 peräisin oleva kvarkki vuorovaikuttaa atomiytimestä A_2 peräisin olevan gluonin kanssa, jolloin lopputilaan muodostuu kvarkki ja fotoni γ. Symbolien selitykset ovat vastaavat kuin kuvassa 1, mutta lisäksi syntyvän fotonin sähkömagneettista vuorovaikutuspistettä kuvaa ee_q, jossa e on alkeisvaraus ja e_q kvarkin murtolukuvaraus, sekä q fotonin 4-liikemäärä.

5.1 Kinematiikkaa

Tässä työssä nopeiden fotonien tuotto tapahtuu 2–2-sirontojen kautta vuorovaikutuksien kertaluvussa $\mathcal{O}(\alpha_{em}\alpha_S)$, mikä tarkoittaa, että alkutilassa kaksi partonia vuorovaikuttavat keskenään ja lopputilaan syntyy kaksi hiukkasta, joista toinen on fotoni. Alkutilan vuorovaikuttavat partonit ovat peräisin atomiytimistä A_1 ja A_2, joilla on 4-liikemäärät $P_1 = (P_1^0, \mathbf{P}_1)$ ja $P_2 = (P_2^0, \mathbf{P}_2)$. Hiukkaskiihdytinkokeissa atomiytimien kiihdytysenergia esitetään niin sanotun Mandelstamin muuttujan s avulla, joka on

$$s \equiv (P_1 + P_2)^2.$$

Ytimien A_1 ja A_2 massakeskipistekoordinaatisto määritellään relaatiolla $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 \equiv 0$, jonka sijoittamalla muuttujaan s ja valitsemalla törmäävien ytimien liikesuunnaksi z-akselin suunta saadaan $\sqrt{s} = P_1^0 + P_2^0$ ja

$$\begin{aligned} P_1 &= (P_1^0, \mathbf{P}_1) = (\frac{\sqrt{s}}{2}, 0, 0, \frac{\sqrt{s}}{2}), \\ P_2 &= (P_2^0, \mathbf{P}_2) = (\frac{\sqrt{s}}{2}, 0, 0, -\frac{\sqrt{s}}{2}). \end{aligned} \tag{4}$$

Atomiydinten törmäyksessä ydinten sisältämät kvarkit ja gluonit, jotka siis muodostavat osan ydinten 4-liikemääristä, pääsevät vuorovaikuttamaan keskenään.

Olkoon ytimestä A_1 peräisin olevan partonin 4-liikemäärä p_1 ja ytimestä A_2 peräisin olevan p_2. Näiden partonien 4-liikemäärät ovat ytimien A_1 ja A_2 (4) avulla ilmaistuna seuraavasti

$$\begin{aligned} p_1 &= x_1 P_1 = (x_1 \frac{\sqrt{s}}{2}, 0, 0, x_1 \frac{\sqrt{s}}{2}), \\ p_2 &= x_2 P_2 = (x_2 \frac{\sqrt{s}}{2}, 0, 0, -x_2 \frac{\sqrt{s}}{2}), \end{aligned} \tag{5}$$

missä x_1 ja x_2 ovat 4-liikemääräosuuksia ydinten A_1 ja A_2 4-liikemääristä, ja $x_1, x_2 \in [0,1]$. Tässä siis oletetaan törmäävien partonien liikkuvan samansuuntaisesti emoytimien kanssa.

Tässä työssä käsitellyt partonien sironnat ovat 2–2-sirontoja. Merkitään kyseisessä sirontaprosessissa syntyvien hiukkasten 4-liikemääriä

$$\begin{aligned} p_3 &= (E_3, \mathrm{p}_3) = (E_3, p_{3x}, p_{3y}, p_{3z}), \\ p_4 &= (E_4, \mathrm{p}_4) = (E_4, p_{4x}, p_{4y}, p_{4z}), \end{aligned} \tag{6}$$

missä E_3 ja E_4 ovat syntyvien hiukkasten energiat sekä $\mathrm{p}_3 = (p_{3x}, p_{3y}, p_{3z})$ ja $\mathrm{p}_4 = (p_{4x}, p_{4y}, p_{4z})$ 3-liikemäärävektorit. Vaikutusalalaskujen kannalta käytännöllinen kinemaattinen muuttuja on pitkittäissuuntainen rapiditeetti

$$y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E + p_z}{E - p_z} \right) = \tanh^{-1} \left(\frac{p_z}{E} \right), \tag{7}$$

missä E on hiukkasen energia ja p_z z-akselin suuntainen liikemääräkomponentti. Määrittelemällä 2–2-törmäyksessä syntyville hiukkasille poikittaisliikemäärävektorit $\vec{p}_{3T} \equiv (p_{3x}, p_{3y})$ ja $\vec{p}_{4T} \equiv (p_{4x}, p_{4y})$, sekä käyttämällä rapiditeetin määritelmää (7) voidaan 4-liikemäärät (6) kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} p_3 &= (E_3, \mathrm{p}_3) = (|\vec{p}_{3T}| \cosh y_3, \vec{p}_{3T}, |\vec{p}_{3T}| \sinh y_3), \\ p_4 &= (E_4, \mathrm{p}_4) = (|\vec{p}_{4T}| \cosh y_4, \vec{p}_{4T}, |\vec{p}_{4T}| \sinh y_4). \end{aligned} \tag{8}$$

Todellisessa hiukkaskiihdytinkokeessa törmäävillä ytimillä voi olla hieman poikittaisliikemäärää, mutta tässä oletetaan, että alkuperäisillä ytimillä A_1 ja A_2 ei ole poikittaisliikemääriä. Tällöin liikemäärän säilymislain perusteella on $\vec{p}_{3T} + \vec{p}_{4T} = 0$, josta $|\vec{p}_{3T}| = |-\vec{p}_{4T}| \equiv p_T$. Lopputilan hiukkasten 4-liikemäärät (8) poikittaisliikemäärän p_T avulla ovat siten

$$\begin{aligned} p_3 &= (E_3, \mathrm{p}_3) = (p_T \cosh y_3, \vec{p}_T, p_T \sinh y_3), \\ p_4 &= (E_4, \mathrm{p}_4) = (p_T \cosh y_4, -\vec{p}_T, p_T \sinh y_4). \end{aligned} \tag{9}$$

Alkutilan partoneiden (5) liikemääräosuudet x_1 ja x_2 voidaan ratkaista energian ja liikemäärän säilymislakien avulla rapiditeettien y_3 ja y_4 suhteen. Energian ja liikemäärän säilymislait 4-liikemäärien (5) ja (9) avulla ovat

$$\begin{aligned} x_1\frac{\sqrt{s}}{2}+x_2\frac{\sqrt{s}}{2} &= p_T\cosh y_3 + p_T\cosh y_4 \text{ ja} \\ x_1\frac{\sqrt{s}}{2}-x_2\frac{\sqrt{s}}{2} &= p_T\sinh y_3 + p_T\sinh y_4. \end{aligned} \tag{10}$$

Yhtälöistä (10) ylempi kuvaa energian säilymislakia ja alempi liikemäärän säilymistä prosessissa, kun törmäävien partoneiden liikesuunta on z-akselin suuntainen. Yhtälöistä (10) saadaan suoraan liikemääräosuudet x_1 ja x_2 ratkaistuksi rapiditeettien y_3 ja y_4 avulla, eli

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{p_T}{\sqrt{s}}(e^{y_3}+e^{y_4}) \\ x_2 &= \frac{p_T}{\sqrt{s}}(e^{-y_3}+e^{-y_4}). \end{aligned} \tag{11}$$

Määritellään partonien 4-liikemäärien (5) ja (9) avulla partonitason Mandelstamin muuttujat

$$\begin{aligned} \hat{s} &\equiv (p_1+p_2)^2 = (p_3+p_4)^2 = x_1x_2s \\ \hat{t} &\equiv (p_1-p_3)^2 = (p_2-p_4)^2 = -x_1p_T\sqrt{s}e^{-y_3} \\ \hat{u} &\equiv (p_1-p_4)^2 = (p_2-p_3)^2 = -x_2p_T\sqrt{s}e^{y_3}, \end{aligned} \tag{12}$$

joiden liikemääräosuudet x_1 ja x_2 ovat yhtälössä (11).

6 Suoran fotonituoton vaikutusalat

6.1 Fragmentaatiofotonien vaikutusala

Tässä osassa johdetaan fragmentaation kautta syntyvien fotonien vaikutusalakaavat seuraillen julkaisussa [7] johdettuja yhtälöitä fragmentaation kautta syntyville hadroneille.

Vaikutusalakaavan (1) perusteella partonisironnan ij $\rightarrow$ kl vaikutusala massakeskipistekoordinaatistossa on muotoa

$$\begin{aligned} E_3E_4\frac{\mathrm{d}^6\sigma^{\mathrm{ij}\to\mathrm{kl}}}{\mathrm{d}^3\mathbf{p}_3\mathrm{d}^3\mathbf{p}_4} &= \frac{1}{2\hat{s}}\frac{\overline{|\mathcal{M}(\mathrm{ij}\to\mathrm{kl})|^2}}{16\pi^2}\delta^{(4)}(p_1+p_2-p_3-p_4) \\ &= \frac{\hat{s}}{2\pi}\frac{\mathrm{d}\hat{\sigma}^{\mathrm{ij}\to\mathrm{kl}}}{\mathrm{d}\hat{t}}(\hat{s},\hat{t},\hat{u})\delta^{(4)}(p_1+p_2-p_3-p_4)\,, \end{aligned} \tag{13}$$

missä $\frac{\mathrm{d}\hat{\sigma}}{\mathrm{d}\hat{t}}(\hat{s},\hat{t},\hat{u}) = \frac{\overline{|\mathcal{M}(\mathrm{ij}\to\mathrm{kl})|^2}}{16\pi\hat{s}^2}$. Vaikutusalan kaavan (13) 3-liikemäärien differentiaalit $\mathrm{d}^3\mathbf{p}_3$ ja $\mathrm{d}^3\mathbf{p}_4$ voidaan kirjoittaa poikittaisliikemäärien $\vec{p}_{3T}$ ja $\vec{p}_{4T}$ sekä rapiditeettien y_3 ja y_4 avulla. Esimerkiksi $\mathbf{p}_3$:lle $\mathrm{d}^3\mathbf{p}_3 = \mathrm{d}\mathrm{p}_{3x}\mathrm{d}\mathrm{p}_{3y}\mathrm{d}\mathrm{p}_{3z} = E_3\mathrm{d}^2\vec{p}_{3T}\mathrm{d}y_3$, missä poikittaisliikemäärälle $\mathrm{dp}_{3x}\mathrm{dp}_{3y} = \mathrm{d}^2\vec{p}_{3T}$ ja pitkittäisliikemäärälle $\mathrm{dp}_{3z} = \left|\frac{\mathrm{dp}_{3z}}{\mathrm{d}y_3}\right|\mathrm{d}y_3 = E_3\mathrm{d}y_3$.Vaikutusalassa (13) esiintyvä $\delta^{(4)}(p_1+p_2-p_3-p_4)$ deltafunktio kuvaa energian ja liikemäärien säilymistä sirontaprosessissa. Deltafunktio voidaan kirjoittaa komponenttimuodossa käyttäen yhtälössä (11) esiintyviä liikemääräosuuksia x_1 ja x_2 sekä poikittaisliikemääriä $\vec{p}_{3T}$ ja $\vec{p}_{4T}$. Deltafunktio tulee muotoon

$$\delta^{(4)}(p_1+p_2-p_3-p_4) = \frac{2}{s}\delta(x_1-\frac{|\vec{p}_{3T}|}{\sqrt{s}}(e^{y_3}+e^{y_4}))\delta(x_2-\frac{|\vec{p}_{4T}|}{\sqrt{s}}(e^{-y_3}+e^{-y_4}))\delta^{(2)}(\vec{p}_{3T}+\vec{p}_{4T}).$$[4]

Sironnan ij $\to$ kl partonit i ja j katsotaan tulevan atomiytimistä A_1 ja A_2, jolloin vaikutusalasta (13) saadaan atomiydintason vaikutusala integroimalla partonien liikemääräosuuksien x_1 ja x_2 yli ja summaamalla eri partonimahdollisuudet

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^4\sigma^{\mathrm{A_1+A_2\to kl+X}}}{\mathrm{d}^2p_T\mathrm{d}y_3\mathrm{d}y_4} &= \int \mathrm{d}^2\vec{p}_{4T}\frac{\mathrm{d}^6\sigma^{\mathrm{A_1+A_2\to kl+X}}}{\mathrm{d}^2\vec{p}_{3T}\mathrm{d}y_3\mathrm{d}^2\vec{p}_{4T}\mathrm{d}y_4} \\
= \sum_{i,j=g,q,\bar{q}} &\int \mathrm{d}^2\vec{p}_{4T}\int_0^1 \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 f_{\mathrm{i}}^{\mathrm{A_1}}(x_1,Q^2)f_{\mathrm{j}}^{\mathrm{A_2}}(x_2,Q^2)\frac{\mathrm{d}^6\sigma^{\mathrm{ij\to kl}}}{\mathrm{d}^2\vec{p}_{3T}\mathrm{d}y_3\mathrm{d}^2\vec{p}_{4T}\mathrm{d}y_4} \\
= \sum_{\mathrm{i,j}=g,q,\bar{q}} & x_1 f_{\mathrm{i}}^{\mathrm{A_1}}(x_1,Q^2)x_2 f_{\mathrm{j}}^{\mathrm{A_2}}(x_2,Q^2)\frac{1}{\pi}\frac{\mathrm{d}\hat{\sigma}^{\mathrm{ij\to kl}}}{\mathrm{d}\hat{t}}(\hat{s},\hat{t},\hat{u}),
\end{aligned} \tag{14}$$

missä deltafunktion yli integroinnit antavat x_1:n ja x_2:n rapiditeettien ja poikittaisliikemäärän avulla, sekä poikittaisliikemäärän integrointi antaa $|\vec{p}_{4T}| = |-\vec{p}_{3T}| = p_T$. Vaikutuslassa (14) esiintyvällä poikittaisliikemäärällä p_T ei ole tarkoin määrättyä referenssisuuntaa atsimuuttikulman suhteen, koska alkutilan törmäävillä partoneilla i ja j ei katsota olevan poikittaisliikemääriä. Differentiaali d^2p_T voidaan ilmaista napakoordinaateissa ja keskiarvoistaa atsimuuttikulman ϕ suhteen, jolloin $\mathrm{d}^2p_T = p_T\mathrm{d}p_T\mathrm{d}\phi \to \pi\mathrm{d}p_T^2$, ja vaikutusalassa (14) esiintyvästä $1/\pi$ tekijästä päästään eroon.

Käytännössä partonit i ja j voivat tulla kummasta tahansa ytimestä A_1 tai A_2, joten huomioimalla partonien i ja j mahdolliset alkuperäkombinaatiot vaikutusalasta (14) saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^3\sigma^{\mathrm{A_1+A_2\to kl+X}}}{\mathrm{d}p_T^2\mathrm{d}y_3\mathrm{d}y_4} &= \sum_{<\mathrm{ij}>}\frac{1}{1+\delta_{\mathrm{ij}}}[x_1 f_{\mathrm{i}}^{\mathrm{A_1}}(x_1,Q^2)x_2 f_{\mathrm{j}}^{\mathrm{A_2}}(x_2,Q^2)\frac{\mathrm{d}\hat{\sigma}^{\mathrm{ij\to kl}}}{\mathrm{d}\hat{t}}(\hat{s},\hat{t},\hat{u}) \\
&+ x_1 f_{\mathrm{j}}^{\mathrm{A_1}}(x_1,Q^2)x_2 f_{\mathrm{i}}^{\mathrm{A_2}}(x_2,Q^2)\frac{\mathrm{d}\hat{\sigma}^{\mathrm{ij\to kl}}}{\mathrm{d}\hat{t}}(\hat{s},\hat{u},\hat{t})],
\end{aligned} \tag{15}$$

missä summauksessa esiintyvät parit $<\mathrm{ij}>= gg, gq, g\bar{q}, qq, q\bar{q}$ ja $\bar{q}\bar{q}$, sekä kvarkkimaut $q = u, d, s, c$ tai b.

Vaikutusalassa (15) esiintyvistä partoneista k ja l jommasta kummasta tai mahdollisesti molemmista halutaan muodostaa kvarkki, antikvarkki tai gluoni, joita

[4] Seuraa deltafunktioiden laskusäännöstä $\delta(a)\delta(b) = 2\delta(a+b)\delta(a-b)$.

edustaa hiukkanen f. Merkitään hiukkasen f rapiditeettia y_f, ja huomioimalla jälleen kombinatorisesti, että f voi olla kumpi tahansa sironnan k tai l lopputilan hiukkasista, sekä deltafunktion määritelmästä (33) sivulta 59, saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^3\sigma^{\mathrm{A_1+A_2\to f+X}}}{\mathrm{d}p_T^2\mathrm{d}y_\mathrm{f}} &= \int \mathrm{d}y_3\mathrm{d}y_4 \sum_{<\mathrm{kl}>} \frac{1}{1+\delta_{\mathrm{kl}}}[\delta_{\mathrm{kf}}\delta(y_\mathrm{f}-y_3)+\delta_{\mathrm{lf}}\delta(y_\mathrm{f}-y_4)]\frac{\mathrm{d}^3\sigma^{\mathrm{A_1+A_2\to kl+X}}}{\mathrm{d}p_T^2\mathrm{d}y_3\mathrm{d}y_4} \\
&= \int \mathrm{d}y_4 \sum_{<\mathrm{ij}><\mathrm{kl}>} \frac{1}{1+\delta_{\mathrm{ij}}}\frac{1}{1+\delta_{\mathrm{kl}}} \\
&\cdot \left\{ x_1 f_\mathrm{i}^{\mathrm{A_1}}(x_1,Q^2)x_2 f_\mathrm{j}^{\mathrm{A_2}}(x_2,Q^2)\left[\frac{\mathrm{d}\hat\sigma}{\mathrm{d}\hat t}^{\mathrm{ij\to kl}}(\hat s,\hat t,\hat u)\delta_{\mathrm{kf}}+\frac{\mathrm{d}\hat\sigma}{\mathrm{d}\hat t}^{\mathrm{ij\to kl}}(\hat s,\hat u,\hat t)\delta_{\mathrm{lf}}\right]\right. \\
&+ \left. x_1 f_\mathrm{j}^{\mathrm{A_1}}(x_1,Q^2)x_2 f_\mathrm{i}^{\mathrm{A_2}}(x_2,Q^2)\left[\frac{\mathrm{d}\hat\sigma}{\mathrm{d}\hat t}^{\mathrm{ij\to kl}}(\hat s,\hat u,\hat t)\delta_{\mathrm{kf}}+\frac{\mathrm{d}\hat\sigma}{\mathrm{d}\hat t}^{\mathrm{ij\to kl}}(\hat s,\hat t,\hat u)\delta_{\mathrm{lf}}\right]\right\} \quad (16)
\end{aligned}$$

Vaikutusalassa (16) esiintyvän hiukkasen f tarkoituksena on säteillä fotoni. Merkitään tämän fragmentaatiofotonin 4-liikemäärää

$$q = (E_\gamma, \mathbf{q}) = (q_T\cosh y_\gamma, \vec{q}_T, q_T\sinh y_\gamma),$$

missä fotonin energia $E_\gamma = q_T\cosh y_\gamma$, rapiditeetti y_γ ja poikittaisliikemäärän suuruus $q_T = |\vec{q}_T|$. Fragmentoitumisprosessissa vain tietty osa partonin f energiasta menee syntyvän fotonin energiaksi, ja tämän kvantifioimiseksi määritellään fotonin energian ja partonin f energian välille yhtälö

$$E_\gamma \equiv zE_\mathrm{f}, \quad (17)$$

missä $z\in[0,1]$. Sijoittamalla fotonin ja hiukkasen f energiat yhtälöön (17) saadaan

$$E_\gamma = q_T\cosh y_\gamma = zp_T\cosh y_\mathrm{f} = zE_\mathrm{f}.$$

Fragmentaatioprosessissa fotoni syntyy samansuuntaisesti partonin f kanssa, eli 3-liikemäärät $\mathbf{q} \upuparrows \mathbf{p}_\mathrm{f}$. Täten fotonin 3-liikemäärävektori voidaan esittää muodossa $\mathbf{q} = A\mathbf{p}_\mathrm{f}$, missä A on vakio. Vakio A saadaan ratkaistuksi relaatiosta $q^2 = 0 = E_\gamma^2 - \mathbf{q}^2 = z^2E_\mathrm{f}^2 - A^2\mathbf{p}_\mathrm{f}^2$, josta

$$A = z\cdot\frac{E_\mathrm{f}}{|\mathbf{p}_\mathrm{f}|} = z,$$

koska $p_\mathrm{f}^2 = 0$, eli $E_\mathrm{f} = |\mathbf{p}_\mathrm{f}|$. Joten $\mathbf{q} = (\vec{q}_T, q_T\sinh y_\gamma) = (z\vec{p}_T, zp_T\sinh y_\mathrm{f}) = z\mathbf{p}_\mathrm{f}$, josta seuraa $y_\gamma = y_\mathrm{f}$, koska $q_T = |\vec{q}_T| = z|\vec{p}_T| = zp_T$.

Vaikutusalan (16) sirontaprosessissa esiintyvän partonin f tehtävänä on fragmentatoida fotoni ja luovuttaa tälle osa energiastaan. Fragmentaatiofotonin vaikutusalaksi saadaan

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^3\sigma^{\mathrm{A_1+A_2\to\gamma+X}}}{\mathrm{d}q_T^2\mathrm{d}y_\gamma} &= \sum_{\mathrm{f}=g,q,\bar{q}}\int_0^1 \mathrm{d}z \int \mathrm{d}p_T^2\mathrm{d}y_\mathrm{f}\delta(q_T^2-(zp_T)^2)\delta(y_\gamma-y_\mathrm{f})\frac{\mathrm{d}^3\sigma^{\mathrm{A_1+A_2\to f+X}}}{\mathrm{d}p_T^2\mathrm{d}y_\mathrm{f}}D_{\mathrm{f}\to\gamma}(z,\mu_F^2)\\
&= \sum_{\mathrm{f}}\int_0^1 \mathrm{d}z \int \mathrm{d}p_T^2\mathrm{d}y_\mathrm{f}\delta(z^2(\frac{q_T^2}{z^2}-p_T^2))\delta(y_\gamma-y_\mathrm{f})\frac{\mathrm{d}^3\sigma^{\mathrm{A_1+A_2\to f+X}}}{\mathrm{d}p_T^2\mathrm{d}y_\mathrm{f}}D_{\mathrm{f}\to\gamma}(z,\mu_F^2)\\
&= \sum_{\mathrm{f}}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}z}{|z^2|} \int \mathrm{d}p_T^2\mathrm{d}y_\mathrm{f}\delta(\frac{q_T^2}{z^2}-p_T^2)\delta(y_\gamma-y_\mathrm{f})\frac{\mathrm{d}^3\sigma^{\mathrm{A_1+A_2\to f+X}}}{\mathrm{d}p_T^2\mathrm{d}y_\mathrm{f}}D_{\mathrm{f}\to\gamma}(z,\mu_F^2)\\
&= \sum_{\mathrm{f}}\int \frac{\mathrm{d}z}{z^2}\frac{\mathrm{d}^3\sigma^{\mathrm{A_1+A_2\to f+X}}}{\mathrm{d}p_T^2\mathrm{d}y_\mathrm{f}}\Bigg|_{p_T^2=\frac{q_T^2}{z^2},y_\mathrm{f}=y_\gamma} D_{\mathrm{f}\to\gamma}(z,\mu_F^2)\\
&= \int\frac{\mathrm{d}z}{z^2}\int \mathrm{d}y_4 \sum_{<\mathrm{ij}><\mathrm{kl}>}\frac{1}{1+\delta_{\mathrm{ij}}}\frac{1}{1+\delta_{\mathrm{kl}}}\\
&\cdot \Bigg\{x_1 f_\mathrm{i}^{\mathrm{A_1}}(x_1,Q^2)x_2 f_\mathrm{j}^{\mathrm{A_2}}(x_2,Q^2)\left[\frac{\mathrm{d}\hat{\sigma}}{\mathrm{d}\hat{t}}^{\mathrm{ij\to kl}}(\hat{t},\hat{u})D_{\mathrm{k}\to\gamma}(z,\mu_F^2)+\frac{\mathrm{d}\hat{\sigma}}{\mathrm{d}\hat{t}}^{\mathrm{ij\to kl}}(\hat{u},\hat{t})D_{\mathrm{l}\to\gamma}(z,\mu_F^2)\right]\\
&+ x_1 f_\mathrm{j}^{\mathrm{A_1}}(x_1,Q^2)x_2 f_\mathrm{i}^{\mathrm{A_2}}(x_2,Q^2)\left[\frac{\mathrm{d}\hat{\sigma}}{\mathrm{d}\hat{t}}^{\mathrm{ij\to kl}}(\hat{u},\hat{t})D_{\mathrm{k}\to\gamma}(z,\mu_F^2)+\frac{\mathrm{d}\hat{\sigma}}{\mathrm{d}\hat{t}}^{\mathrm{ij\to kl}}(\hat{t},\hat{u})D_{\mathrm{l}\to\gamma}(z,\mu_F^2)\right]\Bigg\}. \quad (18)
\end{aligned}
$$

Vaikutusalan (18) integrointirajat rapiditeetille y_4 saadaan asettamalla liikemääräosuudet $x_1 = x_2 = 1$, ja ratkaistaan liikemääräosuuksien yhtälöistä (11) rapiditeetti y_4. Integrointirajat y_4:lle ovat

$$
-\ln\left(\frac{\sqrt{s}}{p_T}-e^{-y_\gamma}\right) \leq y_4 \leq \ln\left(\frac{\sqrt{s}}{p_T}-e^{y_\gamma}\right). \quad (19)
$$

Fragmentaatiomuuttujan z integrointirajat saadaan z määrittelevän yhtälön (17) avulla. Massakeskipistekoordinaatistossa partonin f saavuttama maksimaalinen energia on puolet ytimiä kiihdyttävästä energiasta eli $E_{\mathrm{f,\,max}} = \frac{\sqrt{s}}{2}$, jolloin $z_{\mathrm{min}} = \frac{E_\gamma}{E_{\mathrm{f,\,max}}} = \frac{2q_T}{\sqrt{s}}\cosh y_\gamma$. Maksimissaan z on silloin, kun partoni f luovuttaa kaiken energiansa syntyvälle fotonille, jolloin $E_\gamma = E_\mathrm{f}$, ja tulee $z_{\mathrm{max}} = 1$. Muuttujan z integrointirajat ovat siis

$$
\frac{2q_T}{\sqrt{s}}\cosh y_\gamma \leq z \leq 1. \quad (20)
$$

Vaikutusalassa (18) esiintyy aliprosessien vaikutusaloja muodossa $\frac{\mathrm{d}\hat{\sigma}}{\mathrm{d}\hat{t}}^{\mathrm{ij\to kl}}$, nämä ovat vahvan vuorovaikutuksen 2–2-sirontoja, joita on vahvan vuorovaikutuksen kertaluvussa $\mathcal{O}(\alpha_S^2)$ yhteensä kahdeksaa eri tyyppiä. Vuorovaikutuksen voimakkuutta kuvaava merkintä $\mathcal{O}(\alpha_S^2)$ tarkoittaa, että vahvan vuorovaikutuksen vuorovaikutuspisteitä on yhteensä kaksi kappaletta. Näiden kahdeksan sirontaprosessin laskemiseen tarvittavat vahvan vuorovaikutuksen Feynmanin säännöt ovat kuvassa 37 sivulla 62.

Vahvan vuorovaikutuksen 2–2-sirontoja vahvan kytkinvakion kertaluvussa $\mathcal{O}(\alpha_S^2)$ ovat $q_iq_j \to q_iq_j$ ($q_i \neq q_j$ ja $q_i, q_j = q$ tai $\bar{q}$), $qq \to qq$, $q_i\bar{q}_i \to q_j\bar{q}_j$, $q\bar{q} \to q\bar{q}$, $q\bar{q} \to gg$,

Vahvan vuorovaikutuksen prosessi	$\frac{\hat{s}^2}{\pi\alpha_S^2}\frac{\mathrm{d}\hat{\sigma}}{\mathrm{d}\hat{t}}(\hat{s},\hat{t},\hat{u})$
$q_i q_j \to q_i q_j$	$\frac{4}{9}\frac{\hat{s}^2+\hat{u}^2}{\hat{t}^2}$
($q_i \neq q_j$ ja $q_i, q_j = q$ tai $\bar{q}$)	
$qq \to qq$	$\frac{4}{9}\left[\frac{\hat{s}^2+\hat{u}^2}{\hat{t}^2}+\frac{\hat{s}^2+\hat{t}^2}{\hat{u}^2}-\frac{2\hat{s}^2}{3\hat{t}\hat{u}}\right]$
$q_i\bar{q}_i \to q_j\bar{q}_j$	$\frac{4}{9}\frac{\hat{t}^2+\hat{u}^2}{\hat{s}^2}$
$q\bar{q} \to q\bar{q}$	$\frac{4}{9}\left[\frac{\hat{t}^2+\hat{u}^2}{\hat{s}^2}+\frac{\hat{s}^2+\hat{u}^2}{\hat{t}^2}-\frac{2\hat{u}^2}{3\hat{s}\hat{t}}\right]$
$q\bar{q} \to gg$	$\frac{8}{3}(\hat{t}^2+\hat{u}^2)\left[\frac{4}{9\hat{t}\hat{u}}-\frac{1}{\hat{s}^2}\right]$
$gg \to q\bar{q}$	$\frac{3}{8}(\hat{t}^2+\hat{u}^2)\left[\frac{4}{9\hat{t}\hat{u}}-\frac{1}{\hat{s}^2}\right]$
$gq \to gq$	$(\hat{s}^2+\hat{u}^2)\left[\frac{1}{\hat{t}^2}-\frac{4}{9\hat{s}\hat{u}}\right]$
$gg \to gg$	$\frac{9}{2}\left[3-\frac{\hat{t}\hat{u}}{\hat{s}^2}-\frac{\hat{s}\hat{u}}{\hat{t}^2}-\frac{\hat{s}\hat{t}}{\hat{u}^2}\right]$

Taulukko 1: Vahvan vuorovaikutuksen 2–2-sirontojen vaikutusalat $\hat{t}$-kanavan suhteen vahvan vuorovaikutuksen kertaluvussa $\mathcal{O}(\alpha_S^2)$, partonitason Mandelstamin muuttujat $\hat{s}$, $\hat{t}$ ja $\hat{u}$ määriteltiin yhtälöissä (12). Aliprosessien vaikutusalat löytyvät esimerkiksi julkaisusta [8, s. 1513].

$gg \to q\bar{q}$, $gq \to gq$ ja $gg \to gg$. Taulukossa 1 on näiden aliprosessien differentiaaliset vaikutusalat $\hat{t}$-kanavan suhteen. Liitteen sivulta 63 alkaen on esimerkkilaskuna prosessin $q_i q_j \to q_i q_j$ vaikutusalalasku.

Taulukon 1 vaikutusaloissa esiintyvä vahvan vuorovaikutuksen kytkinvakio α_S ei ole aivan sananmukaisesti vakio, vaan riippuu vuorovaikutuksen energiasta μ_R, jota kutsutaan renormalisaatioskaalaksi, ja kvarkkimakujen lukumäärästä. Vahvan vuorovaikutuksen kytkinvakio 1-silmukkatasolla on, [4, s. 21],

$$\alpha_S(\mu_R^2) = \frac{12\pi}{(33-2N_f)\ln(\mu_R^2/\Lambda_{N_f}^2)}, \tag{21}$$

missä N_f on kvarkkimakujen lukumäärä, käytännössä 4 tai 5. QCD:n sisäinen skaala Λ_{N_f} on energian skaalaustekijä, jonka numeerinen arvo riippuu käytetystä kvarkkimakujen lukumäärästä, numeerisissa simuloinneissa 4:lle kvarkkimaulle $\Lambda_{N_f=4} = 0,215\,\mathrm{GeV}$ ja viidelle $\Lambda_{N_f=5} = 0,165\,\mathrm{GeV}$, [9].

Nopea prosessi	$\frac{\hat{s}^2}{\pi e_q^2 \alpha_{em} \alpha_S} \frac{\mathrm{d}\hat{\sigma}}{\mathrm{d}\hat{t}}(\hat{s}, \hat{t}, \hat{u})$
$gq \to \gamma q$	$-\frac{1}{3} \frac{\hat{s}^2 + \hat{t}^2}{\hat{s}\hat{t}}$
$q\bar{q} \to \gamma g$	$\frac{8}{9} \frac{\hat{t}^2 + \hat{u}^2}{\hat{t}\hat{u}}$

Taulukko 2: Nopeat prosessit suorien fotonien tuottamiseksi kertaluvussa $\mathcal{O}(\alpha_{em}\alpha_S)$. Erikoistyöstä [4] löytyvät näiden prosessien yksityiskohtaiset vaikutusalalaskut.

6.2 Nopeiden fotonien vaikutusalat

Erikoistyössä [4] tutkittiin suoraa fotonituottoa nopeiden prosessien kautta, joissa fotoni syntyy suoraan partonisessa primääriverteksissä. Vahvan ja sähkömagneettisen vuorovaikutuksen kertaluvussa $\mathcal{O}(\alpha_{em}\alpha_S)$ nopeat prosessit ovat QCD-Compton-sironta ja kvarkki–antikvarkkiparin annihilaatio. Näiden prosessien vaikutusalojen yksityiskohtainen johtaminen löytyy erikoistyöstä [4, s. 12–21]. Tässä nopeiden fotoneiden vaikutusala saadaan kaavasta (15) korvaamalla toinen lopputilan partoneista fotonilla γ.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2\sigma^{\mathrm{A}_1+\mathrm{A}_2\to\gamma+\mathrm{X}}}{\mathrm{d}q_T^2\mathrm{d}y_\gamma} &= \int \mathrm{d}y_4 \sum_{q=u,d,\ldots} \{x_1[f_q^{\mathrm{A}_1}(x_1,Q^2) + f_{\bar{q}}^{\mathrm{A}_1}(x_1,Q^2)]x_2 f_g^{\mathrm{A}_2}(x_2,Q^2)\frac{\mathrm{d}\hat{\sigma}}{\mathrm{d}\hat{t}}^{qg\to\gamma q}(\hat{s},\hat{t},\hat{u}) \\
&+ \quad x_1 f_g^{\mathrm{A}_1}(x_1,Q^2)x_2[f_q^{\mathrm{A}_1}(x_2,Q^2) + f_{\bar{q}}^{\mathrm{A}_2}(x_2,Q^2)]\frac{\mathrm{d}\hat{\sigma}}{\mathrm{d}\hat{t}}^{qg\to\gamma q}(\hat{s},\hat{u},\hat{t}) \\
&+ \quad x_1 f_q^{\mathrm{A}_1}(x_1,Q^2)x_2 f_{\bar{q}}^{\mathrm{A}_2}(x_2,Q^2)\frac{\mathrm{d}\hat{\sigma}}{\mathrm{d}\hat{t}}^{q\bar{q}\to\gamma g}(\hat{s},\hat{t},\hat{u}) \\
&+ \quad x_1 f_{\bar{q}}^{\mathrm{A}_1}(x_1,Q^2)x_2 f_q^{\mathrm{A}_2}(x_2,Q^2)\frac{\mathrm{d}\hat{\sigma}}{\mathrm{d}\hat{t}}^{q\bar{q}\to\gamma g}(\hat{s},\hat{u},\hat{t})\}. \qquad (22)
\end{aligned}$$

Nopeiden fotonien vaikutusalassa (22) rapiditeetin y_4 integrointirajat ovat samat kuin fragmentaatiofotonien tapauksessa, eli y_4:n integrointirajat löytyvät yhtälöstä (19). Vaikutusalan (22) aliprosessien vaikutusalat $\mathrm{d}\hat{\sigma}/\mathrm{d}\hat{t}$ ovat taulukossa 2.

7 Partonijakaumat

Atomiytimet muodostuvat protoneista ja neutroneista, joita sitoo yhteen vahva vuorovaikutus. Protonit ja neutronit puolestaan koostuvat kvarkeista, antikvarkeista ja vahvan vuorovaikutuksen välittäjähiukkasista gluoneista. Kvarkkeja, antikvarkkeja ja gluoneja kutsutaan yhteisnimeltään partoneiksi, joka tulee englannin kielen termistä ”part-on” tarkoittaen osaa.

7.1 Protonin partonijakaumat

Yleisesti partonin i jakaumaa protonissa kuvaa funktio $f_i^{\mathrm{p}}(x, Q^2)$, missä x on partonin i liikemääräosuus protonin liikemäärästä ja Q^2 on vuorovaikutusenergiaskaala, jolla partoni i otetaan protonista ulos. Lähtökohtana protonia raskaampien atomiydinten partonijakaumille on protonin partonijakaumat, koska niiden avulla saadaan myös neutronien partonijakaumat. Protoni ja neutroni kuuluvat ominaisuuksiensa perusteella samaan isospin-duplettiin[10, s. 19], jonka perusteella protonin ja neutronin partonijakaumat ovat samankaltaiset. Käytännössä neutronin partonijakaumat saadaan protonin partonijakaumista isospin-symmetrian nojalla vaihtamalla u- ja d-kvarkkijakaumat keskenään, eli siis u-kvarkille $u^p(x, Q^2) = d^n(x, Q^2)$ ja d-kvarkille $d^p(x, Q^2) = u^n(x, Q^2)$, missä p viittaa protoniin ja n neutroniin.

Tässä työssä käytetyt protonin partonijakaumat ovat CTEQ-kollaboraation alimman kertaluvun jakaumia CTEQ6L1 [9]. Kuvassa 3 on numeerisessa simuloinnissa käytetyt CTEQ6L1-partonijakaumat kahdella eri energiaskaalalla, $Q^2 = 10\,\mathrm{GeV}^2$ ja $Q^2 = 10000\,\mathrm{GeV}^2$. Partonijakaumia ei voida lähtökohtaisesti laskea QCD-teoriasta, vaan ne tarvitsevat parametrisoinnin lähtökohdaksi mittaustuloksia. Tyypillisimmät partonijakaumien mittausprosessit ovat syvä epäelastinen sironta (DIS) ja Drell–Yan-prosessi, lyhyt johdattelu näihin prosesseihin löytyy esimerkiksi tutkielmasta [10]. Leptonisessa syvässä epäelastisessa sironnassa protonin rakenne rikotaan törmäyttämällä siihen esimerkiksi elektroni, jolloin sironneen elektronin sirontakulmasta ja energiasta pystytään päättelemään protonin sisäistä rakennetta. Drell–Yan-prosessissa puolestaan törmäytetään protoneita, jolloin mahdollisesti syntyy leptoni–antileptoni-pareja, joita mittaamalla saadaan myös tietoa protonien rakenteesta.

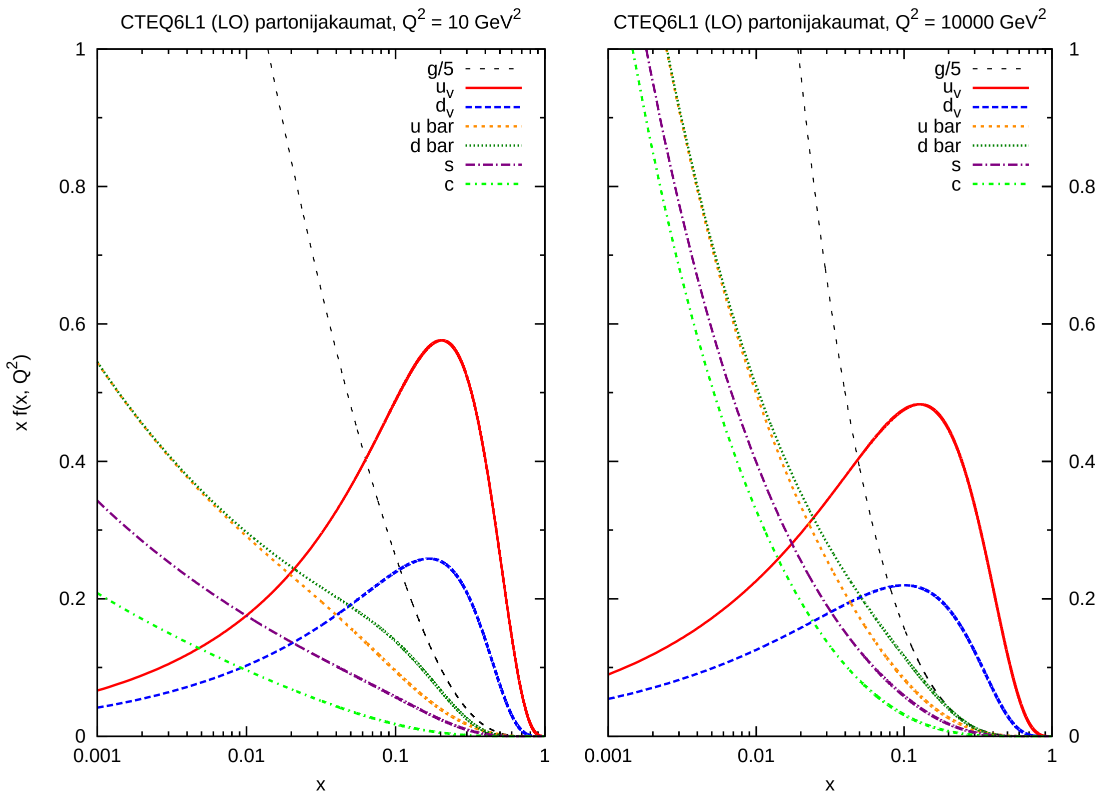
Kun mittauksiin perustuen on sovitettu tietty funktionaalinen muoto partonijakaumille, jollain skaalalla Q_0^2, niin sen jälkeen partonijakaumien muutosta energiaskaalan Q^2 suhteen voidaan mallintaa QCD-evoluutioyhtälöiden avulla. Näitä yhtälöitä kutsutaan löytäjiensä mukaisesti DGLAP-yhtälöiksi[5] [11], ja ne ovat yleisessä muodossa integro-differentiaaliyhtälöitä, joiden ratkaisemiseen täytyy käyttää numeerisia menetelmiä. Partonijakaumien parametrisoinnissa yleensä käytetty lähtöenergiaskaala on c-kvarkin massakynnys, joka tässä vastaa energiaa $Q_0^2 = 1,69\,\mathrm{GeV}^2$.

7.2 Protonia raskaampien ytimien partonijakaumat

Protonia raskaampien ytimien partonijakaumat saadaan vapaan protonin partonijakaumista kertomalla protonin partonijakaumaa kullekin ytimelle ominaisella ydinmodifikaatiotekijällä $R_i^A(x, Q^2)$. Ytimen A partonijakauma on siis muotoa

$$f_{\mathrm{i}}^{\mathrm{A}}(x, Q^2) \equiv R_{\mathrm{i}}^{\mathrm{A}}(x, Q^2) f_{\mathrm{i}}^{\mathrm{p}}(x, Q^2), \tag{23}$$

[5]DGLAP = Dokshitzer–Gribov–Lipatov–Altarelli–Parisi.



Kuva 3: Protonin partonijakaumat $xf(x, Q^2)$, $f = g/5, u_V, d_V, \bar{u}, \bar{d}, s, c, b$, jakaumat energiaskaaloilla $Q^2 = 10\,\mathrm{GeV}^2$ ja $Q^2 = 10000\,\mathrm{GeV}^2$. Symbolit u_V ja d_V viittaavat u- ja d-kvarkkijakaumien valenssikvarkkeihin. Partonijakaumat ovat tässä CTEQ-kollaboraation CTEQ6L1 -jakaumia [9], versio 6.6 vuodelta 2008.

missä ydinmodifikaatiofunktio $R_{\mathrm{i}}^{\mathrm{A}}(x, Q^2)$ on riippuvainen ytimen massaluvusta A, liikemääräosuudesta x ja energiaskaalasta Q^2. Tässä työssä käytetyt yhtälön (23) ydinmodifikaatiofunktiot ovat EPS09[12], EKS98[13] ja EPS08[14]. Erityisen mielenkiinnon kohteena ovat EPS09-ydinpartonijakaumat, koska näille jakaumille on saatavissa myös ydinpartonijakaumien parametrisoinnin virherajat. Ydinpartonijakaumat EKS98 ja EPS08 ovat tässä työssä lähinnä verrokkiasemassa. Ydinpartonijakauman (23) avulla kirjoitettuna esimerkiksi u-kvarkin jakauma ytimessä A on

$$
\begin{aligned}
u^{\mathrm{A}}(x, Q^2) &= \frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{A}} f_{\mathrm{u}}^{\mathrm{A}}(x, Q^2) + \frac{(\mathrm{A}-\mathrm{Z})}{\mathrm{A}} f_{\mathrm{d}}^{\mathrm{A}}(x, Q^2) \\
&= \frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{A}} R_{\mathrm{u}}^{\mathrm{A}}(x, Q^2) f_{\mathrm{u}}^{\mathrm{p}}(x, Q^2) + \frac{(\mathrm{A}-\mathrm{Z})}{\mathrm{A}} R_{\mathrm{d}}^{\mathrm{A}}(x, Q^2) f_{\mathrm{d}}^{\mathrm{p}}(x, Q^2), \qquad (24)
\end{aligned}
$$

missä A ja Z ovat ytimen massa- ja protoniluvut.

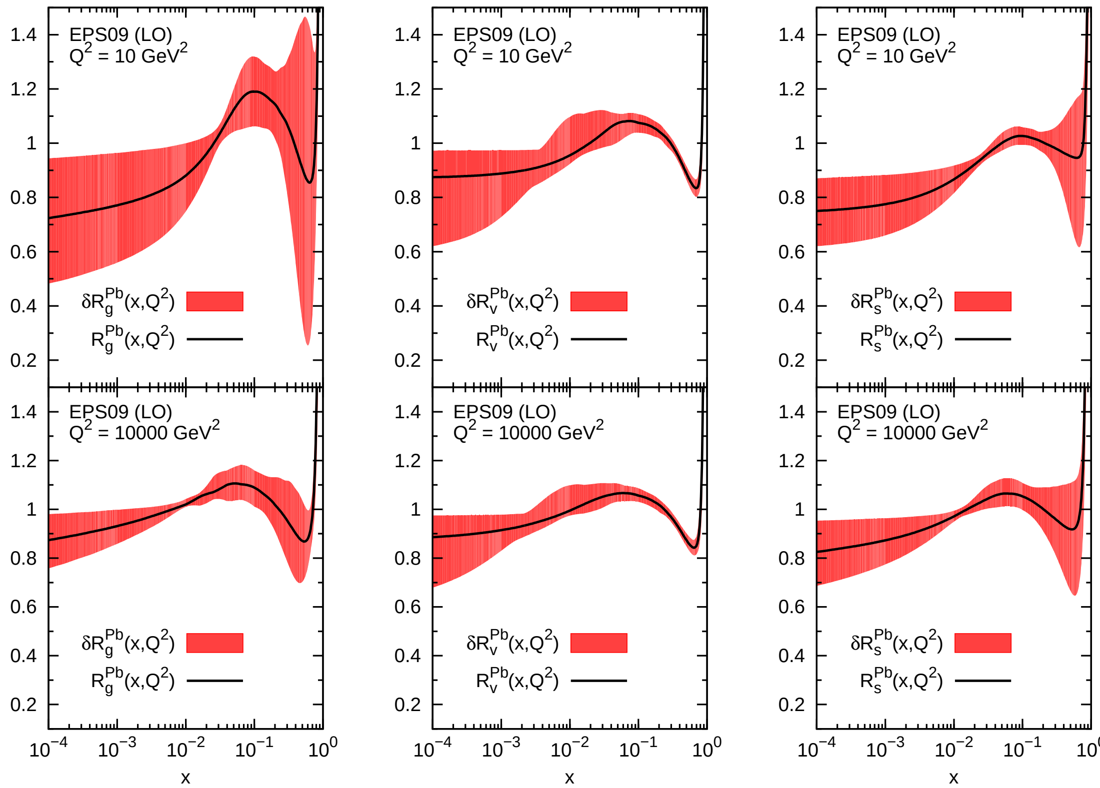
Yleisesti ottaen ydinmodifikaatiofunktiot $R_{\mathrm{i}}^{\mathrm{A}}(x, Q^2)$ ovat funktionaaliselta muodoltaan varsin monimutkaisia. Esimerkiksi EPS09[12] ydinmodifikaatioiden parametrisoinnissa on käytetty, a priori, 15:tä parametria, jotka sovitetaan mittaustuloksiin χ^2-minimointimenetelmällä. Julkaisussa [12] on tarkat kuvaukset sovituksissa käytetyistä ydinmodifikaatiofunktioista ja näiden parametreista. EPS09-jakaumien 15:lle sovitusparametrille on saatavissa sovitusparametrien virherajat, joiden välissä parametrien arvot voivat vaihdella. Julkaisussa [12, s. 26] suositellaan laskemaan halutun suureen X, esimerkiksi vaikutusalan, virheen ylä- ja alarajat erikseen muodossa

$$
\begin{aligned}
(\Delta X^+)^2 &\approx \sum_{i=1}^{15} [max\{X(S_i^+) - X(S_0), X(S_i^-) - X(S_0), 0\}]^2, \\
(\Delta X^-)^2 &\approx \sum_{i=1}^{15} [max\{X(S_0) - X(S_i^+), X(S_0) - X(S_i^-), 0\}]^2,
\end{aligned} \qquad (25)
$$

missä S_0 edustaa parasta mahdollista sovitusta, ja $S_1^{+/-}, \ldots, S_{15}^{+/-}$ muiden sovitusparametrien maksimi- ja minimivirheitä. Kuvassa 4 on lyijy-ytimen EPS09-modifikaatiot gluoni-, valenssikvarkki- ja merikvarkkijakaumille yhtälön (25) mukaisine virherajoineen. Kuvan perusteella voi todeta, että erityisesti matalaenergisilla ydinpartonijakaumilla, ja etenkin gluoneilla, on varsin suuret virherajat.

8 Fotonien fragmentaatiofunktiot

Fragmentaatiofunktio määritellään dimensiottomaksi funktioksi, joka kuvaa yksittäisen hiukkasen esiintymistodennäköisyysjakaumaa lukumääräjakaumaksi normitettuna hiukkasten törmäysprosessin lopputilassa [15, s. 193]. Fotonin fragmentaatiofunktioiden $D_{a\to\gamma}(z, \mu_F^2)$, $a = q$, $\bar{q}$ tai g, muuttujia ovat z, joka kuvaa fragmentoituneen fotonin energian suhdetta emohiukkasen a energiaan ja μ_F^2, joka on fragmentaation energiaskaala.



Kuva 4: Lyijy-ytimen alimman kertaluvun EPS09-ydinpartonimodifikaatiot [12] gluoneille, valenssikvarkeille ja merikvarkeille yhtälön (25) mukaisine virherajoineen energiaskaaloilla $Q^2 = 10\,\mathrm{GeV}^2$ ja $Q^2 = 10000\,\mathrm{GeV}^2$.

Fragmentaatiofunktioiden parametrisointiin tarvitaan myös mittaushavaintoja samaan tapaan kuin partonijakaumissakin. Tyypillinen sirontaprosessi, josta fragmentaatiofotoneita voidaan havainnoida, on annihilaatiosironta $e^+e^- \to \gamma X$. Tässä siis elektroni ja positroni annihiloivat toisensa ja virtuaalisen fotonin tai heikon vuorovaikutuksen Z^0-hiukkasen kautta syntyy fotoni γ sekä joukko X muita hiukkasia. Fragmentaatiofunktioiden arvojen määrittämiseen tarvitaan sekä mittaushavaintoja että häiriöteoreettisesti laskettuja vaikutusaloja. Mittauksissa fragmentaatiofotonin katsotaan syntyvän, kun törmäysprosessissa syntyy hiukkasjetti, jonka keskeltä muodostuu fotoni. Tällöin fotoni ja sen fragmentoinut hiukkanen ovat yhdensuuntaisia. Häiriöteoreettisesti tästä yhdensuuntaisuudesta seuraa, että fragmentaatiofunktiot sisältävät divergenttejä osia, etenkin jos fragmentaatioenergia menee pieneksi. Siksipä fragmentaatioprosesseja täytyy tutkia jostakin energiaskaalasta μ_0^2 lähtien, jonka tulisi olla niin suuri, että häiriöteorian menetelmiä voidaan käyttää, eli vahvan vuorovaikutuksen kytkinvakiossa (21) $\alpha_S(\mu_0^2)$ fragmentaation lähtöenergiaskaala tulee olla $\mu_0^2 \gg \Lambda_{N_f}^2$. QCD:n faktorisaatioteoreeman mukaan nämä kollineaarisuudesta aiheutuvat divergentit osat voidaan kuitenkin sisällyttää fragmentaatiofunktioiden määrittelyyn.

Fotonien fragmentaatiofunktioita osataan jossain määrin laskea puhtaasti häiriöteoreettisin menetelmin. Laskemalla sironnasta $e^+e^- \to \gamma q\bar{q}$ syntyvän fotonin vaikutusala QED:n Feynmanin säännöillä, tästä vaikutusalasta voidaan identifioida fragmentaatiofunktiot kertaluvussa $\mathcal{O}(\alpha_{em})$, jotka ovat [16, s. 473]

$$\begin{aligned} zD_{q\to\gamma}(z,\mu_F^2) &= e_q^2\frac{\alpha_{em}}{2\pi}[1+(1-z)^2]\ln(\mu_F^2/\mu_0^2), \\ zD_{g\to\gamma}(z,\mu_F^2) &= 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Yhtälöissä (26) luonnollisesti $D_{g\to\gamma}(z,\mu_F^2) = 0$, koska kertaluvussa $\mathcal{O}(\alpha_{em})$ fotoni ei voi fragmentoitua gluonista, vaan tämä tarvitsee pohjalle kvarkki–antikvarkkisilmukan, josta fotoni voi muotoutua. Fragmentaatiofunktioiden muotoja voidaan laskea häiriöteoreettisin menetelmin haluttuun vahvan vuorovaikutuksen $\mathcal{O}(\alpha_S^n)$ kertalukuun n asti. Fotonien fragmentaatiofunktioiden laskeminen häiriöteoreettisin menetelmin ei suinkaan ole aivan yksinkertaista, ei edes yhtälöiden (26) tapauksessa. Kiinnostunut lukija voi katsoa julkaisusta [17] yhtälöiden (26) ja vahvan vuorovaikutuksen kertaluvun $\mathcal{O}(\alpha_S)$ mukaisen kontribuution häiriöteoreettisesti laskettuihin fotonin fragmentaatiofunktioihin käytettäessä divergenttien osien käsittelyyn dimensionaalista regularisaatiota [18]. Kuitenkaan fragmentaatiofunktioiden käyttäytymistä ei voi puhtaasti ymmärtää vain häiriöteoreettisin menetelmin, vaan tarvitaan myös mittaustuloksia. Fragmentaatiofunktioiden energiariippuvuuden hahmottamiseen tarvitaan fragmentaatiofotonien mittauksia jollakin skaalalla μ_0^2. Yhdistämällä fragmentaatiofotonien mittaushavainnot ja häiriöteorian ennusteet fragmentaatiofunktioiden käyttäytyminen voidaan laskea DGLAP-yhtälöiden [11] avulla millä tahansa energiaskaalalla $\mu_F^2 > \mu_0^2$.

Tässä työssä käytetyt fotonin fragmentaatiofunktiot ovat BFG[6]-fragmentaatiofunktioita [19]. BFG-fragmentaatiofunktiot jakaantuvat kahteen osaan, joista toinen on häiriöteoreettisin menetelmin laskettava osa ja toinen, jota ei voida kuvata häiriöteoreettisin menetelmin. Julkaisussa [19] osoittautuukin, että fotonien fragmentaatiofunktioiden ei-häiriöteoreettinen osa on hyvin merkittävä. Tämän ei-häiriöteoreettisen osan kuvaamiseen käytetään VDM-mallia[7][20], jossa fotonin katsotaan koostuvan kombinaationa ρ^0, ω ja ϕ mesoneista. Matalilla fragmentaatioenergioilla $\mu_F^2 \sim 25\,\mathrm{GeV}^2$ fotonin fragmentaatiofunktioiden määrittämiseen käytetään ensin kvarkkien ja gluonien fragmentoitumista vektorimesoniksi $q\bar{q}$, josta muodostuu edelleen fotoni. BFG-fragmentaatiofunktioiden ei-häiriöteoreettiselle osalle on saatavilla kaksi eri versiota, jotka eroavat toisistaan vain hieman sovitusparametreiltaan. Mallin sovitusparametreihin on käytetty niin ikään χ^2-minimointimenetelmää, jolloin ensimmäiselle sovitukselle $\chi^2_{\text{Set I}} = 1,33$ ja toiselle $\chi^2_{\text{Set II}} = 1,22$, kuvaus sovitusparametreista löytyy julkaisusta [19, s. 12]. Tämän työn simuloinneissa käytetty ei-häiriöteoreettinen osuus fotonien fragmentaatiofunktioille on Set I.

Kuvassa 5 on kuvattu fragmentaatiofotonien simuloinneissa käytetyt fragmentaatiofunktiot kahdella eri fragmentaatioskaalalla. Kuvan 5 fragmentaatioenergiat vastaavat varsin hyvin LHC-hiukkaskiihdyttimeltä mitattuja fotonien energioita. Kuvassa esitettyjen fotonien fragmentaatiofunktioista on kiintoisaa havaita, että fotonien fragmentoituminen kvarkista on huomattavan paljon todennäköisempää kuin gluoneista. Gluonien kontribuutio fotonien fragmentaatiossa näyttäisi olevan maksimissaan 5 % luokkaa kaikista fragmentaatiofotoneista per fragmentoiva partoni.

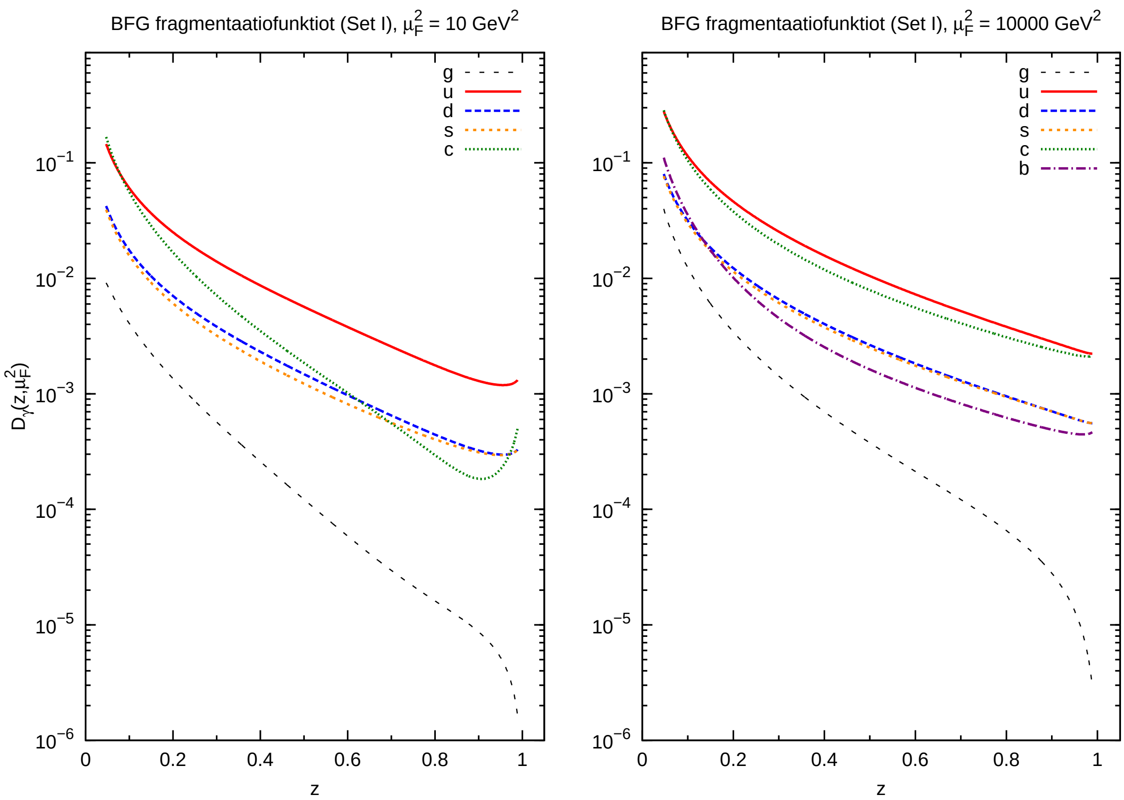
9 Määritettäviä suureita

Tarkoituksena tässä työssä on laskea suoran fotonituoton vaikutusaloja erilaisten ytimien sirontaprosesseista. Noin vuodesta 2010 eteenpäin on julkaistu lukuisia ATLAS- ja CMS-kollaboraatioiden suoran fotonituoton mittaustuloksia sironnasta $\mathrm{p} + \mathrm{p} \to \gamma + \mathrm{X}$. Näitä mittaustuloksia voidaan verrata tässä työssä laskettuihin teoreettisiin vaikutusaloihin.

ATLAS- ja CMS-kollaboraatiot tekevät suorien fotonien mittauksissaan niin sanotun isolaatioleikkauksen fotoneille. Tämä tarkoittaa sitä, että näissä mittauksissa vaaditaan, että fotonin ympärillä olevassa sovitun suuruisessa (η, ϕ)-ympyrässä ei tulisi olla tiettyä määrää suurempaa hadronista poikittaisenergiaa. Tällainen isolaatioleikkaus pienentää fragmentaatiokomponentin osuutta, mutta ei kuitenkaan täysin poista sitä, joten ainoastaan NLO+fragmentaatiofotonilaskun kautta

[6]BFG = L. Bourhis – M.Fontannaz – J. Ph. Guillet.

[7]Vector Meson Dominance Model = VDM.



Kuva 5: Fotonin Bourhis–Fontannaz–Guillet -fragmentaatiofunktiot [19] partoneista g, u, d, s, c ja b energiaskaaloilla $\mu_F^2 = 10\,\mathrm{GeV}^2$ ja $\mu_F^2 = 10000\,\mathrm{GeV}^2$.

on mahdollista suorittaa yksityiskohtaisen tarkka vertailu mittaustuloksiin. Tässä tutkielmassa tarkastellut LO- ja LO+fragmentaatio-tulokset antavat kuitenkin alimman kertaluvun ennustamat ala- ja ylärajat kyseisille isolaatioleikatuille vaikutusaloille, joten tässä tarkastellaan näiden yhteensopivuutta ATLAS- ja CMS-kokeiden tuloksiin.[8]

Teoreettisen ja mitatun vaikutusalan eroja voidaan tutkia esimerkiksi määrittämällä K-kertoimia, jotka kuvaavat teoreettisen ja mitatun vaikutusalan suhdetta. K-kertoimen määritys onnistuu esimerkiksi minimoimalla funktiota [7, s. 5]

$$\chi^2(N) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{K\sigma_i^{\text{teoria}} - \sigma_i^{\text{mittaus}}}{\delta\sigma_i^{\text{mittaus}}} \right)^2, \tag{27}$$

missä N on mittauspisteiden lukumäärä, σ_i^{teoria} teoreettinen vaikutusala havainnolle i, $\sigma_i^{\text{mittaus}}$ mitattu vaikutusala havainnolle i ja $\delta\sigma_i^{\text{mittaus}}$ on mitatun vaikutusalan mittausvirhe sisältäen sekä statistiset että systemaattiset virheet.

χ^2-minimointi on oiva menetelmä laskea numeerisessa parametrisoinnissa tarvittavia kertoimia, jos tunnetaan jonkin fysikaalisen ilmiön mittausdata virherajoineen ja tätä ilmiötä kuvaileva teoreettinen malli. Tässä työssä χ^2-menetelmällä määritetään K-kertoimia, joiden selvittäminen onnistuu tässä yhden tuntemattoman parametrin tapauksessa matriisien kertolaskun avulla [21, s. 1273-1274]

$$K \pm \delta K = (R^\top N^{-1} R)^{-1} R^\top N^{-1} y \pm \sqrt{(R^\top N^{-1} R)^{-1}}, \tag{28}$$

missä sarakevektori R sisältää teoreettisesti lasketun vaikutusalan, matriisi N sisältää diagonaalimatriisimuodossa mittausdatan virheen neliön ja sarakevektori y mittausdatan.

Yksi tämän työn päätavoitteista on tutkia myös protonia raskaampien ytimien vaikutusta suoraan fotonituottoon. Tämä onnistuu esimerkiksi tutkimalla raskaiden ytimien suoran fotonituoton suhdetta protonien kautta tuotettuihin fotoneihin. Eli tutkimalla suhdetta

$$R^{\gamma}_{\mathrm{A_1A_2}} = \frac{\mathrm{d}^2\sigma^{\mathrm{A_1+A_2}\to\gamma+\mathrm{X}}/\mathrm{d}q_T^2\mathrm{d}y_\gamma}{\mathrm{A_1A_2}\mathrm{d}^2\sigma^{\mathrm{p+p}\to\gamma+\mathrm{X}}/\mathrm{d}q_T^2\mathrm{d}y_\gamma}. \tag{29}$$

Toisinaan mittaustulokset ilmoitetaan pseudorapiditeetin η_γ avulla rapiditeetin y_γ sijaan. Kuitenkin massattomille hiukkasille pseudorapiditeetti ja rapiditeetti ovat samoja

$$y_\gamma = \eta_\gamma = -\ln\tan\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

missä θ on sirontakulma törmääviin atomiytimiin nähden. Pseudorapiditeettivälin yli keskiarvoistettu suoran fotonituoton vaikutusala on muotoa [7, s. 5]

$$\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}q_T^2\mathrm{d}\eta_\gamma}\right|_{\eta_\gamma\in\Delta\eta_\gamma} = \frac{1}{\Delta\eta_\gamma}\int_{\Delta\eta_\gamma}\mathrm{d}\eta_\gamma\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}q_T^2\mathrm{d}\eta_\gamma} = \frac{1}{\Delta\eta_\gamma}\int_{\Delta\eta_\gamma}\mathrm{d}\eta_\gamma\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}q_T^2\mathrm{d}y_\gamma}. \tag{30}$$

[8]Tämä kappale on oleellinen lisähuomautus koskien ATLAS- ja CMS-kokeita, tämä lisäys on tehty professori K. J. Eskolan pyynnöstä.

10 Numeeriset menetelmät

10.1 Ohjelmallinen toteutus

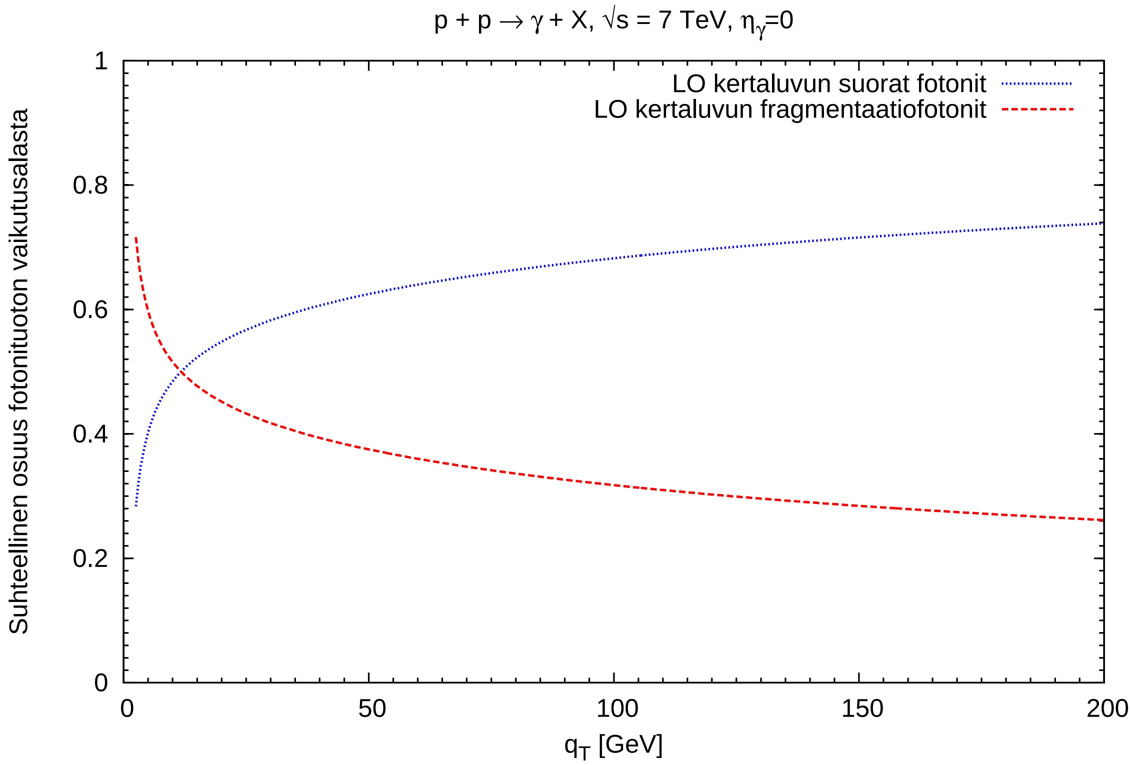
Käytännössä suoran fotonituoton vaikutusalat (18) ja (22) täytyy laskea tietokoneella numeerisesti. Tätä tarkoitusta varten kirjoitin tietokoneohjelman FORTRAN90 -ohjelmointikielellä. Ohjelma itsessään on jaettu moduleihin, joiden etuna esimerkiksi FORTRAN77 -kieleen nähden on helppo laajennettavuus ja ohjelman osasten soveltamismahdollisuus myös muihin sirontaprosesseihin. Ohjelman tekemisessä auttoi professori K.J. Eskolan esimerkkiohjelma, josta sain hyviä ideoita ohjelman systematiikkaan. Liitteiden sivulta 67 lähtien on kirjoittamani ohjelman tärkeimmät modulit tiivistetyssä muodossa. Kaikissa simuloinneissa partonijakaumien (23) energiaskaala $Q = p_T$, vahvan vuorovaikutuksen (21) renormalisaatioskaala $\mu_R = p_T$ ja fragmentaatiofunktioiden fragmentaatioskaala $\mu_F = q_T$.

10.2 Numeerinen integrointimenetelmä

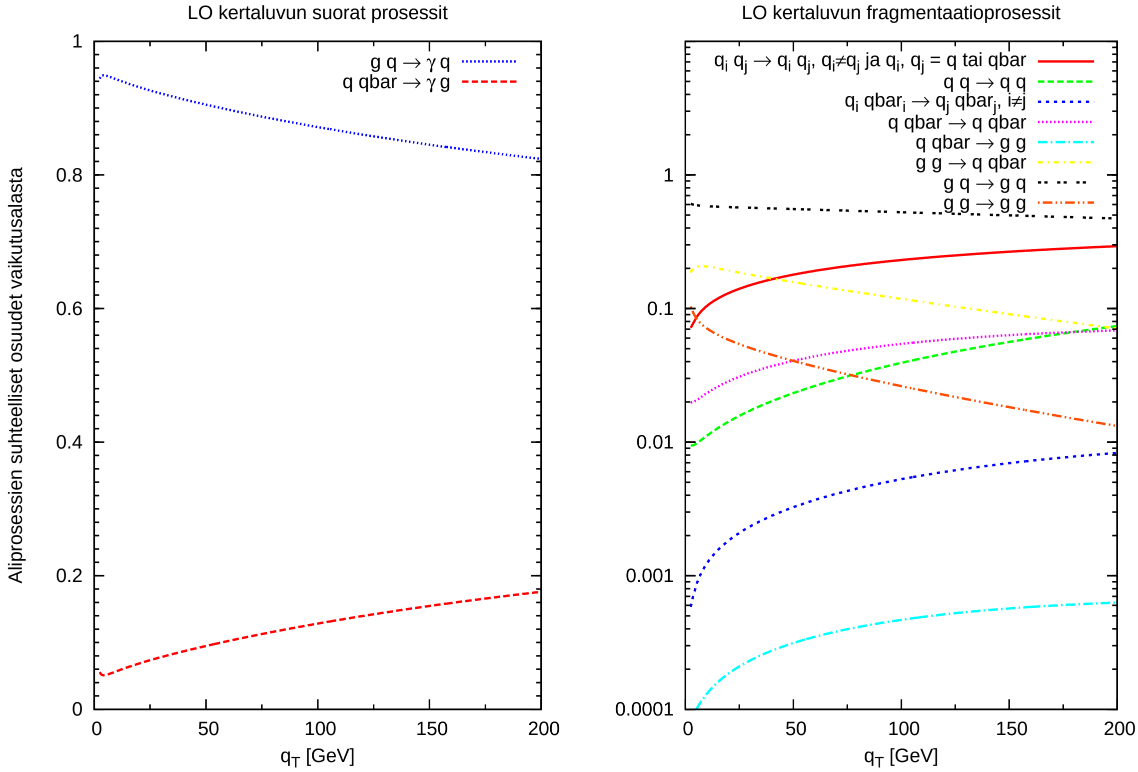
Ohjelmassa käytetty numeerinen integrointimenetelmä perustuu gaussin numeeriseen integrointimenetelmään. Integrointimenetelmää käytettäessä hyväksi kompromissiksi laskenta-ajan ja tarkkuuden suhteen osoittautui 6. kertaluvun Gaussin menetelmä, jossa integroinnin osavälit on jaettu vielä 4 osaan. Pystyin vertaamaan tässä laskettuja nopeiden fotonien vaikutusalalaskuja (22) erikoistyössä käytettyyn adaptiivisella integrointimenetelmällä laskettuihin vaikutusaloihin. Erikoistyön adaptiivisessa menetelmässä käytetty laskentatarkkuus oli 10^{-6}, tässä työssä käytetyn moniulotteisen integrointimenetelmän ero adaptiivisella menetelmällä laskettuun vaikutusalaan osoittautui testeissä maksimissaan promillen kymmenesosiksi. Liitteiden sivulta 66 alkaen on Gaussin integroimismenetelmän kuvaus käytännössä.

11 Tulokset

Suoran fotonituoton päämekanismit ovat kvarkki–antikvarkki-parin annihilaatio ja QCD-Compton-sironta. Fragmentaatiofonien vaikutus suoraan fotonituotoon on joissain tapauksissa lähes samaa luokkaa kuin näiden nopeiden prosessien. Tämä johtuu siitä, että fotonin fragmentaatiofunktioiden energiariippuvuus kompensoi yhden vahvan vuorovaikutuksen kytkinvakion α_S 2–2-sirontojen vaikutusaloista [15, s. 268]. Tämän kompensaation vaikutus näkyy kuvassa 6, jossa on nopeiden fotonituottoprosessien ja fragmentaation kautta syntyvien suorien fotonien suhteelliset osuudet sironnassa $\mathrm{p} + \mathrm{p} \to \gamma + X$, kun cms-energia $\sqrt{s} = 7\,\mathrm{TeV}$, fotonin rapiditeettissa $\eta_\gamma = 0$. Fotonin rapiditeetti $\eta_\gamma = 0$ vastaa 90° sirontakulmaa törmääviin protoneihin nähden. Hyvin pienillä fotonin poikittaisliikemääräosuuksilla



Kuva 6: Alimman kertaluvun nopeiden prosessien ja fragmentaatioprosessien suhteelliset osuudet suoran fotonituoton vaikutusalasta prosessille $\mathrm{p} + \mathrm{p} \to \gamma + X$, kun cms-energia $\sqrt{s} = 7\,\mathrm{TeV}$, ja fotonin rapiditeetti $\eta_\gamma = 0$.



Kuva 7: Vasemmalla ovat QCD-Compton-sironnan ja kvarkki–antikvarkki-sironnan suhteelliset osuudet nopeiden fotonien vaikutusalasta, ja oikeanpuoleisessa kuvassa on kuvattu fragmentaatioprosessien suhteelliset osuudet fragmentaatiofotonien vaikutusalasta. Suhteelliset osuudet ovat prosessista $\mathrm{p}+\mathrm{p} \to \gamma + X$, kun $\sqrt{s} = 7\,\mathrm{TeV}$ ja syntyvän fotonin rapiditeetti $\eta_\gamma = 0$.

suhteessa kiihdytysenergiaan, $q_T \lesssim 10\,\mathrm{GeV} \ll 7\,\mathrm{TeV}$, fragmentaation kautta syntyvä fotoni on jopa nopeita prosesseja todennäköisempi mekanismi suorien fotonien syntymiselle. Mutta myös suuremmilla fotonin poikittaisliikemäärillä fragmentaatiofotonien kontribuutio kokonaisvaikutusalaan on varsin merkittävä, reilusti yli 20 % kautta koko poikittaisliikemääräskaalan.

Kuvassa 7 on kahden suoran prosessin ja kahdeksan fragmentaatioprosessin suhteellinen voimakkuus vaikutusalaan fotonin pseudorapiditeetilla $\eta_\gamma = 0$. Suorista prosesseista QCD-Compton-sironta on jopa neljä kertaa voimakkaampi kuin kvarkki–antikvarkki-parin annihilaatio, tämä vastaa myös erikoistyön havaintoja [4, s. 34]. Erityisen mielenkiintoista on, että fragmentaatioprosesseista dominoivin on sironta $gq \to gq$, joka on hyvin paljon saman tyyppinen sironta kuin nopeiden prosessin QCD-Compton-sironta. Kuvien 3 ja 5 perusteella voisi olettaa, että todennäköisin fragmentaatioprosessi suoralle fotonituotolle olisi $gg \to q\bar{q}$, koska alkutilassa kahden gluonin vaikutus ja lopputilassa kaksi kvarkkia, joista fotonit todennäköisimmin fragmentoituvat. Syy, miksi prosessi $gg \to q\bar{q}$ ei ole todennäköisin fragmentaatiofotonien lähde, johtuu puhtaasti taulukon 1 aliprosessin vaikutusaloista, kirjassa [15, s. 249] on näiden kahdeksan aliprosessin suhteelliset voimakkuudet, kun sirontaa tarkastellaan 90° sirontakulmassa. Kirjan [15, s. 249] perusteella tässä todennäköisimmäksi havaittu fragmentaatiofotonien aliprosessi $gq \to gq$ on kinemaattisesti noin 40 kertaa voimakkaampi kuin $gg \to q\bar{q}$. On todella mielenkiintoista havaita, että puhtaasti aliprosessien vaikutusaloja $\mathrm{d}\hat{\sigma}/\mathrm{d}\hat{t}$ vertaillen vahvimman ja heikoimman prosessin ero on jopa 200-kertainen.

11.1 Suoran fotonituoton tuloksia LHC-kiihdyttimelle

Viimeisimmät suoran fotonituoton mittaukset LHC-kiihdyttimeltä löytyvät julkaisuista [22]–[25]. Näissä mittauksissa protoneja on kiihdytetty $\sqrt{s} = 7\,\mathrm{TeV}$ energialla, ja suorien fotonien poikittaisliikemäärät ovat olleet tyypillisesti välillä 15–400 GeV. Protonien suurin mahdollinen kiihdytysenergia LHC-kiihdyttimessä voisi olla jopa $\sqrt{s} = 14\,\mathrm{TeV}$, mutta toistaiseksi näin suuria energioita ei ole vielä käytetty.

Protonia raskaampien ytimien maksimaalinen kiihdytysenergia LHC-kiihdyttimessä ei ole $\sqrt{s} = 7\,\mathrm{TeV}$, vaan ytimien kiihdytysenergia on riippuvainen ytimien massa- ja protoniluvuista. Jos käytetään protonien maksimaalisena kiihdytysenergiana 7 TeV, niin protonia raskaampien ytimien kiihdytysenergia vastaavassa LHC-kiihdyttimen magneettikentässä on [26, s. 7]

$$\sqrt{s} = 7\,\mathrm{TeV}\sqrt{\frac{Z_1 Z_2}{A_1 A_2}}, \tag{31}$$

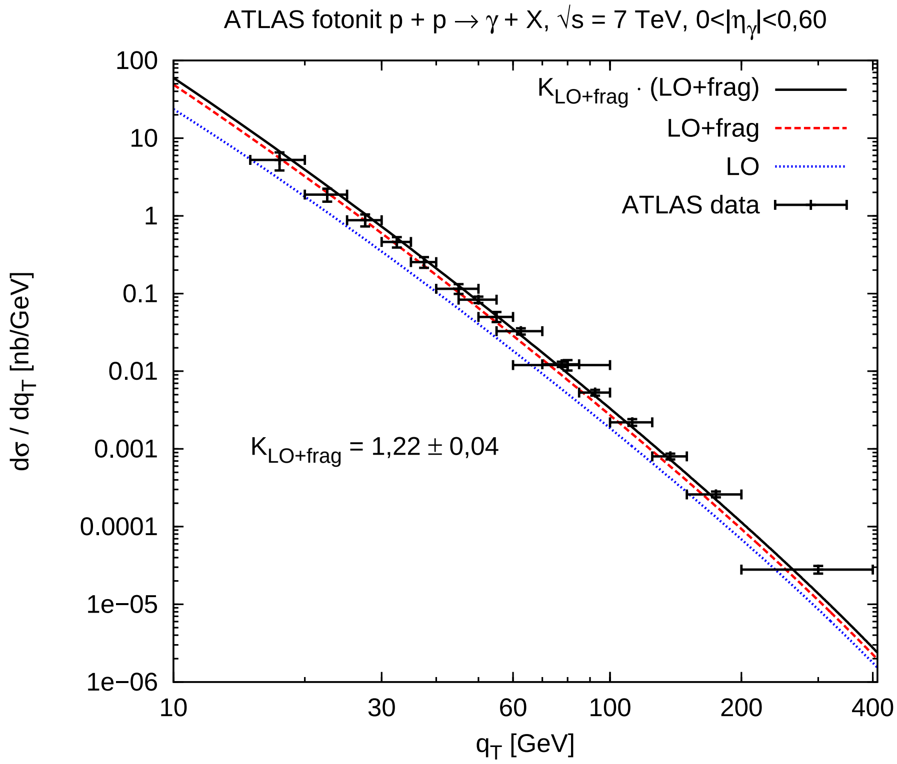
missä A_1 ja A_2 ovat törmäävien ytimien massaluvut sekä Z_1 ja Z_2 protoniluvut. Kiihdytysenergiakaavan (31) perusteella Pb–Pb-törmäyksien kiihdytysenergia on $2,76\,\mathrm{TeV}$ ja p–Pb-törmäyksien $4,4\,\mathrm{TeV}$.

Suoran fotonituoton mittausdataa protonien törmäyksistä on jo varsin runsaasti lukuisista eri fotonin rapiditeeteista [22]–[25]. ATLAS-kollaboraation mittauksissa suoran fotonituoton mittausrapiditeetit ovat välillä 0–2,37 [23], joka vastaa asteina fotonin sirontakulmia välillä 90°–$10,7^\circ$ ytimien törmäyssuuntaan nähden. CMS-kollaboraation suoran fotonituoton mittausrapiditeetit ovat välillä 0–2,5 [25], joka vastaa sirontakulmia 90°–$9,4^\circ$.

Taulukossa 3 on suoran fotonituoton K-tekijät kaavan (27) mukaisesti julkaisuissa [22]–[25] esitetyille mittaustuloksille. Mittauksissa kukin fotonituoton poikittaisliikemäärän alue on jaettu pienempiin osaväleihin, esimerkiksi ATLAS-kokeen [22] fotonien poikittaisliikemäärä väli 15–100 GeV on jaettu osaväleihin 15–20, 20–25, 25–30, 30–35, 35–40, 40–50, 50–60 ja 60–100 GeV, joista jokaisella välillä on mitattu fotonituoton vaikutusalaa. Vaikutusalojen numeerisessa simuloinneissa jokainen osaväli on jaettu vielä 20:een osaan ja teoreettinen vaikutusala

Koe	Välien lkm	q_T(GeV)	$\lvert\eta_\gamma\rvert$	$K \pm \delta K$ LO	$K \pm \delta K$ LO+frag
ATLAS [22]	8	15–100	0,00–0,60	$1,74 \pm 0,11$	$1,04 \pm 0,07$
ATLAS [22]	8	15–100	0,60–1,37	$1,65 \pm 0,11$	$0,98 \pm 0,07$
ATLAS [22]	8	15–100	1,52–1,81	$1,99 \pm 0,15$	$1,16 \pm 0,09$
ATLAS [23]	8	45–400	0,00–0,60	$1,89 \pm 0,06$	$1,29 \pm 0,05$
ATLAS [23]	8	45–400	0,60–1,37	$1,75 \pm 0,07$	$1,17 \pm 0,05$
ATLAS [23]	8	45–400	1,52–1,81	$1,9 \pm 0,1$	$1,22 \pm 0,06$
ATLAS [23]	8	45–400	1,81–2,37	$1,75 \pm 0,09$	$1,10 \pm 0,06$
ATLAS [22], [23]	16	15–400	0,00–0,60	$1,85 \pm 0,06$	$1,22 \pm 0,04$
ATLAS [22], [23]	16	15–400	0,60–1,37	$1,72 \pm 0,06$	$1,11 \pm 0,04$
ATLAS [22], [23]	16	15–400	1,52–1,81	$1,92 \pm 0,08$	$1,20 \pm 0,05$
CMS [24]	11	21–300	0,00–1,45	$1,75 \pm 0,08$	$1,10 \pm 0,05$
CMS [25]	15	25–400	0,00–0,90	$1,81 \pm 0,05$	$1,17 \pm 0,03$
CMS [25]	15	25–400	0,90–1,44	$1,79 \pm 0,06$	$1,16 \pm 0,04$
CMS [25]	15	25–400	1,57–2,10	$1,77 \pm 0,06$	$1,11 \pm 0,04$
CMS [25]	15	25–400	2,10–2,50	$1,76 \pm 0,07$	$1,07 \pm 0,05$

Taulukko 3: Suoran fotonituoton K-kertoimet kaavan (27) χ^2-menetelmän avulla laskettuna. Lyhenne (LO) viittaa vaikutusalan (22) nopeisiin prosesseihin sekä (LO+frag) fragmentaatiokontribuution (18) ja nopeiden prosessien (22) yhteisvaikutukseen. ATLAS-kollaboraation mittaukset ovat julkaisuissa [22] ja [23] sekä CMS-kollaboraation [24] ja [25]. Toisessa sarakkeessa on mittausvälien lukumäärä kolmannen sarakkeen poikittaisliikemäärävälillä. Neljännessä mittauksen rapiditeettialue ja viidennessä sekä kuudennessa lasketut K-tekijät. Riveillä 8–10 on yhdistetty mittausten [22] ja [23] tulokset yhteensopivilla rapiditeettiväleillä.

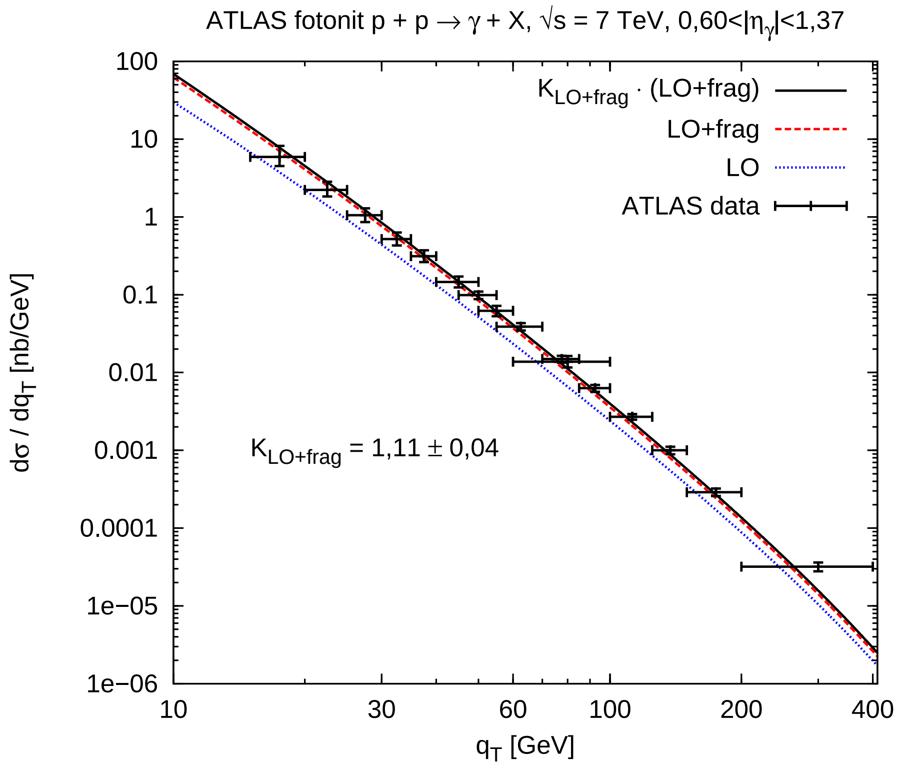


Kuva 8: ATLAS-kollaboraation suoran fotonituoton mittaustulokset prosessista $\mathrm{p}+\mathrm{p} \to \gamma + X$, $\sqrt{s} = 7\,\mathrm{TeV}$, rapiditeettivälillä $|\eta_\gamma| < 0,60$. Mittaustulokset ovat julkaisuista [22] ja [23]. Teoreettiset vaikutusalat on laskettu LO-käyrälle kaavasta (22) ja LO+frag-käyrälle fragmentaation ja nopeiden prosessien tapauksessa kaavoista (18) ja (22).

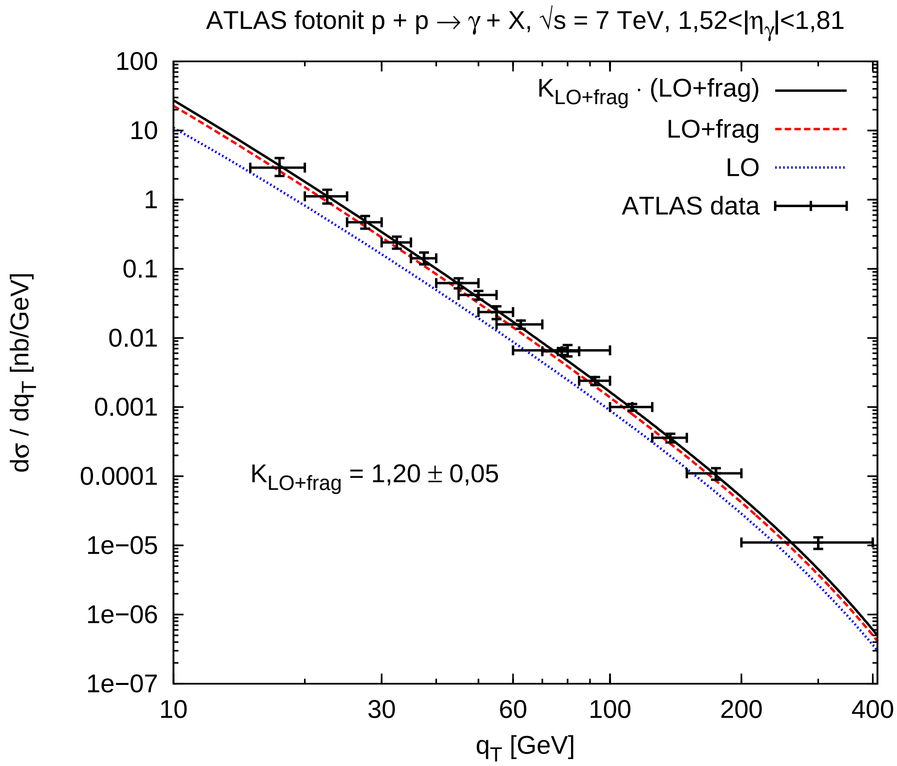
on keskiarvo 20:en osavälin päätepisteissä lasketuista vaikutusaloista. Numeerisessa simuloinnissa esimerkiksi väli 15–20 GeV jakautuu osaväleihin 15, 15.25, 15.5, . . ., 19.75 ja 20 GeV, joista jokaisessa saadaan numeerinen arvo vaikutusalalla ja näiden keskiarvona välin 15–20 GeV keskimääräinen vaikutusala.

Kuvissa 8–11 on ATLAS-kollaboraation suoran fotonituoton mittaustulokset prosessille $\mathrm{p}+\mathrm{p} \to \gamma + X$ sekä vaikutusalojen (18) ja (22) mukaiset teoreettiset vaikutusalat kussakin mittausrapiditeetissa. Kuvien 8, 9 ja 10 mittaustulokset ovat julkaisuista [22] ja [23], koska näiltä osin mittausrapiditeetit ovat samoja. ATLAS-kollaboraation mittausdataa on myös kuvassa 11, jossa fotonien mittausrapiditeetti on $1,81 < |\eta_\gamma| < 2,37$.

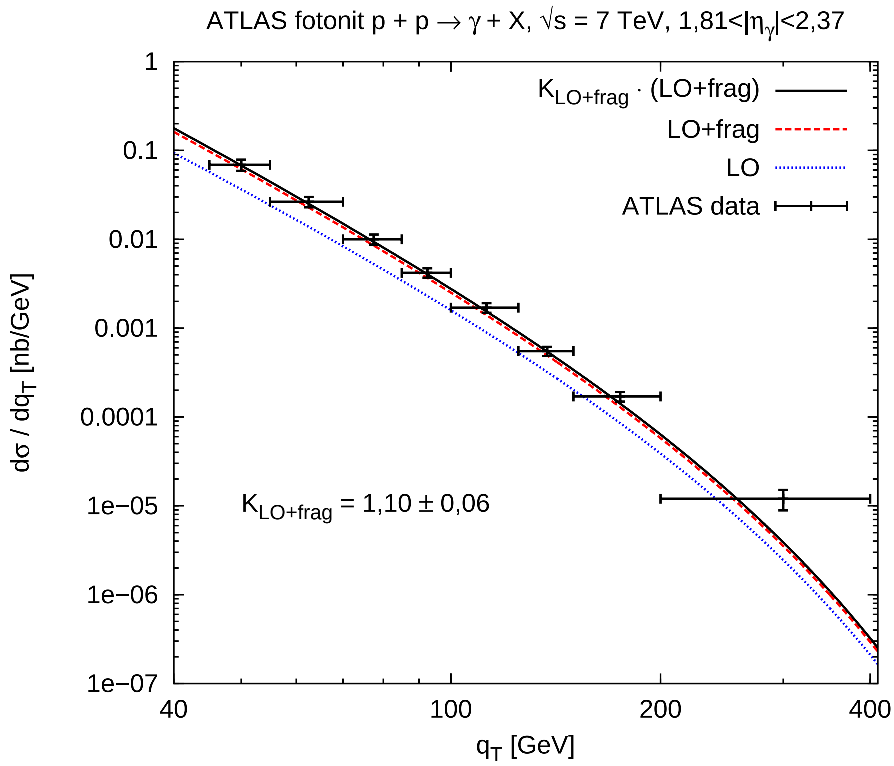
CMS-kollaboraation tekemät suoran fotonituoton mittaustulokset prosessille $\mathrm{p}+\mathrm{p} \to \gamma+X$ löytyvät kuvista 12, 13, 14, 15 ja 16. CMS-kollaboraation mittaukset vastaavat hyvin pitkälti ATLAS-kollaboraation mittauksia, CMS:n mittauksissa fotonien rapiditeettialue on hivenen laajempi $|\eta_\gamma| < 2,5$.



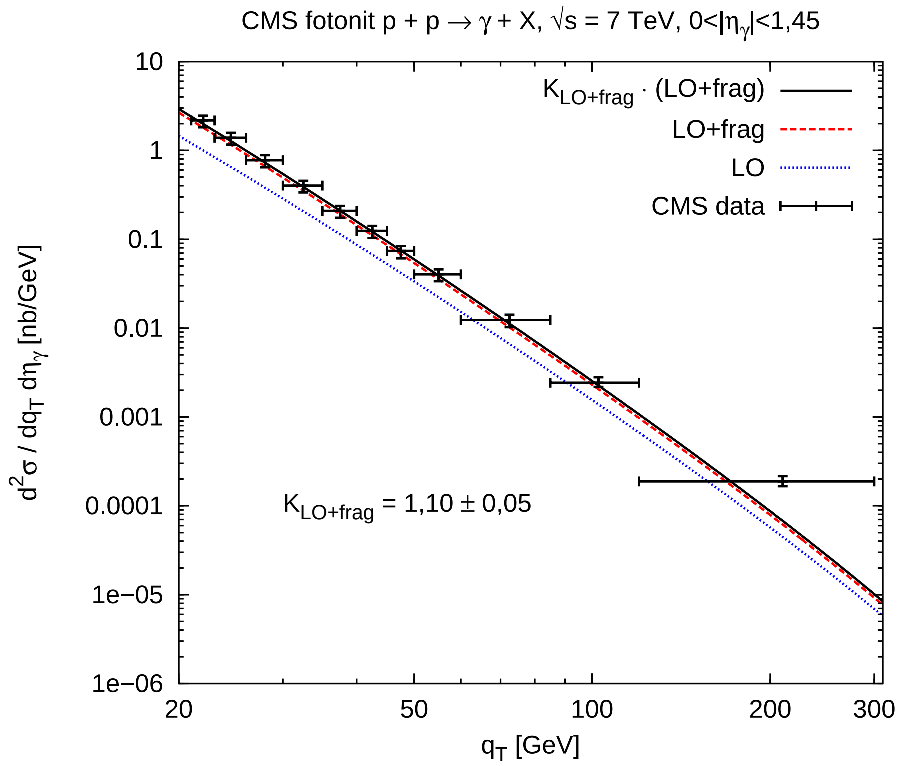
Kuva 9: ATLAS-kollaboraation suoran fotonituoton mittaustulokset prosessista $\mathrm{p}+\mathrm{p}\to\gamma+X$, $\sqrt{s}=7\,\mathrm{TeV}$, rapiditeettivälillä $0,60<|\eta_\gamma|<1,37$. Mittaustulokset ovat julkaisuista [22] ja [23]. Teoreettiset vaikutusalat on laskettu LO-käyrälle kaavasta (22) ja LO+frag-käyrälle fragmentaation ja nopeiden prosessien tapauksessa kaavoista (18) ja (22).



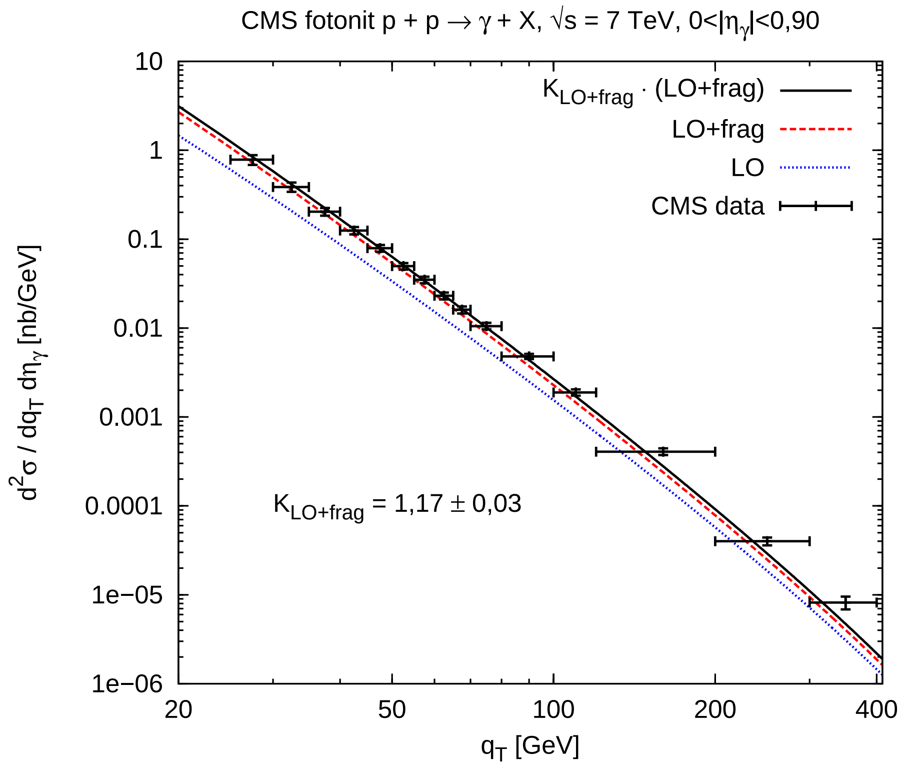
Kuva 10: ATLAS-kollaboraation suoran fotonituoton mittaustulokset prosessista $\mathrm{p}+\mathrm{p} \to \gamma + X$, $\sqrt{s} = 7\,\mathrm{TeV}$, rapiditeettivälillä $1,52 < |\eta_\gamma| < 1,81$. Mittaustulokset ovat julkaisuista [22] ja [23]. Teoreettiset vaikutusalat on laskettu LO-käyrälle kaavasta (22) ja LO+frag-käyrälle fragmentaation ja nopeiden prosessien tapauksessa kaavoista (18) ja (22).



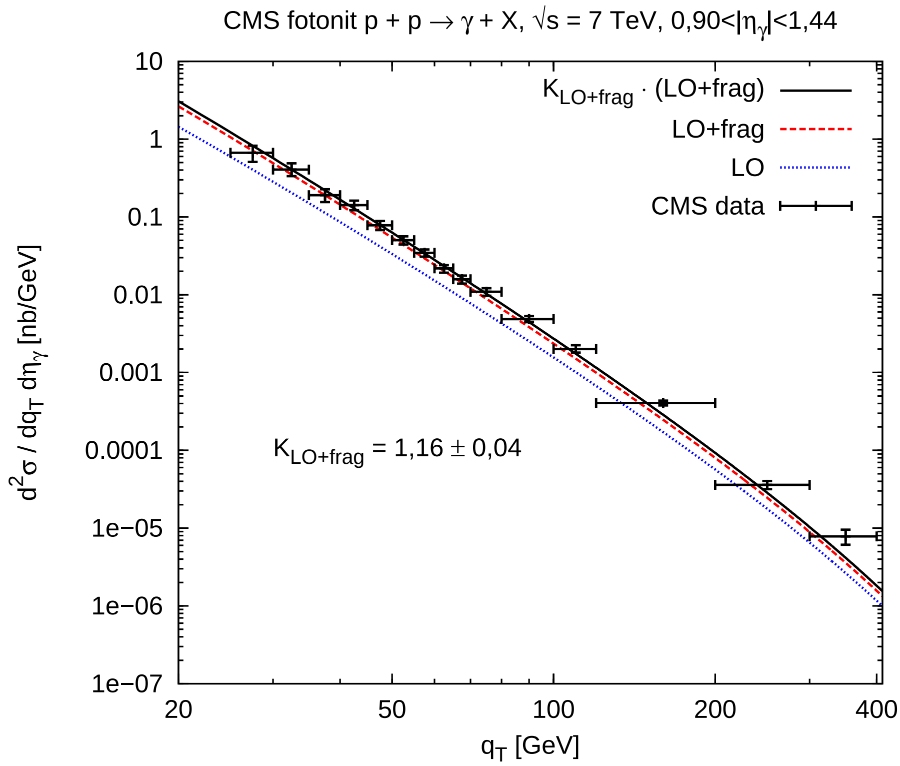
Kuva 11: ATLAS-kollaboraation suoran fotonituoton mittaustulokset prosessista $\mathrm{p} + \mathrm{p} \to \gamma + X$, $\sqrt{s} = 7\,\mathrm{TeV}$, rapiditeettivälillä $1,81 < |\eta_\gamma| < 2,37$. Mittaustulokset ovat julkaisusta [23]. Teoreettiset vaikutusalat on laskettu LO-käyrälle kaavasta (22) ja LO+frag-käyrälle fragmentaation ja nopeiden prosessien tapauksessa kaavoista (18) ja (22).



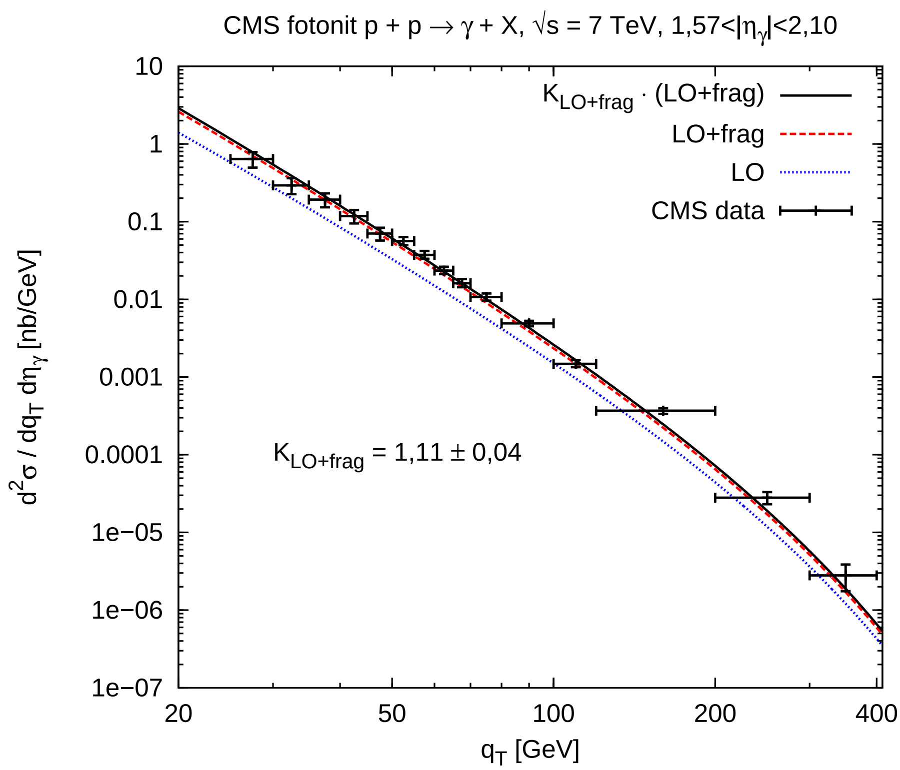
Kuva 12: CMS-kollaboraation suoran fotonituoton mittaustulokset prosessista $\mathrm{p}+\mathrm{p} \rightarrow \gamma + X$, $\sqrt{s} = 7\,\mathrm{TeV}$, rapiditeettivälillä $|\eta_\gamma| < 1,45$. Mittaustulokset ovat julkaisusta [24]. Teoreettiset vaikutusalat on laskettu LO-käyrälle kaavasta (22) ja LO+frag-käyrälle fragmentaation ja nopeiden prosessien tapauksessa kaavoista (18) ja (22).



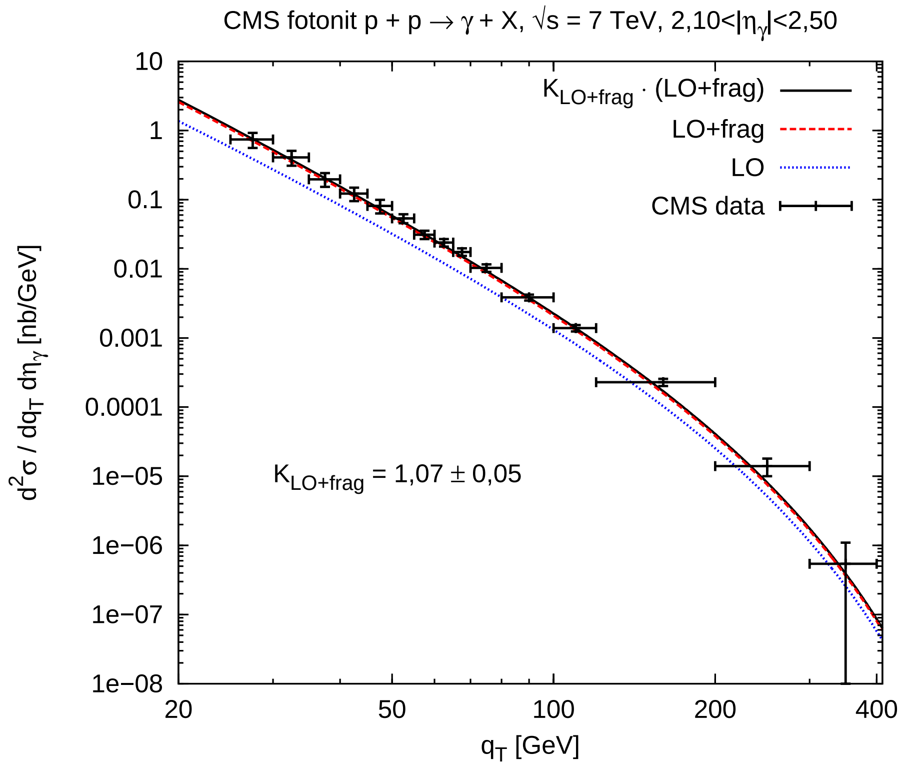
Kuva 13: CMS-kollaboraation suoran fotonituoton mittaustulokset prosessista $\mathrm{p} + \mathrm{p} \to \gamma + X$, $\sqrt{s} = 7\,\mathrm{TeV}$, rapiditeettivälillä $|\eta_\gamma| < 0,90$. Mittaustulokset ovat julkaisusta [25]. Teoreettiset vaikutusalat on laskettu LO-käyrälle kaavasta (22) ja LO+frag-käyrälle fragmentaation ja nopeiden prosessien tapauksessa kaavoista (18) ja (22).



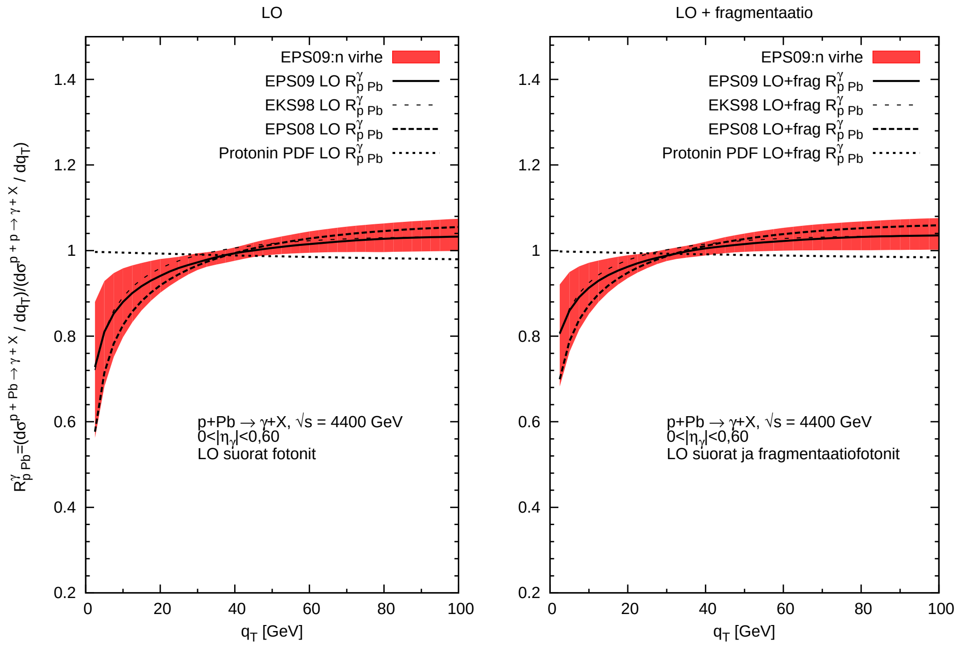
Kuva 14: CMS-kollaboraation suoran fotonituoton mittaustulokset prosessista $\mathrm{p} + \mathrm{p} \rightarrow \gamma + X$, $\sqrt{s} = 7\,\mathrm{TeV}$, rapiditeettivälillä $0,90 < |\eta_\gamma| < 1,44$. Mittaustulokset ovat julkaisusta [25]. Teoreettiset vaikutusalat on laskettu LO-käyrälle kaavasta (22) ja LO+frag-käyrälle fragmentaation ja nopeiden prosessien tapauksessa kaavoista (18) ja (22).



Kuva 15: CMS-kollaboraation suoran fotonituoton mittaustulokset prosessista $\mathrm{p}+\mathrm{p} \to \gamma + X$, $\sqrt{s} = 7\,\mathrm{TeV}$, rapiditeettivälillä $1,57 < |\eta_\gamma| < 2,10$. Mittaustulokset ovat julkaisusta [25]. Teoreettiset vaikutusalat on laskettu LO-käyrälle kaavasta (22) ja LO+frag-käyrälle fragmentaation ja nopeiden prosessien tapauksessa kaavoista (18) ja (22).



Kuva 16: CMS-kollaboraation suoran fotonituoton mittaustulokset prosessista $\mathrm{p} + \mathrm{p} \to \gamma + X$, $\sqrt{s} = 7\,\mathrm{TeV}$, rapiditeettivälillä $2,10 < |\eta_\gamma| < 2,50$. Mittaustulokset ovat julkaisusta [25]. Teoreettiset vaikutusalat on laskettu LO-käyrälle kaavasta (22) ja LO+frag-käyrälle fragmentaation ja nopeiden prosessien tapauksessa kaavoista (18) ja (22).



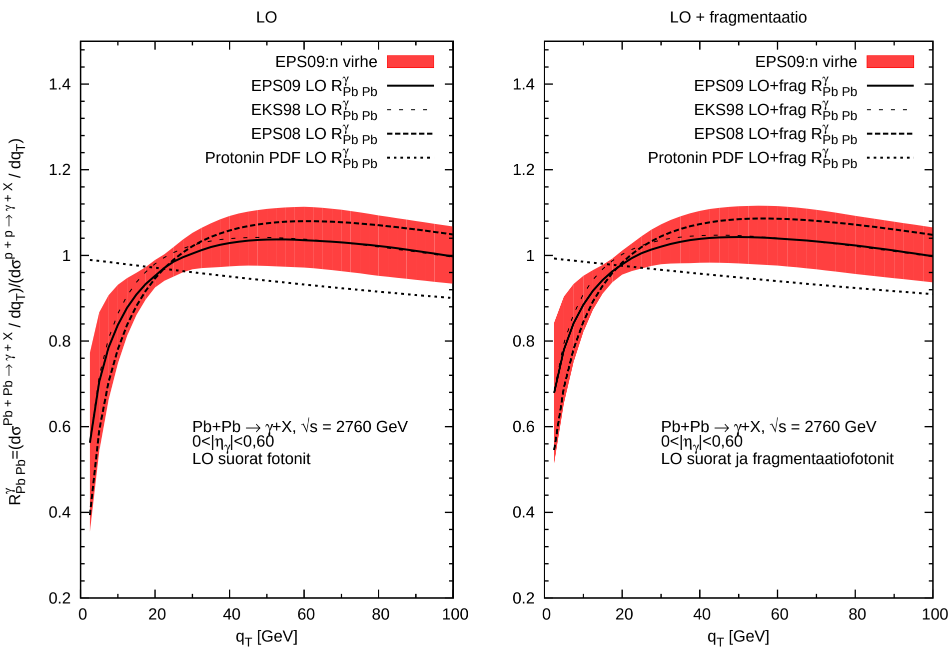
Kuva 17: Vaikutusalojen suhde $R^{\gamma}_{\mathrm{pPb}}$ (29) ATLAS-kollaboraation rapiditeettivälillä $|\eta_\gamma| < 0,60$.

11.2 Vaikutusalojen suhteita $R^{\gamma}_{\mathrm{A_1A_2}}$

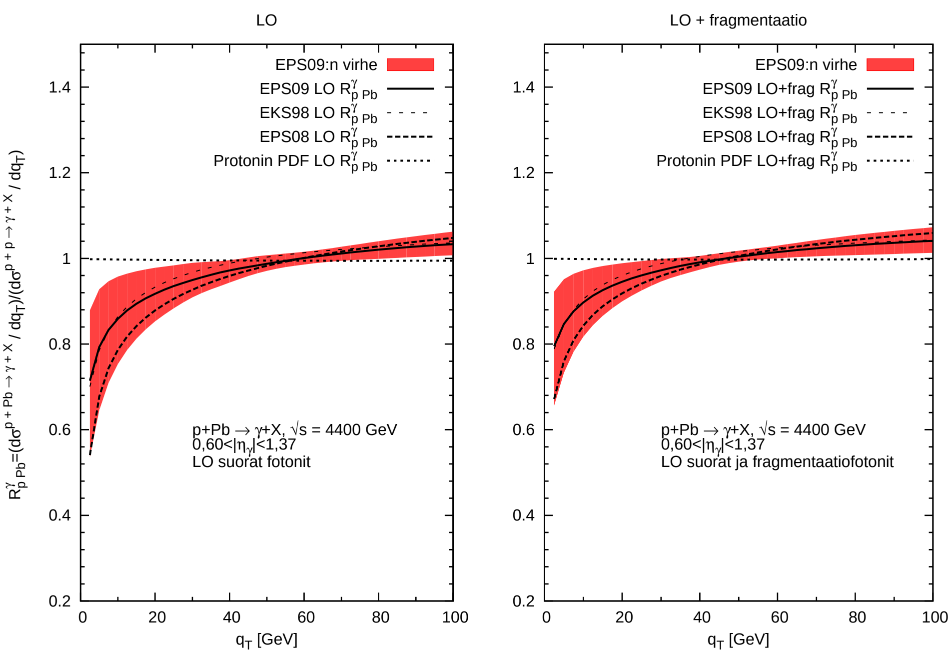
Tässä osassa käsittelemme vaikutusalojen suhteen (29) mukaisia simulointituloksia, kuvat 17–32, ATLAS- ja CMS-kollaboraation käyttämille fotonien rapiditeettiakseptansseille. Vaikutusalasuhdekuvissa vasemmalla palstalla olevan kuvan lyhennne ”LO” viittaa vaikutusalan (22) mukaisiin nopeisiin prosesseihin. Oikeanpuoleisissa kuvissa on lisäksi huomioitu suoran fotonituoton fragmentaation vaikutus, johon viittaa lyhenne ”frag”. Kussakin kuvassa on EPS09:n mukainen paras mahdollinen vaikutusalojen suhde ja punaisella tälle lasketut virherajat (25). Myös ydinpartonijakaumat EKS98 ja EPS08 ovat näissä kuvissa referenssinä, kuten myös ilman ydinefektejä laskettu vaikutusalojen suhde, johon kuvissa viitataan ”Protonin PDF”. LHC-kiihdyttimessä prosessin $\mathrm{p} + \mathrm{Pb} \to \gamma + X$ kiihdytysenergia on kaavan (31) mukaan $\sqrt{s} = 4400\,\mathrm{GeV}$ ja prosessin $\mathrm{Pb} + \mathrm{Pb} \to \gamma + X$ $\sqrt{s} = 2760\,\mathrm{GeV}$.

Kuvassa 17 on vaikutusalojen suhde (29) $R^{\gamma}_{\mathrm{pPb}}$ suoran fotonituoton sirontaprosessille $\mathrm{p} + \mathrm{Pb} \to \gamma + X$ keskirapiditeetissa $|\eta_\gamma| < 0,60$, kun kiihdytysenergia on $\sqrt{s} = 4400\,\mathrm{GeV}$. Vastaavasti kuvassa 18 on vaikutusalojen suhde prosessille $\mathrm{Pb} + \mathrm{Pb} \to \gamma + X$ keskirapiditeetissa, kun $\sqrt{s} = 2760\,\mathrm{GeV}$. Ennusteet ATLAS-kollaboraation ulommille mittausrapiditeeteille ovat kuvissa 19, 21 ja 23 prosessille $\mathrm{p} + \mathrm{Pb} \to \gamma + X$, sekä sironnalle $\mathrm{Pb} + \mathrm{Pb} \to \gamma + X$ kuvissa 20, 22 ja 24.

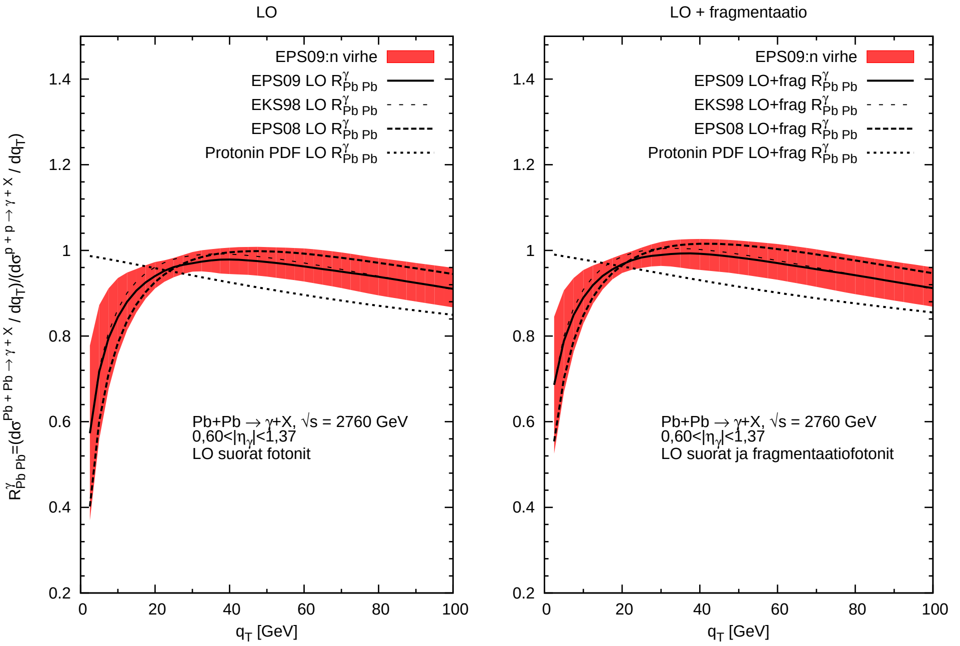
CMS-kollaboraation käyttämille suoran fotonituoton mittausrapiditeeteille vai-



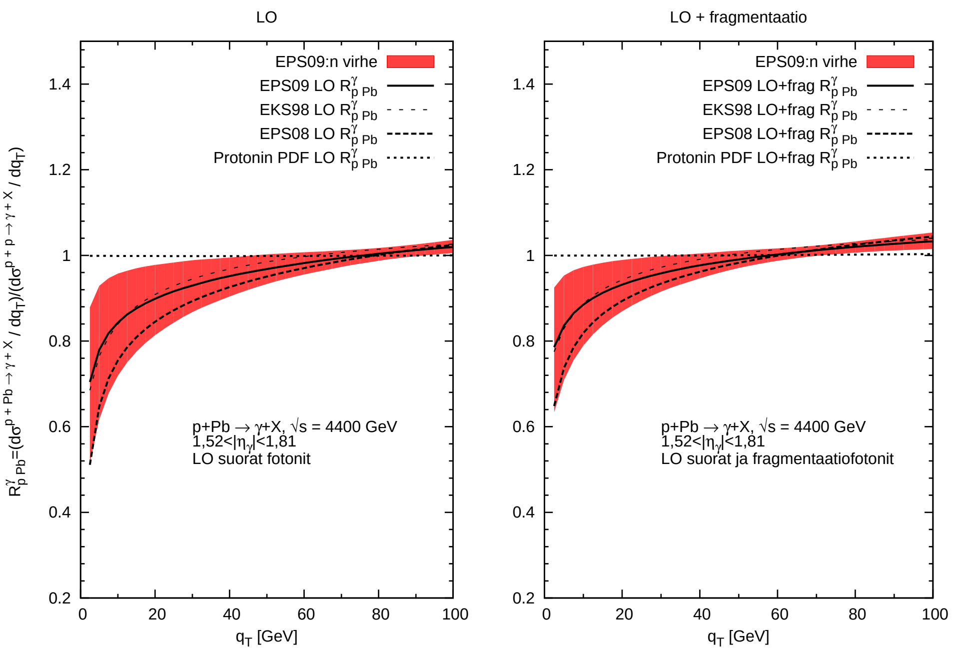
Kuva 18: Vaikutusalojen suhde $R^{\gamma}_{\mathrm{PbPb}}$ (29) ATLAS-kollaboraation rapiditeettivälillä $|\eta_\gamma| < 0,60$.



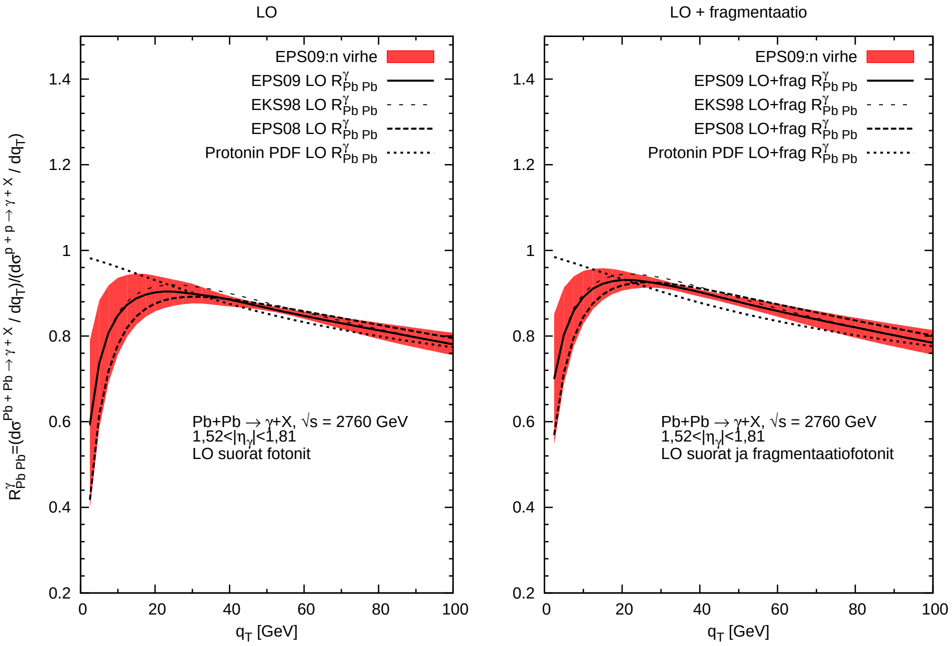
Kuva 19: Vaikutusalojen suhde $R^{\gamma}_{\mathrm{pPb}}$ (29) ATLAS-kollaboraation rapiditeettivälillä $0,60 < |\eta_\gamma| < 1,37$.



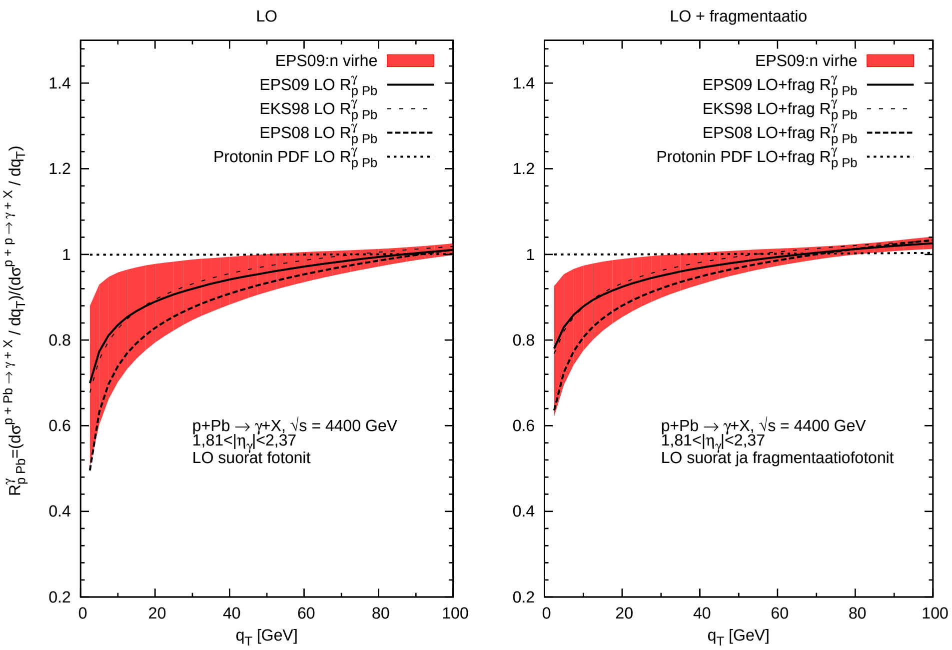
Kuva 20: Vaikutusalojen suhde $R^{\gamma}_{\mathrm{PbPb}}$ (29) ATLAS-kollaboraation rapiditeettivälillä $0,60 < |\eta_\gamma| < 1,37$.



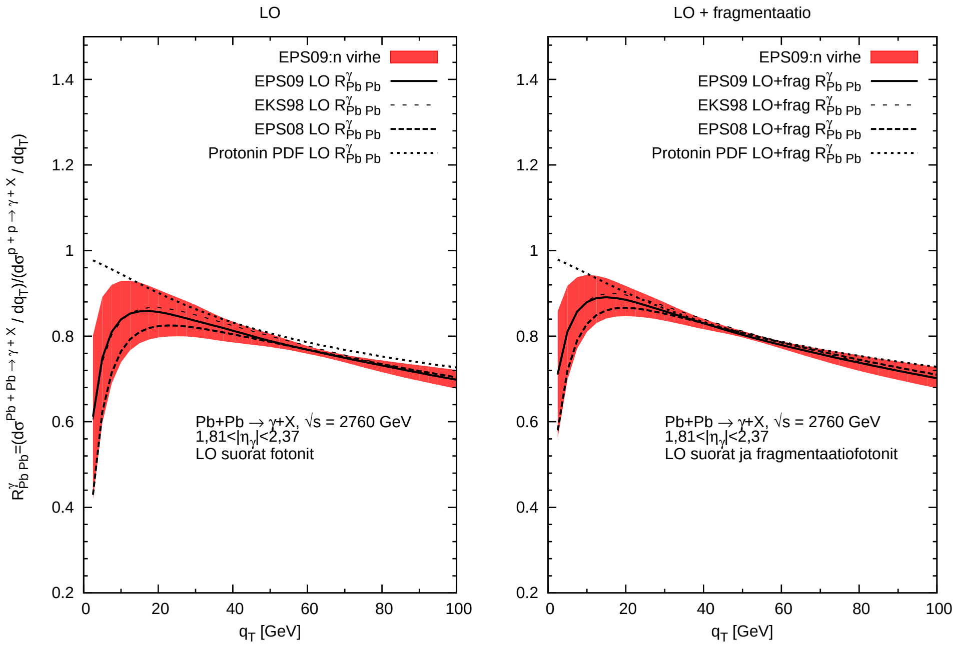
Kuva 21: Vaikutusalojen suhde $R^{\gamma}_{\mathrm{pPb}}$ (29) ATLAS-kollaboraation rapiditeettivälillä $1,52 < |\eta_\gamma| < 1,81$.



Kuva 22: Vaikutusalojen suhde $R^{\gamma}_{\mathrm{PbPb}}$ (29) ATLAS-kollaboraation rapiditeettivälillä $1,52 < |\eta_\gamma| < 1,81$.



Kuva 23: Vaikutusalojen suhde $R^{\gamma}_{\mathrm{pPb}}$ (29) ATLAS-kollaboraation rapiditeettivälillä $1,81 < |\eta_\gamma| < 2,37$.



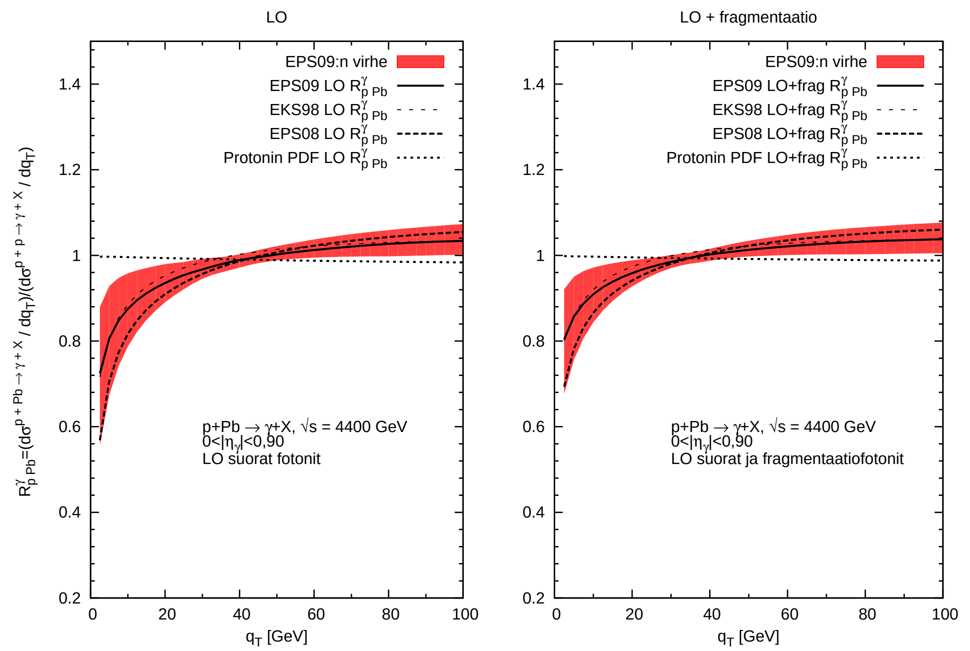
Kuva 24: Vaikutusalojen suhde $R^{\gamma}_{\mathrm{PbPb}}$ (29) ATLAS-kollaboraation rapiditeettivälillä $1,81 < |\eta_\gamma| < 2,37$.

kutusalojen suhteita $R^{\gamma}_{\mathrm{A_1A_2}}$ on kuvissa 25–32. CMS-kollaboraation keskirapiditeetin, $|\eta_\gamma| < 0,90$, ennusteet prosessille $\mathrm{p} + \mathrm{Pb} \rightarrow \gamma + X$ löytyvät kuvasta 25 ja vastaavassa rapiditeetissa prosessille $\mathrm{Pb} + \mathrm{Pb} \rightarrow \gamma + X$ kuvassa 26. CMS-kollaboraation ulommissa rapiditeeteissa $0,90 < |\eta_\gamma| < 1,44$, $1,57 < |\eta_\gamma| < 2,10$ ja $2,10 < |\eta_\gamma| < 2,50$ ovat prosessin $\mathrm{p} + \mathrm{Pb} \rightarrow \gamma + X$ vaikutusalojen suhteet kuvissa 27, 29 ja 31, sekä vastaavissa rapiditeeteissa sironnalle $\mathrm{Pb} + \mathrm{Pb} \rightarrow \gamma + X$ kuvissa 28, 30 ja 32.

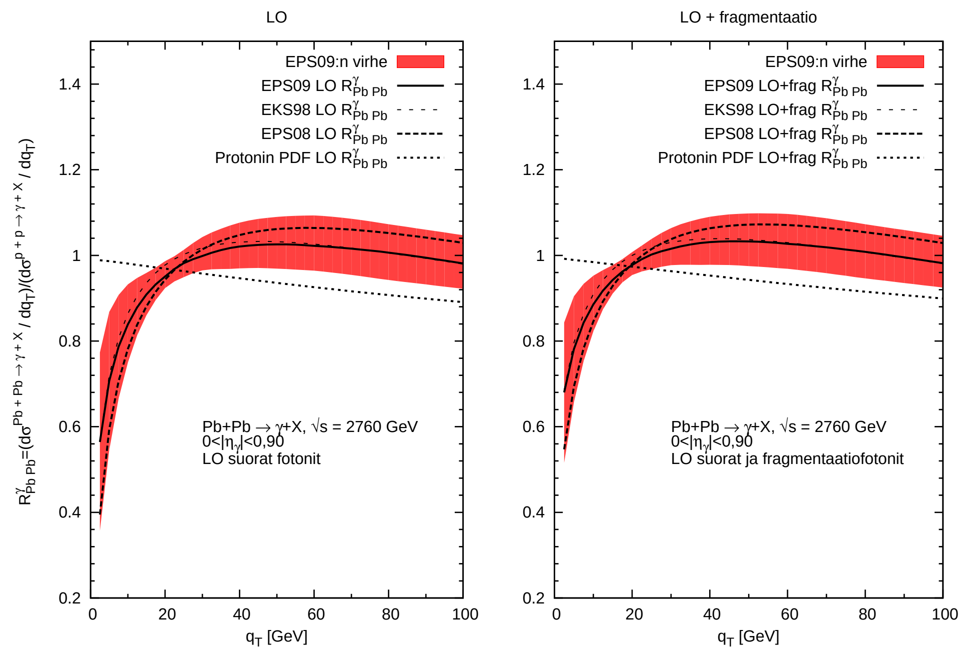
Yhdysvalloissa sijaitsevalta RHIC-kiihdyttimeltä on myös mitattu suoraa fotonituotoa prosesseista $\mathrm{d} + \mathrm{Au} \rightarrow \gamma + X$ ja $\mathrm{Au} + \mathrm{Au} \rightarrow \gamma + X$ kiihdytysenergialla $\sqrt{s} = 200\,\mathrm{GeV}$. RHIC-kiihdyttimeltä saatuja tuloksia on vasta hiljattain virallisesti julkaistu [27], joten näihin mittaustuloksiin perustuvat K-tekijöiden määritykset eivät ehtineet tähän tutkielmaan. Kuvissa 33 ja 34 on vaikutusalojen suhteet $R^{\gamma}_{\mathrm{dAu}}$ ja $R^{\gamma}_{\mathrm{AuAu}}$ fotonin pseudorapiditeetissa $|\eta_\gamma| < 0,35$, joka vastaa julkaisussa [28] esiintyvää rapiditeettiväliä RHIC-kiihdyttimelle.

11.3 Suoria fotoneja prosessista $\mathrm{Pb} + \mathrm{Pb} \rightarrow \gamma + X$

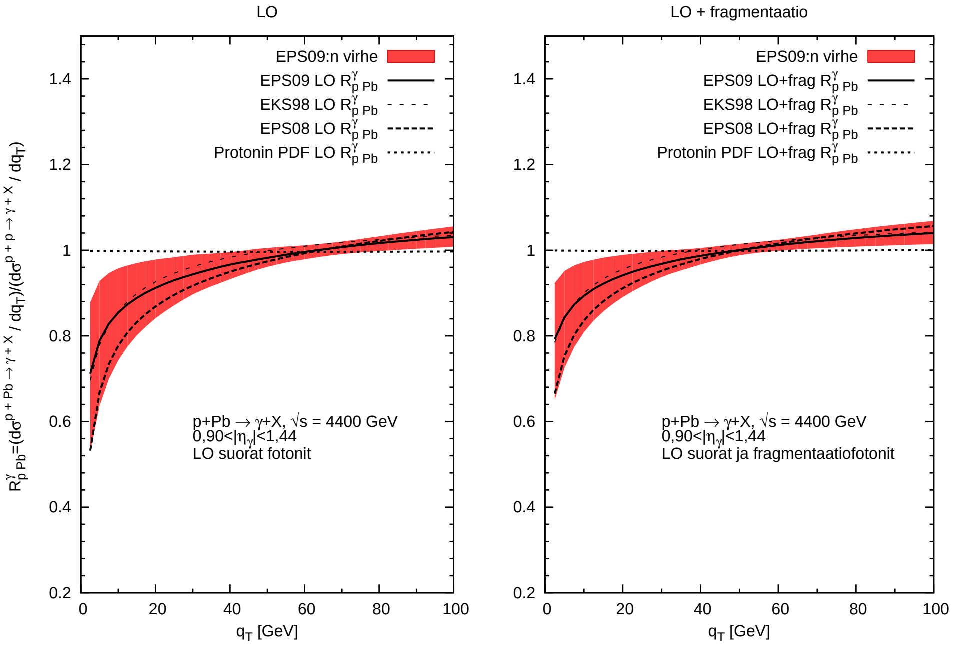
Suoran fotonituoton mittaustuloksia raskasionitörmäyksistä on vielä verrattain vähän saatavilla. Kuitenkin vuodelta 2012 on olemassa ensimmäisiä tuloksia lyijyydinten törmäyksissä muodostuneista suorista fotoneista, nämä mittaustulokset löytyvät CMS-kollaboraation julkaisusta [29]. Näiden mittaustulosten perusteella



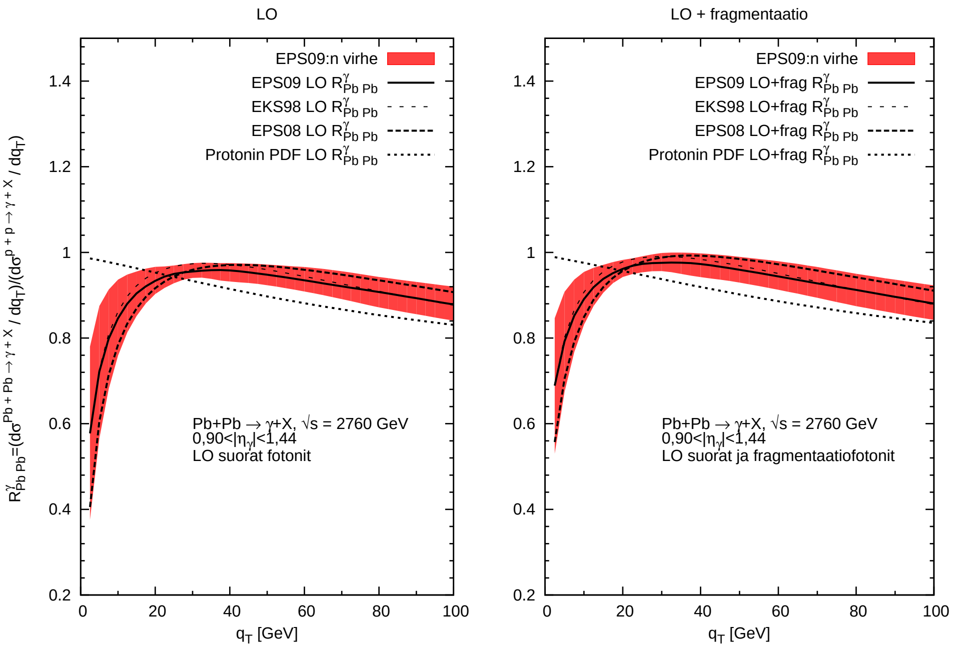
Kuva 25: Vaikutusalojen suhde $R^{\gamma}_{\mathrm{pPb}}$ (29) CMS-kollaboraation keskirapiditeetissa $|\eta_\gamma| < 0,90$.



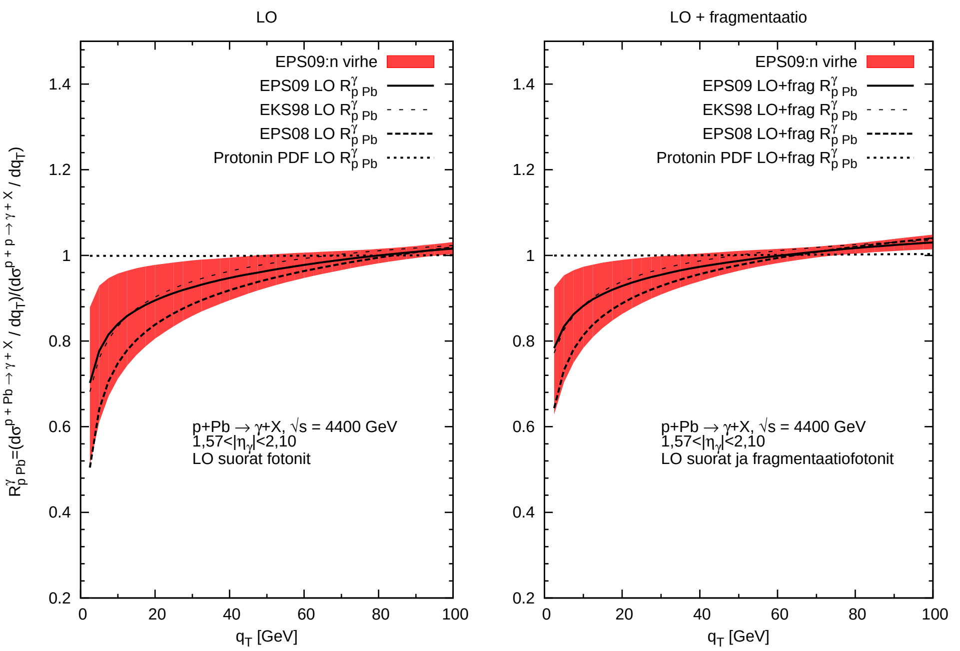
Kuva 26: Vaikutusalojen suhde $R^{\gamma}_{\mathrm{PbPb}}$ (29) CMS-kollaboraation keskirapiditeetissa $|\eta_\gamma| < 0,90$.



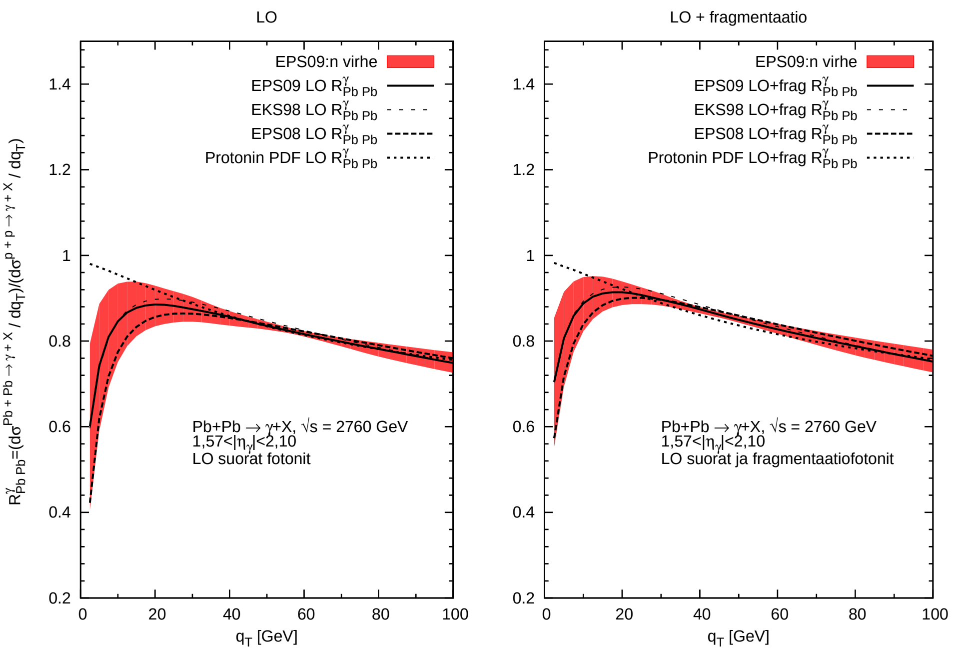
Kuva 27: Vaikutusalojen suhde $R^{\gamma}_{\mathrm{pPb}}$ (29) CMS-kollaboraation rapiditeettivälillä $0,90 < |\eta_{\gamma}| < 1,44$.



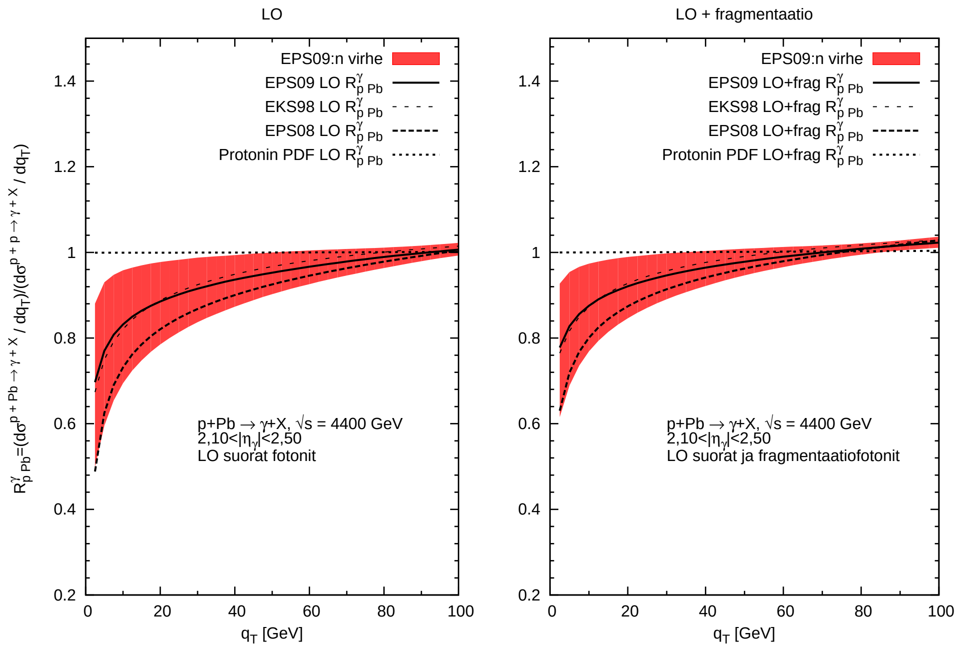
Kuva 28: Vaikutusalojen suhde $R^{\gamma}_{\mathrm{PbPb}}$ (29) CMS-kollaboraation rapiditeettivälillä $0,90 < |\eta_{\gamma}| < 1,44$.



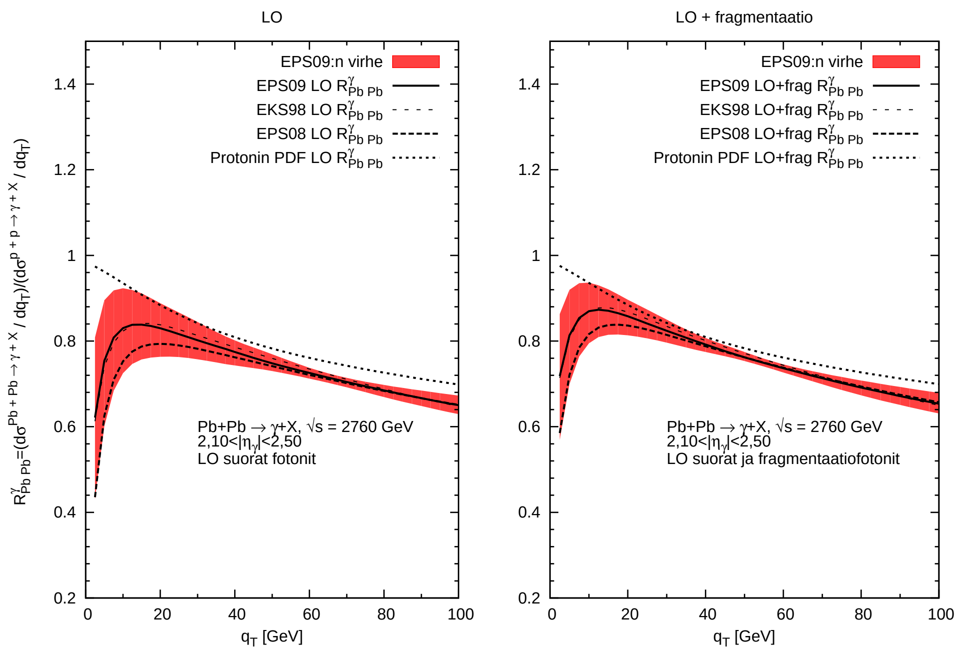
Kuva 29: Vaikutusalojen suhde $R^{\gamma}_{\mathrm{pPb}}$ (29) CMS-kollaboraation rapiditeettivälillä $1,57 < |\eta_{\gamma}| < 2,10$.



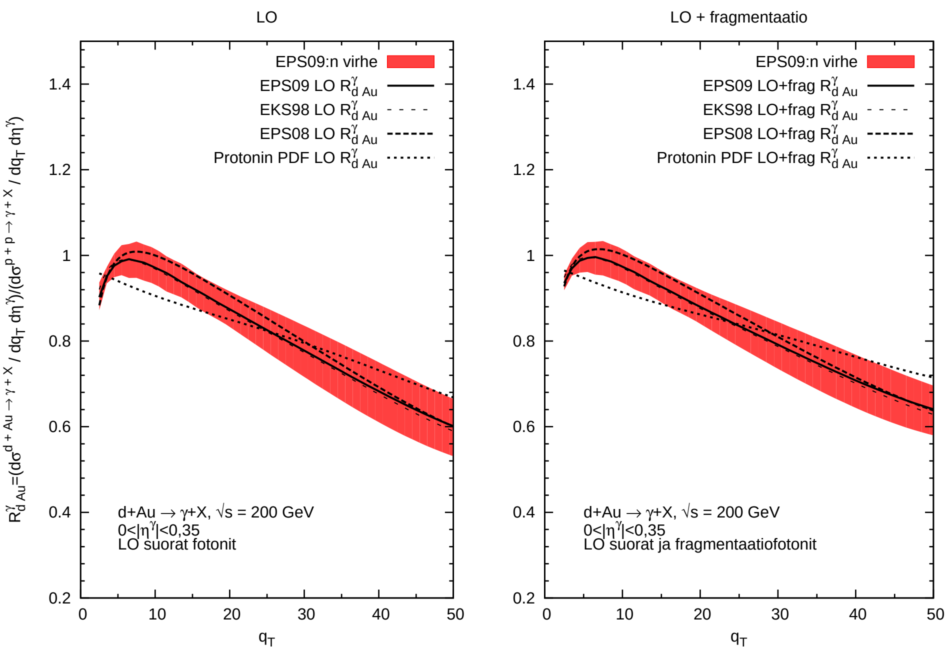
Kuva 30: Vaikutusalojen suhde $R^{\gamma}_{\mathrm{PbPb}}$ (29) CMS-kollaboraation rapiditeettivälillä $1,57 < |\eta_{\gamma}| < 2,10$.



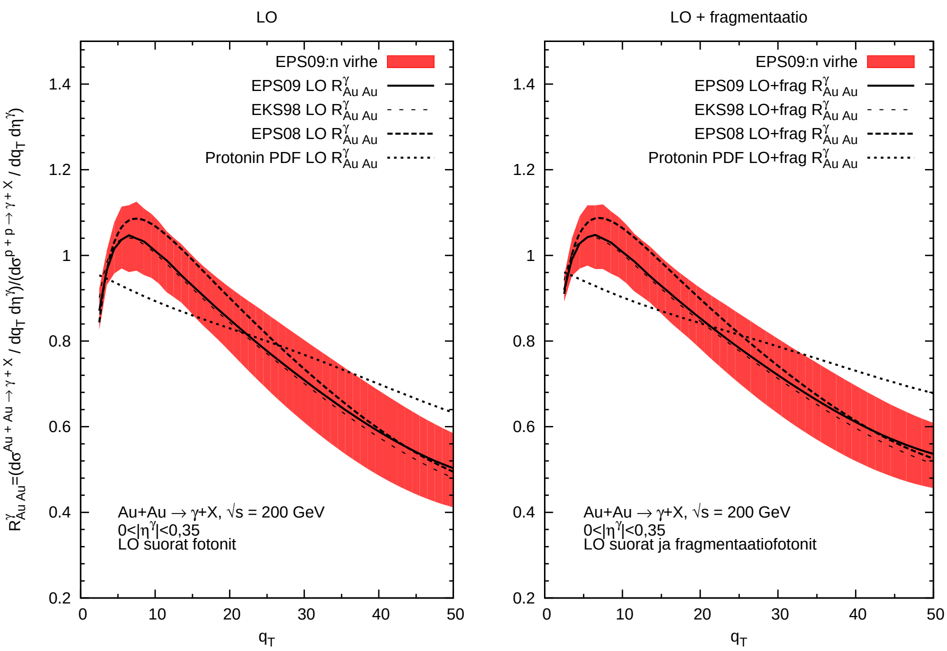
Kuva 31: Vaikutusalojen suhde $R^{\gamma}_{\mathrm{pPb}}$ (29) CMS-kollaboraation rapiditeettivälillä $2,10 < |\eta_{\gamma}| < 2,50$.



Kuva 32: Vaikutusalojen suhde $R^{\gamma}_{\mathrm{PbPb}}$ (29) CMS-kollaboraation rapiditeettivälillä $2,10 < |\eta_{\gamma}| < 2,50$.



Kuva 33: Vaikutusalojen suhde (29) $R^{\gamma}_{\mathrm{dAu}}$ prosessille $\mathrm{d}+\mathrm{Au}\to\gamma+X$, kun $\sqrt{s}=200\,\mathrm{GeV}$ ja $|\eta_{\gamma}|<0,35$.



Kuva 34: Vaikutusalojen suhde (29) $R^{\gamma}_{\mathrm{AuAu}}$ prosessille $\mathrm{Au}+\mathrm{Au}\to\gamma+X$, kun $\sqrt{s}=200\,\mathrm{GeV}$ ja $|\eta_{\gamma}|<0,35$.

Ydinmodifikaatio	$K_{LO} \pm \delta K_{LO}$	$K_{LO+frag} \pm \delta K_{LO+frag}$
Ei ydinmodifikaatiota	$2,3 \pm 0,4$	$1,5 \pm 0,3$
EPS09[12]	$2,2 \pm 0,4$	$1,4 \pm 0,3$
EKS98[13]	$2,1 \pm 0,4$	$1,4 \pm 0,3$
EPS08[14]	$2,1 \pm 0,4$	$1,4 \pm 0,3$
$\mathrm{p} + \mathrm{p} \to \gamma + X$	$2,1 \pm 0,2$	$1,38 \pm 0,12$

Taulukko 4: Törmäysprosessista $\mathrm{Pb} + \mathrm{Pb} \to \gamma + X$, $\sqrt{s} = 2760\,\mathrm{GeV}$, rapiditeettivälillä $|\eta_\gamma| < 1,44$ mitattujen [29] suorien fotonien K-tekijät eri ydinmodifikaatioilla laskettuna. Lyhenne LO viittaa nopeisiin prosesseihin sekä LO+frag nopeisiin ja fragmentaatiofotoneihin yhdessä. Alimmalla rivillä on suoran fotonituoton K-tekijät protonien törmäysprosessille, kun $\sqrt{s} = 2760\,\mathrm{GeV}$.

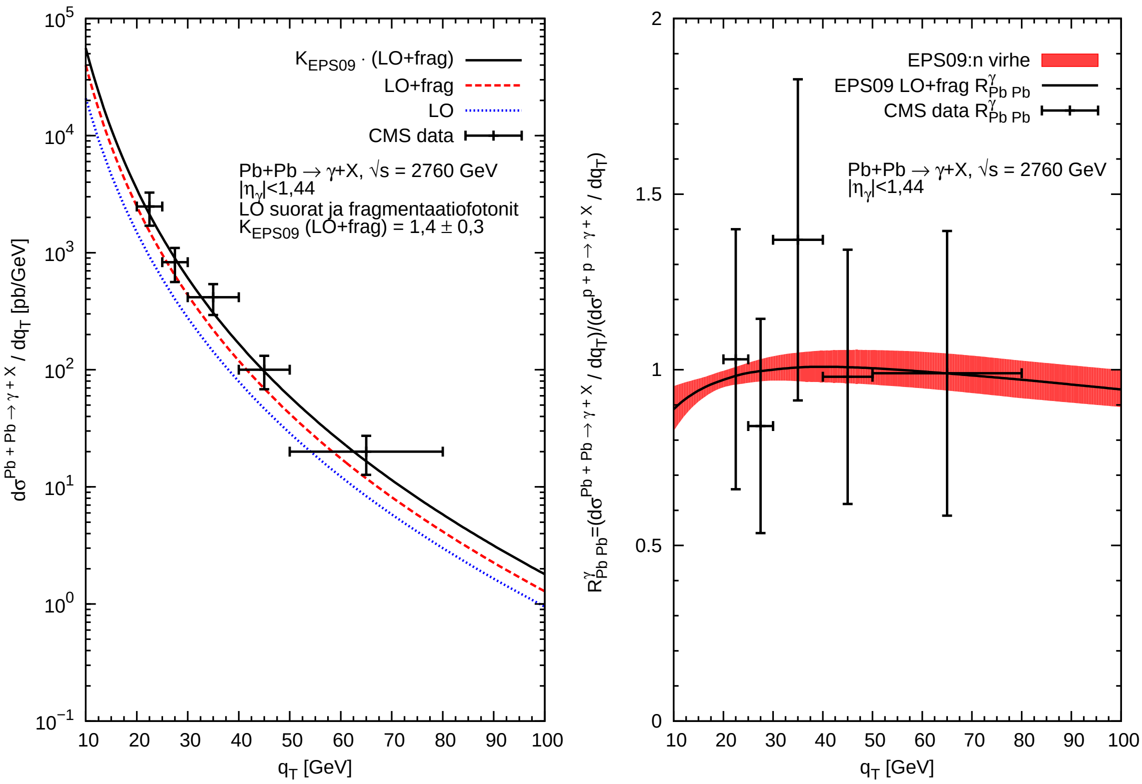
pystytään jo jossain määrin tutkimaan, miten raskaiden ytimien ydinpartonijakaumien EPS09 [12], EKS98 [13] ja EPS08 [14] avulla lasketut teoreettiset vaikutusalat vastaavat kokeita. Taulukossa 4 on kunkin ydinmodifikaation avulla lasketut K-tekijät. Ensimmäisellä rivillä K-tekijä on laskettu myös ilman ydinmodifikaatiota, jonka perusteella osoittautuu, että teoreettinen vaikutusala ilman sopivaa ydinmodifikaatiota on kauempana havaitusta vaikutusalasta kuin millä tahansa muulla käytetyistä ydinmodifikaatiosta.

Mielenkiintoista on myös huomata, että vertailuprosessina olevasta sironnasta $\mathrm{p} + \mathrm{p} \to \gamma + X$ mitattujen fotonien K-tekijät vastaavat käytännössä täysin lyijyydinten törmäyksistä laskettuja K-tekijöitä. Eli siis näiden mittausten perusteella K-tekijä ei vaikuttaisi olevan riippuvainen raskasionitörmäyksiin käytetyistä ytimistä. Protonien törmäyksistä lasketut K-tekijän virherajat ovat pienemmät, koska protonien törmäyksistä mitattujen vaikutusalojen virherajat ovat pienemmät kuin lyijy-ytimillä.

Kuvassa 35 on lyijy-ydinten mittauksista [29, s. 10] saadut vaikutusalan datapisteet virherajoineen, sekä EPS09-ydinmodifikaatioiden [12] avulla laskettu R^γ_{PbPb} virherajoineen (25). Mitatut R^γ_{PbPb} pisteet asettuvat varsin hyvin EPS09:n avulla lasketulle teoreettiselle R^γ_{PbPb}:lle, vaikka datapisteiden virhemarginaalit ovat varsin suuret.

12 Johtopäätökset ja yhteenveto

Tässä Pro Gradu -tutkielmassa on pystytty merkittävästi laajentamaan erikoistyössä [4] aloitettua suoran fotonituoton teorian analyysiä. Erikoistyössä tutkittiin suoraa fotonituottoa kahdesta pääprosessista, QCD-Compton-sironta ja kvarkki–antikvarkki-parin annihilaatio, fotonien 0-rapiditeetissa. Tässä työssä suoran fotonituoton analyysia on laajennettu LHC-kiihdyttimen ATLAS- ja CMS-kollabo-



Kuva 35: Vasemmassa kuvassa on lyijy-ydinten törmäysprosessista tuotettujen suorien fotonien vaikutusala teoreettisesti laskettuna ja mitatut datapisteet LHC:n CMS-kokeesta [29]. Oikeanpuoleisessa kuvassa on lyijy-ytimien kautta tuotettujen suorien fotonien suhde protonien törmäyksien kautta tuotettuihin suoriin fotoneihin. Teoreettisiin käyriin on käytetty EPS09-ydinmodifikaatioita.

raatioissa käytettyihin suoran fotonituoton mittausrapiditeetteihin. Samalla analyysiin on sisällytetty fragmentaatiofotonien vaikutus suoraan fotonituottoon.

Fragmentaatiofotonien vaikutus suoran inklusiivisen fotonituoton tarkempaan ymmärtämiseen osoittautui ensiarvoisen tärkeäksi. Pienillä poikittaisliikemäärillä, $q_T \lesssim 10\,\mathrm{GeV}$, fragmentaatiofotonien vaikutus suoraan fotonituottoon on jopa suurempi kuin kahden pääprosessin, kuten havaittiin kuvassa 7. Ehkäpä parhaiten fragmentaatiofotonien vaikutus teoreettisiin vaikutusaloihin näkyy taulukon 3 K-tekijöissä, joissa osoittautui, että fragmentaatiofotonien sisältämät teoreettiset ja mitatut vaikutusalat ovat lähempänä toisiaan kuin ilman fragmentaation vaikutusta. Sekä ennen kaikkea K-tekijöiden virherajat pienenevät, kun huomioidaan fragmentaatiofotonien vaikutus teoreettisessa vaikutusalassa. Tässä on syytä muistaa, että kokeissa tehdään isolaatioleikkaus, jota emme nyt fragmentaatiokomponentin lisäämisen osalta ota huomioon. Tässä mielessä fragmentaatiokomponentin lisääminen osaltaan simuloi LO-laskusta puuttuvia NLO-tekijöitä. Keskirapiditeeteissa K-tekijöiden virherajat ovat pääsääntöisesti pienempiä ulompiin rapiditeetteihin verrattuna, koska mitattujen vaikutusalojen sekä statistiset että systemaattiset virheet ovat suurempia ulommissa rapiditeeteissa. Tutkimalla tarkemmin taulukon 3 kertoimien suhteita, niin vaikuttaisi siltä, että fragmentaatiofotonien vaikutus kasvaa ulommissa rapiditeeteissa. Kuitenkin K-tekijät säilyvät, virherajoissaan, melko samansuuruisina rapiditeetista toiseen.

Suoran fotonituoton mittaustuloksia suurienergiaisista raskasionitörmäyksistä on julkaistu vielä verrattain vähän. Tähän Pro Gradu -tutkielmaan löytyi ainoastaan CMS-kollaboraation [29] mittausdataa lyijy-ydinten törmäysprosessista kiihdytysenergialla $\sqrt{s} = 2760\,\mathrm{GeV}$. Näihin mittaustuloksiin sovitetut K-kertoimet ovat taulukossa 4, joiden perusteella ydinpartonijakaumia EPS09, EKS98 ja EPS08 käytettäessä teoreettiset vaikutusalat ovat lähempänä mitattuja kuin ilman ydinmodifikaatiota. Referenssiprosessin $\mathrm{p} + \mathrm{p} \to \gamma + X$ K-tekijät näyttäisivät olevan likimain samat kuin $\mathrm{Pb} + \mathrm{Pb} \to \gamma + X$ prosessissa. Tämä on mielenkiintoinen havainto, koska K-tekijät eivät näytä riippuvan käytetystä ydinpartonijakaumasta, vaan ilmeisestikin ydinten kiihdytysenergiasta. Protonien törmäykselle lasketut K-tekijän virherajat ovat pienemmät verrattuna lyijy-ydinten törmäysprosessiin, koska suoran fotonituoton mittaustarkkuus on parempi protonien törmäyksissä.

Suoraa fotonituottoa voitaneen käyttää ydinpartonijakaumien gluonijakaumien tutkimiseen, koska nopeista prosesseista QCD-Compton-sironta, $gq \to \gamma q$, ja fragmentaatioprosesseista sironta $gq \to gq$ osoittautuivat merkittävimmiksi suorien fotonien aliprosesseiksi, kuva 7. Kuvien 17–32 suhteiden virherajoja tutkimalla voidaan todeta, että suotuisimmat rapiditeetit LHC-kiihdyttimessä gluonien EPS09-virherajojen pienentämiseksi ovat keskirapiditeetit prosessille $\mathrm{Pb} + \mathrm{Pb} \to \gamma + X$ ja uloimmat rapiditeetit prosessille $\mathrm{p} + \mathrm{Pb} \to \gamma + X$. Näissä rapiditeeteissa EPS09-jakaumien ennustamat virherajat ovat suurimillaan, ja lisämittaustuloksia saadessa χ^2-minimoinnilla tehty EPS09:n parametrien määritys voisi tarkentua. Saman tyyppisiä vaikutusalojen suhteita kuin kuvissa 17–34 on julkaistu muun muassa julkaisussa [28], ja kuvan 35 tapaan uudessa suoran fotonituoton NLO-julkaisussa [30, s. 13].

Myös RHIC-kiihdyttimeltä toivoisi saavan lisää virallisia suoran fotonituoton mittaustuloksia raskasionitörmäyksistä, koska tällöin ei oltaisi ainoastaan LHC-kiihdyttimeltä mitattujen suorien fotonien varassa. Sekä saataisiin fotonituoton mittaustuloksia myös deuterium- ja kultaytimistä, kun $\sqrt{s} = 200\,\mathrm{GeV}$.

Kuvassa 35 esiintyvä CMS-kollaboraation mittaustulos [29] suorien fotonien vaikutusalasta sironnasta $\mathrm{Pb} + \mathrm{Pb} \to \gamma + X$ antoi ydinpartonijakaumille EPS09 [12], EKS98 [13] ja EPS08 [14] riippumattoman testialustan tutkia, miten teoreettinen suoran fotonituoton vaikutusala vastaa mittaushavaintoja. Tulevaisuuden versioihin ydinpartonijakaumista voisi mahdollisesti sisällyttää nämä suoran fotonituoton mittauspisteet.

Viitteet

[1] P. W. Higgs, Broken symmetries and the masses of gauge bosons, Phys. Rev. Lett. Vol. 13 Num. 16, 508, 19 October 1964.

[2] ATLAS Collaboration, Search for the Standard Model Higgs Boson in the Decay Channel with 4.9 fb^{-1} of pp Collision Data at $\sqrt{s} = 7$ TeV with ATLAS, Phys. Rev. Lett. 108, 111803 (2012)

[3] CMS Collaboration, A search using multivariate techniques for a standard model Higgs boson decaying into two photons, CMS PAS HIG-12-001, 2012/03/07.

[4] T. Mustonen, Erikoistyö, Suora fotonituotto kovien sirontojen kautta kertaluvussa $\mathcal{O}(\alpha\alpha_S)$, Jyväskylän yliopisto, Fysiikan laitos, Syksy 2011, Hyväksytty 15.1.2012

[5] J. Beringer et al. (Particle Data Group), PR D86, 010001 (2012) http://pdg.lbl.gov/2012/tables/rpp2012-sum-quarks.pdf

[6] M.E. Peskin & D.V. Schroeder, An Introduction to Quantum Field Theory, 1995, Westview Press, ISBN 0-201-50397-2

[7] K.J. Eskola and H.Honkanen, A perturbative QCD analysis of charged-particle distributions in hadronic and nuclear collisions, 6 May 2002, HIP-2002-23/TH, hep-ph/0205048, [arXiv:hep-ph/0205048v1].

[8] J. F. Owens, E. Reya and M. Glück, Detailed quantum-chromodynamic predictions for high-p_T processes, Phys. Rev. D 18, 1501, 1. September 1978.

[9] J. Pumplin et al., JHEP 07 (2002) 012, [arXiv:hep-ph/0201195].

[10] T. Mustonen, Luonnontieteiden kandidaatintutkielma Leptoninen syvä epäelastinen sironta, partonimalli ja Drell–Yan-prosessi, Jyväskylän yliopisto, Fysiikan laitos, Kevät 2011.

[11] V. N. Gribov and L. N. Lipatov, Sov. J. Nucl. Phys. 15, (1972) 438;
V. N. Gribov and L. N. Lipatov, Sov. J. Nucl. Phys. 15, (1972) 675;
G. Altarelli and G. Parisi, Nucl. Phys. B126, (1977) 298;
Y. L. Dokshitzer, Sov. Phys. JETP Lett. 46, (1977) 641.

[12] K. J. Eskola, H. Paukkunen and C. A. Salgado, JHEP 04 (2009) 065.

[13] K. J. Eskola, V. J. Kolhinen and C. A. Salgado, Eur. Phys. J. C 9 (1999) 61, [arXiv:hep-ph/9807297].

[14] K. J. Eskola, H. Paukkunen and C. A. Salgado, JHEP 0807 (2008) 102, [arXiv:0802.0139 [hep-ph]].

[15] R. K. Ellis, W. J. Stirling and B. R. Webber, QCD and Collider Physics, 1996, Cambridge University Press, ISBN 0-521-54589-7

[16] J. F. Owens, Large-momentum-transfer production of direct photons, jets and particles, Rev. Mod. Phys. Vol. 59 Num. 2, 465, April 1987.

[17] E. L. Berger, X. Guo and J. Qiu, Inclusive Prompt Photon Production in Hadronic Final States of e^+e^- Annihilation, ANL-HEP-PR-94-74, 29 Jul 1995, [arXiv:hep-ph/9507428v3].

[18] G. t'Hooft and M. Veltman, Regularization and renormalization of gauge fields, Nucl. Phys. B 44 189 (1972). (1972).

[19] L. Bourhis, M. Fontannaz and J.P. Guillet, Quark and gluon fragmentation functions into photons, Eur. Phys. J. C 2 (1998) 529, [arXiv:hep-ph/9704447v1].

[20] J. J. Sakurai, Theory of strong interactions, Ann. Phys. (NY) 11 (1960) 1.

[21] Riley K.F., Hobson M.P. and Bence S.J. Mathematical Methods for Physics and Engineering, Third Edition, 2006, Cambridge University Press, New York, ISBN 0-521-67971-0

[22] ATLAS Collaboration, Measurement of the inclusive isolated prompt photon cross section in pp collisions at $\sqrt{s} = 7\,\text{TeV}$ with the ATLAS detector, CERN-PH-EP-2010-068, 2010/12/22, [arXiv:1012.4389v2].

[23] ATLAS Collaboration, Measurement of the inclusive isolated prompt photon cross-section in pp collisions at $\sqrt{s} = 7\,\text{TeV}$ using $35\,pb^{-1}$ of ATLAS data, CERN-PH-EP-2011-115, 2011/09/30, [arXiv:1108.0253v2].

[24] CMS Collaboration, Measurement of the Isolated Prompt Photon Production Cross Section in pp Collisions at $\sqrt{s} = 7\,\text{TeV}$, CERN-PH-EP/2010-053, 2011/02/25, [arXiv:1012.0799v2].

[25] CMS Collaboration, Measurement of the Differential Cross Section for Isolated Prompt Photon Production in pp Collisions at 7 TeV, CERN-PH-EP/2011-128, 2011/08/11, [arXiv:1108.2044v1].

[26] A. Accardi et al., Hard probes in heavy ion collisions at the LHC: PDFs, shadowing and pA collisions, HIP-2003-40/TH, 2003/08/25, [arXiv:hep-ph/0308248v1].

[27] PHENIX Collaboration, Measurement of Direct Photons in Au+Au Collisions at $\sqrt{s}_{NN} = 200\,\mathrm{GeV}$, [arXiv:1205.5759v1] [nucl-ex] 25 May 2012.

[28] F. Arleo, K. J. Eskola, H. Paukkunen and C. A. Salgado, Inclusive prompt photon production in nuclear collisions at RHIC and LHC, 2011/03/08, [arXiv:1103.1471v1].

[29] CMS Collaboration, Measurement of isolated photon production in pp and PbPb collisions at $\sqrt{s}_{NN} = 2.76\,\mathrm{TeV}$, CERN-PH-EP/2011-221, 2012/01/17, [arXiv:1201.3093v1].

[30] I. Helenius, K. J. Eskola and H. Paukkunen, Centrality dependence of inclusive prompt photon production in d+Au, Au+Au, p+Pb, and Pb+Pb collisions, [arXiv:1302.5580v2] [hep-ph] 1 Mar 2013.

[31] K. J. Eskola, Hiukkasfysiikan luennot, Kevät 2008

[32] M. Gell-Mann, Symmetries of Baryons and Mesons, Phys. Rev. Vol. 125 Num. 3, 1067, 1 February 1962.

[33] Gaussian Quadrature for Multiple Integrals (D110) http://wwwasdoc.web.cern.ch/wwwasdoc/shortwrupsdir/d110/top.html

[34] CERN Program Library http://cernlib.web.cern.ch/cernlib/

13 Liitteet

13.1 Laskusääntöjä

Vektorien $A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3) = (A^0, \mathbf{A})$ ja $B^\nu = (B^0, B^1, B^2, B^3) = (B^0, \mathbf{B})$ sisätulo määritellään metrisen perustensorin, $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$, avulla. Vektorien A ja B sisätulo on

$$A \cdot B = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = A^0 B^0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}, \tag{32}$$

missä $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A^1 B^1 + A^2 B^2 + A^3 B^3$ on tavallinen euklidinen sisätulo.

Tässä työssä käytetään yksikköjärjestelmää, jossa $\hbar = c = 1$, jolloin 4-liikemäärä määritellään $p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3) \equiv (E, \mathbf{p})$, missä $p^0 = E$ on hiukkasen energia ja $\mathbf{p} = (p^1, p^2, p^3)$ 3-komponenttinen liikemäärävektori, lisäksi hiukkasen paikkavektori 4-vektorimuodossa on $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (t, \mathbf{x})$, missä $x^0 = t$ on aika ja $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$ hiukkasen paikka 3-ulotteisessa avaruudessa.

Ilmaistaessa esimerkiksi vaikutusaloja tiettyjen fysikaalisten muuttujien suhteen, esimerkiksi poikittaisliikemäärän ja rapiditeetin suhteen, tarvitaan deltafunktion määritelmää

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \phi(t) \delta(t - t_0) = \phi(t_0), \tag{33}$$

missä siis deltafunktio $\delta(t - t_0)$ sijoittaa testifunktion $\phi(t)$ argumentiksi t_0.

Vaikutusalassa (1) esiintyvän vuotekijän F laskun yksityiskohdat ovat

$$\begin{aligned}
F &= 4E_A E_B |v_A - v_B| \\
&= 4E_A E_B \left|\frac{\mathbf{p}_A}{E_A} - \frac{\mathbf{p}_B}{E_B}\right| \\
&= 4|E_B \mathbf{p}_A - E_A \mathbf{p}_B| \\
&= 4\sqrt{(E_B \mathbf{p}_A - E_A \mathbf{p}_B) \cdot (E_B \mathbf{p}_A - E_A \mathbf{p}_B)} \\
&= 4\sqrt{E_B^2 \underbrace{|\mathbf{p}_A|^2}_{=E_A^2 - m_A^2} + E_A^2 |\mathbf{p}_B|^2 - 2E_A E_B (\mathbf{p}_A \cdot \mathbf{p}_B) + \underbrace{(\mathbf{p}_A \cdot \mathbf{p}_B)^2 - |\mathbf{p}_A|^2 |\mathbf{p}_B|^2 \cos\theta_{AB}^2}_{=(\mathbf{p}_A \cdot \mathbf{p}_B)^2 - |\mathbf{p}_A|^2 |\mathbf{p}_B|^2 = 0,\ \mathbf{p}_A \| \mathbf{p}_B}} \\
&= 4\sqrt{\underbrace{E_A^2 E_B^2 + (\mathbf{p}_A \cdot \mathbf{p}_B)^2 - 2E_A E_B (\mathbf{p}_A \cdot \mathbf{p}_B)}_{=(E_A E_B - \mathbf{p}_A \cdot \mathbf{p}_B)^2 = (g_{\mu\nu} p_A^\mu p_B^\nu)^2 = (p_A \cdot p_B)^2} - E_B^2 m_A^2 + \underbrace{E_A^2 |\mathbf{p}_B|^2 - |\mathbf{p}_A|^2 |\mathbf{p}_B|^2}_{=|\mathbf{p}_B|^2 (E_A^2 - |\mathbf{p}_A|^2) = |\mathbf{p}_B|^2 m_A^2}} \\
&= 4\sqrt{(p_A \cdot p_B)^2 - m_A^2 (E_B^2 - |\mathbf{p}_B|^2)} \\
&= 4\sqrt{(p_A \cdot p_B)^2 - m_A^2 m_B^2}.
\end{aligned} \tag{34}$$

13.2 Spin–$\frac{1}{2}$-hiukkasille tarvittavia laskusääntöjä

Erikoistyössä [4, s. 41-42] käsiteltiin varsin kattavasti vapaan spin–$\frac{1}{2}$-hiukkasen dynamiikkaa, josta tässä on pääpiirteet. Vapaan spin–$\frac{1}{2}$-hiukkasen dynamiikka noudattaa Diracin yhtälöä

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0,$$

missä $\psi(x) = u(p,s)e^{-ip\cdot x}$, jossa aaltofunktio $u(p,s)$ on hiukkasen 4-liikemäärästä ja spinin z-komponentista riippuva spinori sekä $e^{-ip\cdot x}$ vaihetekijä. Diracin yhtälössä esiintyvät γ-matriisit ovat Dirac–Pauli-esitysmuodossa [31, s. 256] $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1_{2\times 2} & 0 \\ 0 & -1_{2\times 2} \end{pmatrix}$ ja $\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$, missä σ^i, $i = 1, 2, 3$, ovat Paulin spin-matriiseja. Paulin spin-matriisit [6, s. 804] ovat $\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ ja $\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Partonisirontojen vaikutusalalaskuissa on käytännöllistä käyttää edellä esitettyä Diracin yhtälöä liikemääräavaruudessa. Liikemääräavaruudessa Diracin yhtälö on $(\not{p} - m)u(p,s) = 0$, missä käytetään Feynman-slash-notaatiota $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$. Vastaavasti antihiukkasen Diracin yhtälö liikemääräavaruudessa on $(\not{p}+m)v(p,s) = 0$, missä $v(p,s)$ on antihiukkasen spinori. Spinoreiden $u(p,s)$ ja $v(p,s)$ konjugoidut spinorit ovat [31, s. 264] $\bar{u}(p,s) \equiv u^\dagger\gamma^0$ ja $\bar{v}(p,s) \equiv v^\dagger\gamma^0$, jotka noudattavat Diracin yhtälöä muodoissa [6, s. 803] $\bar{u}(p,s)(\not{p} - m) = \bar{v}(p,s)(\not{p} + m) = 0$. Näiden lisäksi sironta-amplitudeja laskettaessa spin–$\frac{1}{2}$-hiukkasille joudutaan yleensä laskemaan spinoreiden polarisaatiosummia, jotka ovat [6, s. 804]

$$\sum_s u(p,s)\bar{u}(p,s) = \not{p} + m \quad \text{ja} \quad \sum_s v(p,s)\bar{v}(p,s) = \not{p} - m, \tag{35}$$

missä summaus s käy hiukkasen spinin z-komponentin yli.

Diracin yhtälössä esiintyvät γ-matriisit noudattavat Cliffordin algebraksi kutsuttua antikommutaattori ominaisuutta, joka on

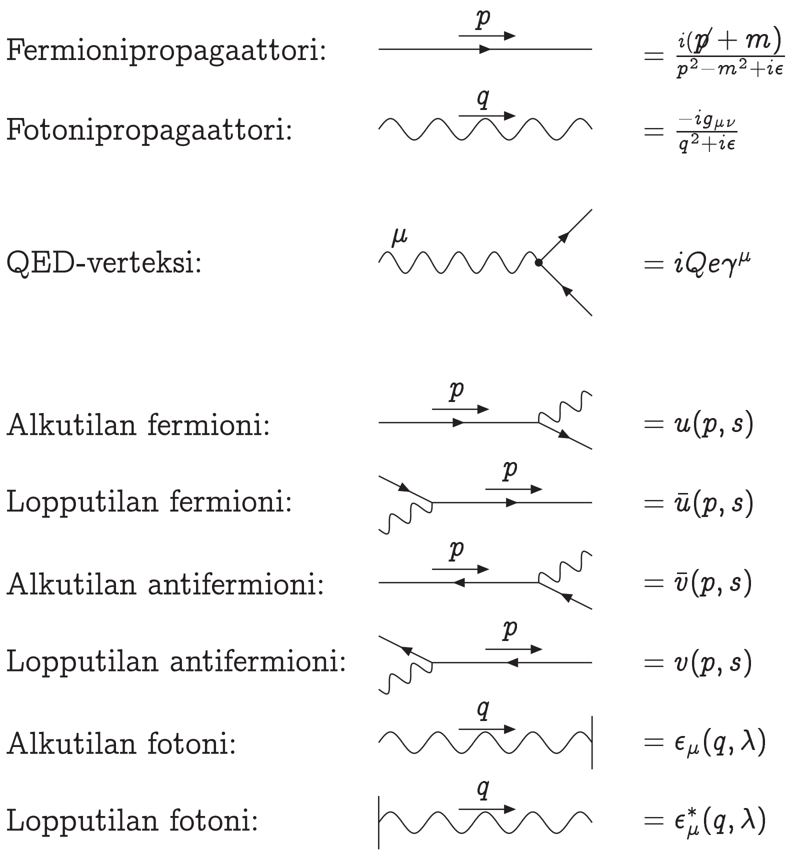
$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}. \tag{36}$$

Cliffordin algebran (36) avulla voidaan johtaa usein tarvittuja laskusääntöjä γ-matriisien jälkien laskemiseen [6, s. 805],

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}[1_{4\times 4}] &= 4, \\ \mathrm{Tr}[\text{pariton lkm } \gamma\text{-matriiseja}] &= 0, \\ \mathrm{Tr}[\gamma^\alpha\gamma^\beta] &= 4g^{\alpha\beta}, \\ \mathrm{Tr}[\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\mu\gamma^\nu] &= 4(g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu} - g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} + g^{\alpha\nu}g^{\beta\mu}). \end{aligned} \tag{37}$$

Myös γ-matriisien keskinäiseen kontraktoimiseen tarvitaan,

$$\begin{aligned} \gamma^\alpha\gamma_\alpha &= 4, \\ \gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma_\alpha &= -2\gamma^\beta, \\ \gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\mu\gamma_\alpha &= 4g^{\beta\mu}, \\ \gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\alpha &= -2\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\beta. \end{aligned} \tag{38}$$



Kuva 36: Kvanttisähködynamiikan (QED) Feynmanin säännöt. Kirjain p on fermionin 4-liikemäärä, m massa ja s spinin z-komponentti. Fotonin 4-liikemäärä on q ja polarisaatio λ. Kirjainyhdistelmä Qe on fermionin sähkövaraus, missä e on alkeisvaraus, u-, c- ja t-kvarkeille $Qe = +\frac{2}{3}e$ sekä d-, s- ja b-kvarkeille $Qe = -\frac{1}{3}e$. Kreikkalaiset kirjaimet μ ja ν ovat Lorentz-indeksejä. Nämä Feynmanin säännöt löytyvät kirjasta [6, s. 801-802].

13.3 Sähkömagneettisen ja vahvan vuorovaikutuksen Feynmanin säännöt

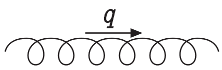
Kuvissa 36 ja 37 on vaikutusalalaskuissa tarvittavat QED:n ja QCD:n Feynmanin säännöt. QCD:n Feynmanin säännöissä esiintyvät vakiot f^{abc} ja värimatriisit ovat yhteydessä toisiinsa

$$[t^a, t^b] = i f^{abc} t^c,$$

missä a, b ja $c = 1, \ldots, 8$. Värimatriisien t^a ja vakioiden f^{abc} numeeriset arvot löytyvät esimerkiksi alkuperäisjulkaisusta [32, s. 1074–1075].

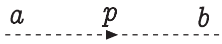
Lisäksi tarvitaan fotonien ja gluonien polarisaatiovektoreille $\epsilon_\alpha(q,\lambda)$, missä q on fotonin tai gluonin 4-liikemäärä ja λ polarisaatio, polarisaatiosummia, jotka

Gluonipropagaattori:



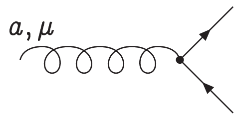
$= \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2+i\epsilon}$

Aavepropagaattori:



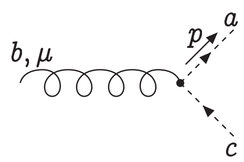
$= \frac{i\delta_{ab}}{p^2+i\epsilon}$

Gluoni–kvarkkiverteksi:



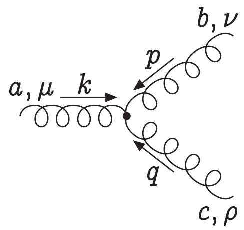
$= ig_S\gamma^\mu t^a$

Aaveverteksi:



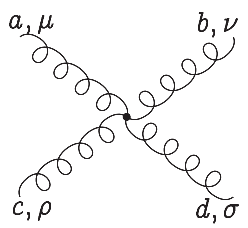
$= -g_S f^{abc} p^\mu$

Kolmen gluonin verteksi:



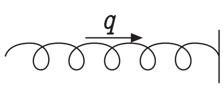
$$= g_S f^{abc}[g^{\mu\nu}(k-p)^\rho + g^{\nu\rho}(p-q)^\mu + g^{\rho\mu}(q-k)^\nu]$$

Neljän gluonin verteksi:



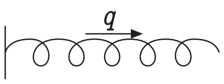
$$\begin{aligned} = -ig_S^2[&f^{abe}f^{cde}(g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) \\ &+ f^{ace}f^{bde}(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) \\ &+ f^{ade}f^{bce}(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})] \end{aligned}$$

Alkutilan gluoni:



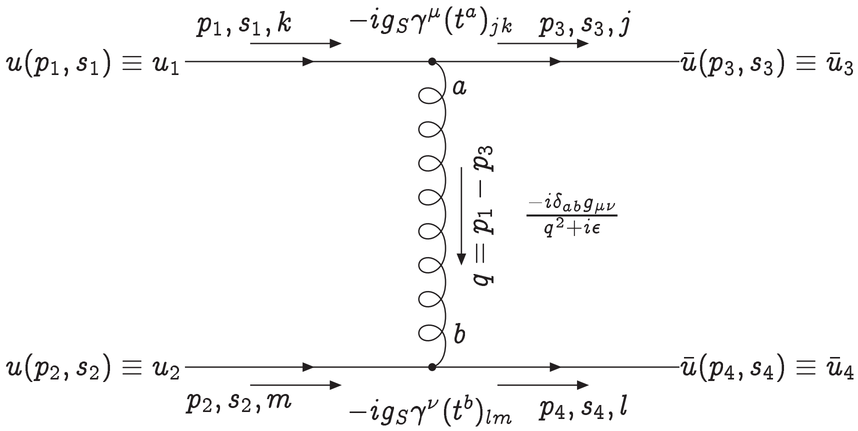
$= \epsilon_\mu(q,\lambda)$

Lopputilan gluoni:



$= \epsilon^*_\mu(q,\lambda)$

Kuva 37: Kvanttiväridynamiikan (QCD) Feynmanin säännöt. Kirjaimet k, p ja q ovat Feynmanin säännöissä esiintyvien hiukkasten 4-liikemäärät ja kirjaimet a, b, c ja d hiukkasten väri-indeksit. Kreikkalaiset kirjaimet μ, ν, ρ ja σ ovat Lorentz-indeksejä. Vahvaa vuorovaikutusta kuvaa vakiosymboli g_S. Muotoa f^{abc} olevat kirjainyhdistelmät ovat vahvan vuorovaikutuksen SU(3)-värialgebraan liittyvät rakennevakiot, ja t^a on värimatriisi. Nämä Feynmanin säännöt ovat kirjasta [6, s. 802-803].



Kuva 38: Kuvassa on sironnan $q_iq_j \to q_iq_j$, ($q_i \neq \bar{q}_i$, $q_i \neq q_j$ ja $q_i, q_j = q$ tai $\bar{q}$), Feynmanin graafi. Kvarkkien 4-liikemäärät ovat p_1, p_2, p_3 ja p_4, sekä vastaavien kvarkkien spinin z-komponentit s_1, s_2, s_3 ja s_4. Kirjaimet j, k, l ja m kuvaavat kvarkkien väri-indeksejä. Graafiin merkityt Feynmanin säännöt löytyvät kuvasta 37.

ovat muotoa

$$\sum_\lambda \epsilon^*_\alpha(q,\lambda)\epsilon_\beta(q,\lambda) = -g_{\alpha\beta}. \tag{39}$$

Käytettäessä polarisaatiosummaa (39) gluoneille tulee huomioida niin sanottujen aavehiukkasten vaikutus laskuihin mikäli lasku sisältää gluonien itseiskytkentöjä. Tämä johtuu vahvan vuorovaikutuksen QCD-teorian perustana olevasta SU(3)-symmetriasta.

13.4 Esimerkki 2–2-prosessin vaikutusalalaskusta

Tässä osassa esitellään taulukossa 1 ensimmäisellä rivillä esiintyvän sironnan $q_iq_j \to q_iq_j$, ($q_i \neq \bar{q}_i$, $q_i \neq q_j$ ja $q_i, q_j = q$ tai $\bar{q}$) vaikutusalalasku $\hat{t}$-kanavan suhteen.

Kuvaan 38 merkittyjen Feynmanin sääntöjen avulla voidaan kirjoittaa kyseisen sironnan sironta-amplitudi

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(q_iq_j \to q_iq_j) &= \bar{u}_3(-ig_S\gamma^\mu(t^a)_{jk})u_1\frac{-i\delta_{ab}g_{\mu\nu}}{q^2+i\epsilon}\bar{u}_4(-ig_S\gamma^\nu(t^b)_{lm})u_2 \\ &= \frac{ig_S^2}{q^2+i\epsilon}(t^a_{jk})(t^a_{lm})\bar{u}_3\gamma^\mu u_1\bar{u}_4\gamma_\mu u_2 \\ &= \frac{ig_S^2}{\hat{t}}(t^a_{jk})(t^a_{lm})\bar{u}_3\gamma^\mu u_1\bar{u}_4\gamma_\mu u_2, \end{aligned} \tag{40}$$

jossa sijoitetaan $q^2 = (p_1 - p_3)^2 = \hat{t}$, ja annetaan gluonipropagaattorin $\epsilon \to 0$. Sironta-amplitudissa (40) yhteydessä oletetaan implisiittisesti summaus gluonin värin a yli, $a = 1, \ldots, 8$.

Vaikutusalan laskemiseksi tarvitaan sironta-amplitudin (40) kompleksikonjugaattia, joka on

$$\mathcal{M}^*(q_i q_j \to q_i q_j) = \frac{-ig_S^2}{\hat{t}}(t^b_{kj})(t^b_{ml})\bar{u}_2\gamma_\alpha u_4\bar{u}_1\gamma^\alpha u_3, \tag{41}$$

koska auki kirjoitettuna

$$\begin{aligned}
(\bar{u}_3\gamma^\alpha u_1\bar{u}_4\gamma_\alpha u_2)^* &= (\bar{u}_3\gamma^\alpha u_1\bar{u}_4\gamma_\alpha u_2)^\dagger \\
&= (u_3^\dagger\gamma^0\gamma^\alpha u_1 u_4^\dagger\gamma^0\gamma_\alpha u_2)^\dagger \\
&= u_2^\dagger\gamma_\alpha^\dagger\gamma^{0\dagger}(u_4^\dagger)^\dagger u_1^\dagger\gamma^{\alpha\dagger}\gamma^{0\dagger}(u_3^\dagger)^\dagger \\
&= u_2^\dagger\gamma^0\gamma_\alpha\gamma^0\gamma^0 u_4 u_1^\dagger\gamma^0\gamma^\alpha\gamma^0\gamma^0 u_3 \\
&= \bar{u}_2\gamma_\alpha u_4\bar{u}_1\gamma^\alpha u_3.
\end{aligned}$$

Edellä tarvittiin γ-matriisien ominaisuuksia $\gamma_\alpha^\dagger = \gamma^0\gamma_\alpha\gamma^0$, $\gamma^{0\dagger} = \gamma^0$ ja $\gamma^0\gamma^0 = 1_{4\times4}$.

Kertomalla sironta-amplitudi (41) ja tämän kompleksikonjugaatti (42) keskenään saadaan sironta-amplitudin neliö, joka on

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}(q_i q_j \to q_i q_j)|^2 &= \mathcal{M}^*(q_i q_j \to q_i q_j)\mathcal{M}(q_i q_j \to q_i q_j) \\
&= (t^b_{kj}t^b_{ml})(t^a_{jk}t^a_{lm})\frac{g_S^4}{\hat{t}^2}(\bar{u}_2)_n(\gamma_\alpha)_{no}(u_4)_o(\bar{u}_1)_p(\gamma^\alpha)_{pq}(u_3)_q \\
&\cdot\ (\bar{u}_3)_r(\gamma^\mu)_{rs}(u_1)_s(\bar{u}_4)_t(\gamma_\mu)_{tu}(u_2)_u,
\end{aligned} \tag{42}$$

missä alaindeksit $n, o, \ldots u = 1, \ldots, 4$ ovat apumerkintä kvarkkien spinorien ja γ-matriisien komponenteille.

Sironta-amplitudin neliöstä (42) keskiarvoistamalla alkutilan kvarkkien värit ja spinien z-komponentit sekä summaamalla lopputilan kvarkkien värit ja spinien z-komponentit saadaan

$$\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}(q_iq_j \to q_iq_j)|^2} &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sum_{\substack{j,k\\l,m}}\sum_{\substack{s_1,s_2\\s_3,s_4}}|\mathcal{M}(q_iq_j \to q_iq_j)|^2 \\
&= C\frac{g_S^4}{4\hat{t}^2}\sum_{\substack{s_1,s_2\\s_3,s_4}}(\bar{u}_2)_n(\gamma_\alpha)_{no}(u_4)_o(\bar{u}_1)_p(\gamma^\alpha)_{pq}(u_3)_q \\
&\cdot\ (\bar{u}_3)_r(\gamma^\mu)_{rs}(u_1)_s(\bar{u}_4)_t(\gamma_\mu)_{tu}(u_2)_u \\
&= C\frac{g_S^4}{4\hat{t}^2}\sum_{s_2}(u_2)_u(\bar{u}_2)_n(\gamma_\alpha)_{no}\sum_{s_4}(u_4)_o(\bar{u}_4)_t(\gamma_\mu)_{tu} \\
&\cdot\ \sum_{s_1}(u_1)_s(\bar{u}_1)_p(\gamma^\alpha)_{pq}\sum_{s_3}(u_3)_q(\bar{u}_3)_r(\gamma^\mu)_{rs} \\
&= C\frac{g_S^4}{4\hat{t}^2}(\not{p}_2+m_{q_j})_{un}(\gamma_\alpha)_{no}(\not{p}_4+m_{q_j})_{ot}(\gamma_\mu)_{tu} \\
&\cdot\ (\not{p}_1+m_{q_i})_{sp}(\gamma^\alpha)_{pq}(\not{p}_3+m_{q_i})_{qr}(\gamma^\mu)_{rs} \\
&\approx C\frac{g_S^4}{4\hat{t}^2}(\not{p}_2)_{un}(\gamma_\alpha)_{no}(\not{p}_4)_{ot}(\gamma_\mu)_{tu}(\not{p}_1)_{sp}(\gamma^\alpha)_{pq}(\not{p}_3)_{qr}(\gamma^\mu)_{rs} \\
&= C\frac{g_S^4}{4\hat{t}^2}\mathrm{Tr}[\not{p}_2\gamma_\alpha\not{p}_4\gamma_\mu]\cdot\mathrm{Tr}[\not{p}_1\gamma^\alpha\not{p}_3\gamma^\mu] \\
&= C\frac{4g_S^4}{\hat{t}^2}[p_{2\alpha}p_{4\mu}+p_{4\alpha}p_{2\mu}-(p_2\cdot p_4)g_{\alpha\mu}][p_1^\alpha p_3^\mu+p_3^\alpha p_1^\mu-(p_1\cdot p_3)g^{\alpha\mu}] \\
&= C\frac{4g_S^4}{\hat{t}^2}[2(p_1\cdot p_2)(p_3\cdot p_4)+2(p_1\cdot p_4)(p_2\cdot p_3)] \\
&= 2Cg_S^4\frac{\hat{s}^2+\hat{u}^2}{\hat{t}^2}. \qquad (43)
\end{aligned}$$

Yhtälössä (43) tarvittiin polarisaatiosummia (35), γ-matriisien jälkien kaavoja (37) ja Mandelstamin muuttujia (12). Kaavassa oletetaan myös kaikki kvarkit massattomiksi, eli $m_{q_i} \approx m_{q_j} \approx 0$. Keskiarvoistetussa sirontamatriisielementin neliössä (43) esiintyvä väritekijä

$$\begin{aligned}
C &= \frac{1}{9}\sum_{a,b=1}^{8}\sum_{\substack{j,k\\l,m}}(t^b_{kj}t^b_{ml})(t^a_{jk}t^a_{lm}) \\
&= \frac{1}{9}\sum_{a,b=1}^{8}(\sum_{j,k}t^b_{kj}t^a_{jk})(\sum_{l,m}t^b_{ml}t^a_{lm}) \\
&= \frac{1}{9}\sum_{a,b=1}^{8}\mathrm{Tr}[t^bt^a]\mathrm{Tr}[t^bt^a] = \frac{1}{9}\sum_{a,b=1}^{8}\frac{1}{2}\delta^{ab}\frac{1}{2}\delta^{ab} \\
&= \frac{1}{36}\sum_{a=1}^{8}\delta^{aa} = \frac{1}{36}\mathrm{Tr}[1_{8\times 8}] = \frac{2}{9}.
\end{aligned}$$

Sironnan $q_iq_j \to q_iq_j$ vaikutusala $\hat{t}$-kanavan suhteen, merkitsemällä $\alpha_s = g_s^2/4\pi$, on siten

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\hat{\sigma}}{\mathrm{d}\hat{t}}^{q_iq_j\to q_iq_j}(\hat{s},\hat{t},\hat{u}) &= \frac{\overline{|\mathcal{M}(q_iq_j \to q_iq_j)|^2}}{16\pi\hat{s}^2} \\
&= \frac{4}{9}\frac{\pi\alpha_S^2}{\hat{s}^2}\frac{\hat{s}^2+\hat{u}^2}{\hat{t}^2}.
\end{aligned} \tag{44}$$

Taulukossa 1 esiintyvien loppujen seitsemän aliprosessin vaikutusalalaskut ovat saman tapaisia kuin edellä laskettu vaikutusala (44). Kuitenkin lopuissa seitsemässä sironnassa laskettavia graafeja sirontaa kohti on lähtökohtaisesti useampia ja etenkin gluonien itseiskytkentägraafeja, jotka tekevät vaikutusalalaskut työläämmiksi. Kaikkien kahdeksan partonitason 2–2-sirontojen vaikutusalat löytyvät esimerkiksi julkaisusta [8, s. 1513].

13.5 Gaussin integrointimenetelmä käytännössä

Ohjelmassa käytetty integrointimenetelmä perustuu numeeriseen Gaussin integrointimenetelmään. Fragmentaation kautta syntyvien fotonien vaikutusalaa (18) laskettaessa joudutaan käytännössä laskemaan numeerisesti kolmiulotteinen integraali: ensimmäinen integraali rapiditeetin y_4 yli, toinen fragmentaatioenergian osuuden z yli ja viimeinen fotonin rapiditeetin y_γ yli. Vastaavasti nopeiden fotonien vaikutusalaa (22) laskettaessa täytyy laskea kaksiulotteinen integraali lopputilan partonin rapiditeetin y_4 ja fotonin rapiditeetin y_γ yli.

Tarkka kuvaus yksiulotteisesta Gaussin menetelmästä löytyy erikoistyöstä [4, s. 22–23] sekä kirjasta [21, s. 1005–1007]. Käytännössä Gaussin integrointimenetelmä perustuu Legendren polynomien $P_\ell(x)$ ortogonaalisuuteen välillä $-1 \leq x \leq 1$. Ensimmäiseksi numeerista integraalia laskettaessa täytyy integraali $\int_a^b \mathrm{d}x f(x)$ muuttaa välille $-1 \leq x \leq 1$ tapahtuvaksi. Tämä onnistuu muuttujan vaihdolla

$$z = \frac{2x-b-a}{b-a},$$

jolloin integraali tulee muotoon

$$\int_a^b \mathrm{d}x f(x) = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^1 \mathrm{d}z f(z).$$

Kun integraali on muutettu $[-1,1]$ välillä laskettavaksi, niin approksimaatio alkuperäiselle integraalille saadaan n:nnen kertaluvun Legendren polynomien $P_n(x_i) = 0$ nollakohtien x_i, $i = 1,\ldots n$, avulla. Alkuperäiselle integraalille on tällöin [21, s. 1006]

$$\int_a^b \mathrm{d}x f(x) \approx \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i),$$

missä painokertoimet

$$w_i = \frac{2}{(1-x_i^2)|P_n'(x_i)|^2}.$$

Vaikutusalojen (18) ja (22) integrointeihin käytetty integrointirutiini löytyy CERN:in MATHLIB-aliohjelmakirjastosta viitteellä D110[33]. MATHLIB-aliohjelmakirjasto on ladattavissa internetosoitteesta [34]. Integrointirutiinilla D110 voidaan laskea numeerisesti maksimissaan 6-ulotteisia integraaleja, joiden sisempien integraalien integrointirajoissa voi olla ulompien integraalien integrointimuuttujia. Symbolisesti integrointirutiinilla D110 laskettavat integraalit ovat muotoa

$$I_n = \int_{a_n}^{b_n} \mathrm{d}x_n \phi_n(x_n) \int_{a_{n-1}(x_n)}^{b_{n-1}(x_n)} \mathrm{d}x_{n-1}\phi_{n-1}(x_n, x_{n-1}) \cdots \int_{a_1(x_2,\ldots,x_n)}^{b_1(x_2,\ldots,x_n)} \mathrm{d}x_1 \phi_1(x_1,\ldots,x_n),$$

missä $1 \leq n \leq 6$, $x_1, \ldots, x_n$ ovat integrointimuuttujat, sisemmät integrointirajat a_i ja b_i voivat sisältää myös ulompien integraalien integrointimuuttujia, ja funktiot $\phi_1, \ldots, \phi_n$ ovat kunkin integrointimuuttujan integrandeja.

13.6 Ohjelman tärkeimmät moduulit

Tässä osiossa on suorien fotonien vaikutusalojen (18) ja (22) numeeriseen laskemiseen tarvittavat tärkeimmät ohjelman osaset. Ohjelma on tarkoituksellisesti jaettu pienempiin osiin, moduuleihin, joiden testaaminen on helppoa ja ohjelman rakenne pysyy selkeänä. Ohjelman kirjoittamisessa on pyritty selkeyteen, eikä nyt kirjoitettu ohjelma suinkaan ole kompaktein mahdollinen.

Moduuli ”globals” sisältää globaaleja muuttujia, joita käytännössä tarvitaan useissa kohdin laskentaprosessia, tai vastaavasti muuttujia, joiden välittäminen aliohjelmille on käytännöllisintä globaalisti.

```
! Kuvaus:
! Moduuli globaaleille muuttujille.
!-------------------------------------------------------------
! integer npdf             =  98 for EKS98
!                              8 for EPS08
!                              9 for EPS09
! integer order            =   1 LO EPS09
! integer pset             =   1,...,31 EPS09 set
!
! double precision qT      = fotonin poikittaisliikemäärä
! double precision A1      = ytimen A_1 massaluku
! double precision Z1      = ytimen A_1 protoniluku
! double precision A2      = ytimen A_2 massaluku
! double precision Z2      = ytimen A_2 protoniluku
! double precision SQRTS   = ytimien A_1 ja A_2 kiihdytysenergia
! double precision X(3)    = vektori, joka sisältää
!                            X(1) fotonin rapiditeetti
!                            X(2) toissijaisen partonin rapiditeetti
!                            X(3) fotonin energiaosuus z
module globals

  implicit none
```

```
  integer :: npdf, order, pset
  double precision :: qT, A1, Z1, A2, Z2
  double precision, save :: SQRTS
  double precision, DIMENSION(:) :: X(3)

end module globals
```

Moduuli ”constants” sisältää vakioita, joita tarvitaan vaikutusalojen laskemiseksi, sekä muuntokertoimia, joilla vaikutusaloihin voidaan tehdä yksikkömuunnoksia.

```
module constants

  implicit none

  double precision :: pii, alfaQED, mbGeV, pbGeV, nbGeV

!
!    double precision pii     = ympyrän kehän ja halkaisijan suhde
!    double precision alfaQED = QED:n kytkinvakio
!    double precision mbGeV   = muunnoskerroin (h_bar*c)^2 = 0.389379304 GeV^2 mbarn
!    double precision pbGeV   = muunnoskerroin (h_bar*c)^2 = 389379304.0 GeV^2 pbarn
!    double precision nbGeV   = muunnoskerroin (h_bar*c)^2 = 389379.3040 GeV^2 nbarn
!

  parameter ( pii = 3.141592653589793238d0,alfaQED = 7.2973525376d-3,&
              mbGeV = 0.3893793036d0,pbGeV = 389379303.6d0,&
              nbGeV = 389379.3036d0 )

  contains

!
!    Funktioaliohjelma laskee QCD:n kytkinvakion arvoja annetulla energialla.
!
!    double precision qq = energia QCD:n kytkinvakion laskemiseksi
!
  function alfaQCD(qq)
    implicit none
    intrinsic DLOG
    double precision :: alfaQCD, qq, lambdaNF, Nf
    lambdaNf = 0.165d0
    Nf = 5.0d0
    if ( qq < 4.5d0 ) then
      lambdaNf = 0.215d0
      Nf = 4.0d0
    end if
    alfaQCD = (12.0d0*pii)/((33.0d0-2.0d0*Nf)*DLOG((qq*qq)/(lambdaNf*lambdaNf)))
    return
  end function alfaQCD

end module constants
```

Moduulin ”x1x2fractions” avulla lasketaan ytimistä A_1 ja A_2 peräisin olevien partonien liikemääräosuudet x_1 ja x_2 (11).

```
! Kuvaus:
! Moduuli liikemääräosuuksien x_1 ja x_2 laskemiseksi.
!-----------------------------------------------------------------
module x1x2fractions
  use globals
```

```
  implicit none

  contains

!-----------------------------------------------------------------
! Kuvaus:
! Funktioaliohjelma, jolla lasketaan liikemääräosuus x_1.
!-----------------------------------------------------------------
!
! double precision Y(3)    = kolme komponenttinen vektori,jossa
!                            Y(1) fotonin rapiditeetti
!                            Y(2) toissijaisen partonin rapiditeetti
!                            Y(3) fotonin energiaosuus z
!
  function x1(Y)
    implicit none
    intrinsic DEXP
    double precision :: x1
    double precision, DIMENSION(:) :: Y(3)
    x1 = MIN(1.0d0,((qT/(Y(3)*SQRTS))*(dexp(Y(1)) + dexp(Y(2)))))
    return
  end function x1


!-----------------------------------------------------------------
! Kuvaus:
! Funktioaliohjelma, jolla lasketaan liikemääräosuus x_2.
!-----------------------------------------------------------------
! double precision Y(3)    = kolme komponenttinen vektori,jossa
!                            Y(1) fotonin rapiditeetti
!                            Y(2) toissijaisen partonin rapiditeetti
!                            Y(3) fotonin energiaosuus z
!
  function x2(Y)
    implicit none
    intrinsic DEXP
    double precision :: x2
    double precision, DIMENSION(:) :: Y(3)
    x2 = MIN(1.0d0,((qT/(Y(3)*SQRTS))*(dexp(-Y(1)) + dexp(-Y(2)))))
    return
  end function x2

end module x1x2fractions
```

Moduulin ”partons” avulla lasketaan ytimien A_1 ja A_2 ydinpartonijakaumat, jotka ovat muotoa (24).

```
! Kuvaus:
! Moduuli partonijakaumien käsittelyyn.
!-----------------------------------------------------------------
module partons
  use globals
  use x1x2fractions

  implicit none

  contains

!-----------------------------------------------------------------
! Kuvaus:
! Aliohjelma laskee (ydin)partonijakaumat ytimille A_1 ja A_2.
!-----------------------------------------------------------------
! double precision gx1 = gluonijakauma ytimestä A_1
```

```
! double precision gx2 = gluonijakauma ytimestä A_2
! .
! .
! .
! double precision bbarx2 = bbar-kvarkkijakauma ytimestä A_2
!
! Partonijakaumien pohjana on protonin partonijakaumat
! CTEQ6L1-jakaumat versio 6.6.
!
  subroutine initialpartons(gx1,gx2,ux1,ux2,dx1,dx2,sx1,sx2,cx1,cx2,bx1,bx2,&
                 ubarx1,ubarx2,dbarx1,dbarx2,sbarx1,sbarx2,cbarx1,cbarx2,bbarx1,bbarx2)
    implicit none
    double precision :: gx1,gx2,...,bbarx2,ruv1,rdv1,ru1,rd1,rs1,rc1,rb1,rt1,rg1,&
                        ruv2,rdv2,ru2,rd2,rs2,rc2,rb2,rt2,rg2,Ctq6Pdf

    call SetCtq6(4)
    ruv1=1.0d0
    rdv1=1.0d0
    .
    .
    .
    rg2=1.0d0
    if (npdf == 98) then
      call eks98(x1(X),qT/X(3),A1,ruv1,rdv1,ru1,rd1,rs1,rc1,rb1,rt1,rg1)
      call eks98(x2(X),qT/X(3),A2,ruv2,rdv2,ru2,rd2,rs2,rc2,rb2,rt2,rg2)
    else if (npdf == 8) then
      call eps08(x1(X),qT/X(3),A1,ruv1,rdv1,ru1,rd1,rs1,rc1,rb1,rt1,rg1)
      call eps08(x2(X),qT/X(3),A2,ruv2,rdv2,ru2,rd2,rs2,rc2,rb2,rt2,rg2)
    else if (npdf == 9 .AND. A1 .NE. 1.0d0 .AND. A1 .NE. 2.0d0 &
                       .AND. A2 .NE. 1.0d0 .AND. A2 .NE. 2.0d0) then
      call EPS09(order,pset,INT(A1),x1(X),qT/X(3),ruv1,rdv1,ru1,rd1,rs1,rc1,rb1,rg1)
      call EPS09(order,pset,INT(A2),x2(X),qT/X(3),ruv2,rdv2,ru2,rd2,rs2,rc2,rb2,rg2)
    else if (npdf == 9 .AND. A1 .NE. 1.0d0 .AND. A1 .NE. 2.0d0) then
      call EPS09(order,pset,INT(A1),x1(X),qT/X(3),ruv1,rdv1,ru1,rd1,rs1,rc1,rb1,rg1)
    else if (npdf == 9 .AND. A2 .NE. 1.0d0 .AND. A2 .NE. 2.0d0) then
      call EPS09(order,pset,INT(A2),x2(X),qT/X(3),ruv2,rdv2,ru2,rd2,rs2,rc2,rb2,rg2)
    end if

    gx1 = (Z1*rg1*Ctq6Pdf (0, x1(X), qT/X(3)) + (A1-Z1)*rg1*Ctq6Pdf (0, x1(X), qT/X(3)))/A1
    gx2 = (Z2*rg2*Ctq6Pdf (0, x2(X), qT/X(3)) + (A2-Z2)*rg2*Ctq6Pdf (0, x2(X), qT/X(3)))/A2
          .
          .
          .
    bbarx2 = (Z2*rb2*Ctq6Pdf (-5, x2(X), qT/X(3)) + (A2-Z2)*rb2*Ctq6Pdf (-5, x2(X), qT/X(3)))/A2
  end subroutine initialpartons

end module partons
```

Alkutilassa vuorovaikuttavien partonien käsittelyyn on moduuli "ijpartons", joka laskee kaikki mahdolliset kombinaatiot $x_1 f_{\mathrm{i}}^{\mathrm{A}_1}(x_1, Q^2) x_2 f_{\mathrm{j}}^{\mathrm{A}_2}(x_2, Q^2)$. Kaikkiaan alkutilan partoneiden eri kombinaatioita on 121 kappaletta.

```
module ijpartons
  use globals
  use x1x2fractions
  use partons

  implicit none

  contains

  subroutine collidingpartons(gg,gu,gubar,gd,gdbar,gs,gsbar,gc,gcbar,gb,gbbar,ug,ubarg,&
```

```
                              dg,dbarg,sg,sbarg,cg,cbarg,bg,bbarg,uu,uubar,ud,udbar,&
                              us,usbar,uc,ucbar,ub,ubbar,ubaru,du,dbaru,su,sbaru,&
                              cu,cbaru,bu,bbaru,ubarubar,ubard,ubardbar,ubars,ubarsbar,&
                              ubarc,ubarcbar,ubarb,ubarbbar,dubar,dbarubar,subar,sbarubar,&
                              cubar,cbarubar,bubar,bbarubar,dd,ddbar,ds,dsbar,dc,dcbar,db,&
                              dbbar,dbard,sd,sbard,cd,cbard,bd,bbard,dbardbar,dbars,dbarsbar,&
                              dbarc,dbarcbar,dbarb,dbarbbar,sdbar,sbardbar,cdbar,cbardbar,&
                              bdbar,bbardbar,ss,ssbar,sc,scbar,sb,sbbar,sbars,cs,cbars,bs,&
                              bbars,sbarsbar,sbarc,sbarcbar,sbarb,sbarbbar,csbar,cbarsbar,&
                              bsbar,bbarsbar,cc,ccbar,cb,cbbar,cbarc,bc,bbarc,cbarcbar,cbarb,&
                              cbarbbar,bcbar,bbarcbar,bb,bbbar,bbarb,bbarbbar)
    implicit none
    double precision :: gx1,gx2,...,bbarx2,gg,gu,...,bbarbbar

    call initialpartons(gx1,gx2,...,bbarx2)

    gg = x1(X)*gx1*x2(X)*gx2
    gu = x1(X)*gx1*x2(X)*ux2
          .
          .
          .
    bbarbbar = x1(X)*bbarx1*x2(X)*bbarx2

  end subroutine collidingpartons

end module ijpartons
```

Moduulin ”’mandelstam” tehtävä on laskea Mandelstamin muuttujat (12) integrointimuuttujien avulla.

```
! Kuvaus:
! Moduuli Mandelstamin muuttujien ŝ, t̂ ja û laskemiseksi.
!----------------------------------------------------------------------
module mandelstam
  use globals
  use x1x2fractions

  implicit none

  contains

  function s_hat(Y)
    implicit none
    double precision :: s_hat
    double precision, DIMENSION(:) :: Y(3)
    s_hat = x1(Y)*x2(Y)*SQRTS*SQRTS
    return
  end function s_hat

  function t_hat(Y)
    implicit none
    double precision :: t_hat
    double precision, DIMENSION(:) :: Y(3)
    intrinsic dexp
    t_hat = -x1(Y)*(qT/Y(3))*SQRTS*dexp(-Y(1))
    return
  end function t_hat

  function u_hat(Y)
    implicit none
    double precision :: u_hat
    double precision, DIMENSION(:) :: Y(3)
    intrinsic dexp
```

```
    u_hat = -x2(Y)*(qT/Y(3))*SQRTS*dexp(Y(1))
    return
  end function u_hat

end module mandelstam
```

Moduuli ”subprocess” sisältää partonitason sironnat $\frac{\mathrm{d}\hat{\sigma}}{\mathrm{d}\hat{t}}(\hat{s},\hat{t},\hat{u})$ ja $\frac{\mathrm{d}\hat{\sigma}}{\mathrm{d}\hat{t}}(\hat{s},\hat{u},\hat{t})$ taulukon 1 fragmentaatioprosesseille kuin myös taulukon 2 nopeille prosesseille.

```
module subprocess
  use globals
  use constants
  use x1x2fractions
  use mandelstam

  implicit none

  contains

! Nopeat prosessit QCD-Compton ja annihilaatio.
  function uc_qqbar_stu(Y)
    implicit none
    double precision :: uc_qqbar_stu
    double precision, DIMENSION(:) :: Y(3)
    uc_qqbar_stu = (alfaQCD(qT/Y(3))*alfaQED*(4.0d0/9.0d0)/(s_hat(Y)*s_hat(Y)))*(8.0d0/9.0d0)*&
                   ((t_hat(Y)*t_hat(Y)+u_hat(Y)*u_hat(Y))/(u_hat(Y)*t_hat(Y)))
    return
  end function uc_qqbar_stu

  function uc_qqbar_sut(Y)
    implicit none
    double precision :: uc_qqbar_sut
    double precision, DIMENSION(:) :: Y(3)
    uc_qqbar_sut = uc_qqbar_stu(Y)
    return
  end function uc_qqbar_sut

 .
 .
 .

  function dsb_qg_sut(Y)
    implicit none
    double precision :: dsb_qg_sut
    double precision, DIMENSION(:) :: Y(3)
    dsb_qg_sut = (alfaQCD(qT/Y(3))*alfaQED*(1.0d0/9.0d0)/(s_hat(Y)*s_hat(Y)))*(-1.0d0/3.0d0)*&
                 ((u_hat(Y)*u_hat(Y)+s_hat(Y)*s_hat(Y))/(s_hat(Y)*u_hat(Y)))
    return
  end function dsb_qg_sut

! Fragmentaatioprosessit 8:aa eri tyyppiä.
  function qiqjtoqiqj_stu(Y)
    implicit none
    double precision :: qiqjtoqiqj_stu
    double precision, DIMENSION(:) :: Y(3)
    qiqjtoqiqj_stu = (alfaQCD(qT/Y(3))*alfaQCD(qT/Y(3))/(s_hat(Y)*s_hat(Y)))*(4.0d0/9.0d0)*&
                     ((s_hat(Y)*s_hat(Y)+u_hat(Y)*u_hat(Y))/(t_hat(Y)*t_hat(Y)))
    return
  end function qiqjtoqiqj_stu

  function qiqjtoqiqj_sut(Y)
    implicit none
    double precision :: qiqjtoqiqj_sut
```

```
    double precision, DIMENSION(:) :: Y(3)
    qiqjtoqiqj_sut = (alfaQCD(qT/Y(3))*alfaQCD(qT/Y(3))/(s_hat(Y)*s_hat(Y)))*(4.0d0/9.0d0)*&
                     ((s_hat(Y)*s_hat(Y)+t_hat(Y)*t_hat(Y))/(u_hat(Y)*u_hat(Y)))
    return
  end function qiqjtoqiqj_sut

 .
 .
 .

  function ggtogg_stu(Y)
    implicit none
    double precision :: ggtogg_stu
    double precision, DIMENSION(:) :: Y(3)
    ggtogg_stu = (alfaQCD(qT/Y(3))*alfaQCD(qT/Y(3))/(s_hat(Y)*s_hat(Y)))*(9.0d0/2.0d0)*&
                 (3.0d0-((u_hat(Y)*t_hat(Y))/(s_hat(Y)*s_hat(Y)))-&
                        ((u_hat(Y)*s_hat(Y))/(t_hat(Y)*t_hat(Y)))-&
                        ((s_hat(Y)*t_hat(Y))/(u_hat(Y)*u_hat(Y))))
    return
  end function ggtogg_stu

  function ggtogg_sut(Y)
    implicit none
    double precision :: ggtogg_sut
    double precision, DIMENSION(:) :: Y(3)
    ggtogg_sut = ggtogg_stu(Y)
    return
  end function ggtogg_sut

end module subprocess
```

Fotonien BFG-fragmentaatiofunktioiden [19] käsittelyyn on moduuli ”fragmentation”, fragmentaatiofunktiot sisältävät sekä häiröteoreettisen että ei-häiriöteoreettisen osuuden.

```
! Module for fragmentation functions.
module fragmentation
  use globals

  implicit none

  contains

!
! Aliohjelma fotonien fragmentaatiofunktioille.
!

  subroutine fragfunctions(fragDg,fragDu,fragDd,fragDs,fragDc,fragDb)
    implicit none
    double precision :: fragDg,fragDu,fragDd,fragDs,fragDc,fragDb,&
                        fragDgP,fragDuP,fragDdP,fragDsP,fragDcP,fragDbP,&
                        fragDgNP,fragDuNP,fragDdNP,fragDsNP,fragDcNP,fragDbNP
    fragDg = 1.0d0
    fragDu = 1.0d0
    fragDd = 1.0d0
    fragDs = 1.0d0
    fragDc = 1.0d0
    fragDb = 1.0d0
    call distributionPert(X(3),qT*qT,'GL',fragDgP)
    call distributionPert(X(3),qT*qT,'UP',fragDuP)
    call distributionPert(X(3),qT*qT,'DO',fragDdP)
    call distributionPert(X(3),qT*qT,'SB',fragDsP)
```

```
    call distributionPert(X(3),qT*qT,'CB',fragDcP)
    call distributionPert(X(3),qT*qT,'BB',fragDbP)
    call distributionNonPert_setI(X(3),qT*qT,'GL',fragDgNP)
    call distributionNonPert_setI(X(3),qT*qT,'UP',fragDuNP)
    call distributionNonPert_setI(X(3),qT*qT,'DO',fragDdNP)
    call distributionNonPert_setI(X(3),qT*qT,'SB',fragDsNP)
    call distributionNonPert_setI(X(3),qT*qT,'CB',fragDcNP)
    call distributionNonPert_setI(X(3),qT*qT,'BB',fragDbNP)

    fragDg = fragDgP+fragDgNP
    fragDu = fragDuP+fragDuNP
    fragDd = fragDdP+fragDdNP
    fragDs = fragDsP+fragDsNP
    fragDc = fragDcP+fragDcNP
    fragDb = fragDbP+fragDbNP
  end subroutine fragfunctions

end module fragmentation
```

Moduulissa ”klpartons” yhdistyy kahdeksan aliprosessia fotonin fragmentaatiofunktioihin.

```
module klpartons
  use globals
  use subprocess
  use fragmentation

  implicit none

  contains

  subroutine klfragmentation(stu1u,stu1d,stu1s,stu1c,stu1b,sut1u,sut1d,sut1s,sut1c,sut1b,&
                             stu2u,stu2d,stu2s,stu2c,stu2b,sut2u,sut2d,sut2s,sut2c,sut2b,&
                             stu3u,stu3d,stu3s,stu3c,stu3b,sut3u,sut3d,sut3s,sut3c,sut3b,&
                             stu4u,stu4d,stu4s,stu4c,stu4b,sut4u,sut4d,sut4s,sut4c,sut4b,&
                             stu6u,stu6d,stu6s,stu6c,stu6b,sut6u,sut6d,sut6s,sut6c,sut6b,&
                             stu7u,stu7d,stu7s,stu7c,stu7b,sut7u,sut7d,sut7s,sut7c,sut7b,&
                             stu7g,sut7g,stu5g,sut5g,stu8g,sut8g)
    implicit none
    double precision :: fragDg,fragDu,fragDd,fragDs,fragDc,fragDb,&
                        stu1u,stu1d,...,sut8g

    call fragfunctions(fragDg,fragDu,fragDd,fragDs,fragDc,fragDb)

    stu1u = qiqjtoqiqj_stu(X)*fragDu
    stu1d = qiqjtoqiqj_stu(X)*fragDd
    .
    .
    .
    sut8g = ggtogg_sut(X)*fragDg

  end subroutine klfragmentation

end module klpartons
```

Moduuli ”integrand” sisältää nopeiden fotonien (22) vaikutusalakaavan integrandin, johon viitataan muuttujalla ”lodir”. Fragmentaatiofotonien vaikutusalan (18) integrandi on jaettu 2–2-aliprosessien mukaisiin kahdeksaan osaan, joihin viitataan muuttujilla ”ijkl1”,...,”ijkl8”.

```
module integrand
  use globals
  use subprocess
  use ijpartons
  use klpartons

  implicit none

  contains

  subroutine integrandfunction(lodir,ijkl1,ijkl2,ijkl3,ijkl4,ijkl5,ijkl6,ijkl7,ijkl8)

    implicit none
    double precision :: lodir,ijkl1,ijkl2,ijkl3,ijkl4,ijkl5,ijkl6,ijkl7,ijkl8,&
                        stu1u,stu1d,...,sut8g,&
                        gg,gu,...,bbarbbar


    call collidingpartons(gg,gu,...,bbarbbar)

    call klfragmentation(stu1u,stu1d,...,sut8g)

    lodir = uubar*uc_qqbar_stu(X)+ubaru*uc_qqbar_sut(X)+&
            ccbar*uc_qqbar_stu(X)+cbarc*uc_qqbar_sut(X)+&
            .
            .
            .
            bbarg*dsb_qg_stu(X)+gbbar*dsb_qg_sut(X)

    ijkl1 = ud*(stu1u+sut1d)+du*(sut1u+stu1d)+&
            us*(stu1u+sut1s)+su*(sut1u+stu1s)+&
            .
            .
            .
            cbarbbar*(stu1c+sut1b)+bbarcbar*(sut1c+stu1b)

    ijkl2 = 0.25d0*(uu*(stu2u+sut2u)+ubarubar*(stu2u+sut2u)+&
                    dd*(stu2d+sut2d)+dbardbar*(stu2d+sut2d)+&
                    ss*(stu2s+sut2s)+sbarsbar*(stu2s+sut2s)+&
                    cc*(stu2c+sut2c)+cbarcbar*(stu2c+sut2c)+&
                    bb*(stu2b+sut2b)+bbarbbar*(stu2b+sut2b))

    ijkl3 = uubar*(stu3d+sut3d)+ubaru*(stu3d+sut3d)+&
            uubar*(stu3s+sut3s)+ubaru*(stu3s+sut3s)+&
            .
            .
            .
            bbbar*(stu3u+sut3u)+bbarb*(stu3u+sut3u)

    ijkl4 = uubar*(stu4u+sut4u)+ubaru*(stu4u+sut4u)+&
            ddbar*(stu4d+sut4d)+dbard*(stu4d+sut4d)+&
            ssbar*(stu4s+sut4s)+sbars*(stu4s+sut4s)+&
            ccbar*(stu4c+sut4c)+cbarc*(stu4c+sut4c)+&
            bbbar*(stu4b+sut4b)+bbarb*(stu4b+sut4b)

    ijkl5 = 0.5d0*(uubar*(stu5g+sut5g)+ubaru*(stu5g+sut5g)+&
                   ddbar*(stu5g+sut5g)+dbard*(stu5g+sut5g)+&
                   ssbar*(stu5g+sut5g)+sbars*(stu5g+sut5g)+&
                   ccbar*(stu5g+sut5g)+cbarc*(stu5g+sut5g)+&
                   bbbar*(stu5g+sut5g)+bbarb*(stu5g+sut5g))

    ijkl6 = 0.5d0*(gg*(stu6u+sut6u)+gg*(stu6u+sut6u)+&
                   gg*(stu6d+sut6d)+gg*(stu6d+sut6d)+&
                   gg*(stu6s+sut6s)+gg*(stu6s+sut6s)+&
```

```
                  gg*(stu6c+sut6c)+gg*(stu6c+sut6c)+&
                  gg*(stu6b+sut6b)+gg*(stu6b+sut6b))

    ijkl7 = gu*(stu7g+sut7u)+ug*(sut7g+stu7u)+&
            gd*(stu7g+sut7d)+dg*(sut7g+stu7d)+&
            .
            .
            .
            gbbar*(stu7g+sut7b)+bbarg*(sut7g+stu7b)

    ijkl8 = 0.25d0*gg*(stu8g+sut8g)

  end subroutine integrandfunction

end module integrand
```

Moduuli ”integrationlimits” sisältää integrointirajat (19) ja (20).

```
module integrationlimits
  use globals

  implicit none

  contains

  subroutine zintegrationlimits(zlower, zupper)
    implicit none
    intrinsic DCOSH
    double precision :: zlower, zupper
    zlower = (2.0d0*qT/SQRTS)*DCOSH(X(1))
    zupper = 1.0d0
  end subroutine zintegrationlimits

  subroutine y2integrationlimits(y2lower, y2upper)
    implicit none
    intrinsic DLOG, DEXP
    double precision :: y2lower, y2upper
    y2lower = -DLOG((SQRTS/(qT/X(3)))-DEXP(-X(1)))
    y2upper = DLOG((SQRTS/(qT/X(3)))-DEXP(X(1)))
  end subroutine y2integrationlimits

end module integrationlimits
```

Moduuli ”integration” sisältää vaikutusalojen (18) ja (22) integroinnit. Integrointirutiinin D110 funktioiden kutsumuodot löytyvät dokumentaatiosta [33].

```
module integration
  use globals
  use integrand
  use integrationlimits

  implicit none

  contains

  subroutine LOy2integralfunction(M,U,F,y2)
    implicit none
    integer :: M, L
    double precision :: lodir,ijkl1,ijkl2,ijkl3,ijkl4,ijkl5,ijkl6,ijkl7,ijkl8
    double precision, DIMENSION(:) :: y2(3), U(M), F(M)
    do L = 1,M
      y2(2)=U(L)
```

```
    call integrandfunction(lodir,ijkl1,ijkl2,ijkl3,ijkl4,ijkl5,ijkl6,ijkl7,ijkl8)
    F(L)= lodir
  end do
  return
end subroutine LOy2integralfunction

subroutine LOy1integralfunction(M,U1,F1,y1)
  implicit none
  integer :: M, L
  double precision :: y2lower, y2upper, DGMLT1
  intrinsic DCOSH
  double precision, DIMENSION(:) :: y1(3), U1(M), F1(M)
  do L = 1,M
    y1(1)=U1(L)
    call y2integrationlimits(y2lower, y2upper)
    F1(L)=DGMLT1(LOy2integralfunction,y2lower,y2upper,4,6,y1)
  end do
  return
end subroutine LOy1integralfunction

subroutine LOintegrationresult(tulos,y1ala,y1yla)
  implicit none
  double precision :: tulos, y1ala, y1yla, DGMLT2
  X(3)=1.0d0
  tulos = (1/(y1yla-y1ala))*DGMLT2(LOy1integralfunction,y1ala,y1yla,4,6,X)*mbGeV
end subroutine LOintegrationresult

subroutine y2integralfunction(M,U,F,y2)
  implicit none
  integer :: M, L
  double precision :: lodir,ijkl1,ijkl2,ijkl3,ijkl4,ijkl5,ijkl6,ijkl7,ijkl8
  double precision, DIMENSION(:) :: y2(3), U(M), F(M)
  do L = 1,M
    y2(2)=U(L)
    call integrandfunction(lodir,ijkl1,ijkl2,ijkl3,ijkl4,ijkl5,ijkl6,ijkl7,ijkl8)
    F(L)= ijkl1+ijkl2+ijkl3+ijkl4+ijkl5+ijkl6+ijkl7+ijkl8
  end do
  return
end subroutine y2integralfunction

subroutine zintegralfunction(M,U2,F2,z)
  implicit none
  integer :: M, L
  double precision :: y2lower, y2upper, DGMLT1
  double precision, DIMENSION(:) :: z(3), U2(M), F2(M)
  do L = 1,M
    z(3)=U2(L)
    call y2integrationlimits(y2lower, y2upper)
    F2(L)=(1.0d0/(z(3)*z(3)))*DGMLT1(y2integralfunction,y2lower,y2upper,4,6,z)
  end do
  return
end subroutine zintegralfunction

subroutine y1integralfunction(M,U2,F2,y1)
  implicit none
  integer :: M, L
  double precision :: zlower, zupper, DGMLT2
  double precision, DIMENSION(:) :: y1(3), U2(M), F2(M)
  do L = 1,M
    y1(1)=U2(L)
    call zintegrationlimits(zlower, zupper)
    F2(L)=DGMLT2(zintegralfunction,zlower,zupper,4,6,y1)
  end do
  return
```

```
  end subroutine y1integralfunction

  subroutine fragintegrationresult(tulos,y1ala,y1yla)
    implicit none
    double precision :: tulos, y1ala, y1yla, DGMLT3
    tulos = (1/(y1yla-y1ala))*DGMLT3(y1integralfunction,y1ala,y1yla,4,6,X)*mbGeV
  end subroutine fragintegrationresult

end module integration
```