

DIE ONDERSOEK VAN  
'N MOONTLIKE MATERIAAL-AFHANKLIKE VERKLARING  
VAN DIE  
COULOMB-NAVIER INTERNE WRYWINGSKOëFFISIëNT  
  
deur

PIETER VAN DER MERWE

Voorgelê ter vervulling van die vereistes  
vir die graad

MSc (Ing)

in die Fakulteit Ingenieurswese  
Universiteit van Pretoria  
PRETORIA

Oktober 1976

## DANKBETUIGINGS

Langs hierdie weg rig ek graag 'n woord van dank en waardering aan mnr. J.J. Marais van die departement Meganiese Ingenieurswese van die Universiteit van Pretoria en dr. C. Roering van die departement Geologie van die Randse Afrikaanse Universiteit vir hul opbouende kritiek en inspirerende gesprekvoering. Ook bedank ek graag mevr. M.C. Branders vir die tik van die manuskrip en my eggenote vir die versorging van die titelblad.

DIE ONDERSOEK VAN 'N MOONTLIKE MATERIAAL-AFHANKLIKE VERKLARING  
VAN DIE COULOMB-NAVIER INTERNE WRYWINGSKOëFFISIëNT

deur

PIETER VAN DER MERWE

LEIER: Mnr. J.J. Marais      MEDE-LEIER: Dr. C. Roering  
Departement Meganiese Ingenieurswese  
Verhandeling vir die graad M.Sc. (Ing.)

SAMEVATTING

Die onbevredigende konsep van die *interne wrywingskoëffisiënt* wat as basis dien vir numeries-bruikbare fraktuurkriteria vir brosmateriale, onder andere dié van Coulomb-Mohr, impliseer dat daar meriete in die kriteria bestaan, maar dat daar ook fundamentele aspekte van die fraktuurmeganika vir brosmateriale bestaan wat nog ontsluit moet word. Met hierdie as onderliggende behoefte, word die probleem geïdentifiseer deur eers die waarskynlike tekortkominge in die interpretasie van die bestaande teorieë in oënskou te neem.

So word byvoorbeeld die rol van die intermediêre hoofnormaalspanning met behulp van die stereografiese projeksie-metode geïllustreer waaruit afgelei kan word dat die probleem, in teenstelling met die opinie van sommige ander navorsers, wel drie-dimensioneel van aard is.

Daar word ook aangetoon dat die gemiddelde normaalspanningsvlak meganistiese eienskappe bevat wat daarop dui dat dit die kritieke fraktuurvlak kan wees. Aangesien hierdie vlak egter invariant ten opsigte van die normaalspanningsverwysingsnetwerk is, word die begrip netto-normaalspanning ingevoer wat 'n funksie van die Poissonverhouding is.

Deur 'n funksionele verwantskap af te lei vir die helling van die Mohrenvelop wat die Mohrsirkel raak by die punt wat verteenwoordig word deur die gemiddelde netto-hoofnormaalspanning in terme van die normaalspannings en die Poissonverhouding, word 'n moontlike materiaal-afhanklike verklaring van die interne wrywingskoeffisiënt verkry.

Dit word bevind dat hierdie vergelyking sinvolle waardes van die interne wrywingskoeffisiënt voorspel, wat impliseer dat daar meriete in die benaderingswyse bestaan wat die formulering van die verwantskap voorafgegaan het. 'n Uitvloeisel van die benaderingswyse is dat dit aanleiding gee tot 'n gewysigde vorm van voorstelling van eksperimentele data. Daar word bevind dat die gewysigde voorstelling baie gevoelig is vir sekere veranderlikes en die rol van invariante toestande word ook deur hierdie voorstelling beklemtoon.

'n Afleiding wat uit hierdie verhandeling gemaak kan word, is dat dit moontlik behoort te wees om 'n fraktuurkriterium in terme van elastisiteitskonstantes te formuleer.

THE INVESTIGATION OF A POSSIBLE MATERIAL DEPENDANT EXPLANATION  
OF THE COULOMB-NAVIER COEFFICIENT OF INTERNAL FRICTION

by

PIETER VAN DER MERWE

LEADER: Mr. J.J. Marais      CO-LEADER: Dr. C. Roering

Department of Mechanical Engineering

Dissertation for the degree M.Sc. (Eng.)

SYNOPSIS

The unsatisfactory concept of the *coefficient of internal friction* which forms the basis of numerically useful fracture criteria for brittle materials, for example the Coulomb-Mohr criterion, shows that although there is merit in the criteria, there do exist fundamental aspects of the fracture mechanics of brittle materials which still have to found. Bearing this in mind, the problem is identified by examining the probable misinterpretation of the existing theories.

The roll of the intermediate principal stress is determined by means of the stereographic projection method, which clearly indicates that the underlying problem is three dimensional in nature. This is contrary to the opinion of various other researchers.

It is shown that the plane of mean normal stress has certain mechanistic properties which could indicate to it

being the critical fracture plane. This plane being invariant in respect of the normal stress reference network, leads to the introduction of the concept of nett normal stress which is a function of Poisson's ratio.

By deriving an equation for the slope of the Mohr envelop which is tangent to the Mohr circle at the point which is represented by the mean nett principle stress, a possible material dependant explanation of the Coulomb-Navier coefficient of internal friction is found.

This equation predicts meaningful values of the coefficient of internal friction which shows that there has to be merit in the approach to the formulation of the equation. A consequence of this approach is that it leads to a modified representation of experimental data. It proves to be a very sensitive way of representation which also accentuates the roll of invariants.

A conclusion which can be drawn from this dissertation is that it should be possible to formulate a fracture criterium in terms of elastic constants.

## INHOUDSOPGAWE

	Bladsy
SAMEVATTING	iii
SYNOPSIS	v
1. <u>INLEIDING</u>	1
2. <u>LITERÊRE OORSIG: FRAKTUUR IN GESTEENTES</u>	
2.1 Inleiding	3
2.2 Fraktuurmeganismes en -kriteria	4
2.2.1 Submikroskopiese skaal	5
2.2.1.1 Oppervlakenergie	5
2.2.1.2 Chemiese effek	6
2.2.1.3 Die rol van dislokasies	7
2.2.2 Mikroskopiese skaal	8
2.2.3 Makroskopiese skaal	10
3. <u>DIE FUNDAMENTELE WERKE</u>	
3.1 Inleiding	13
3.2 Die Coulombteorie	15
3.3 Die Coulomb-Navierteorie	16
3.4 Die Mohrteorie	19
4. <u>EKSPERIMENTELE WERKE: BEVESTIGING VAN FUNDAMENTELE TEORETIESE WERKE</u>	
4.1 Inleiding	23
4.2 Toetse uitgevoer op chertagtige gangmateriaal	24
4.3 Toetse uitgevoer deur Price	24
4.3.1 Pennant Sandsteen	29
4.3.2 Snowdown Sandsteen	31

4.4	Toetse uitgevoer op materiaal afkomstig uit Gang 144 - E.R.P.M.	31
5.	<u>VOORSTELLING VAN SPANNING IN 'N RUIMTE</u>	
5.1	Inleiding	35
5.2	Spanning in drie-dimensies	36
5.3	Die Spanningsellipsoïde	38
5.4	Die Mohrdiagram	40
5.5	Die stereografiese Projeksie	42
5.5.1	Die gebruik van die stereografiese projeksie by die bestudering van spanningsvelde	42
5.6	Die Spanningstensor	48
6.	<u>'N MOONTLIKE FRAKTUURVLAK</u>	
6.1	Inleiding	54
6.2	Oriëntasie van gemiddelde normaalspanningsvlak	55
6.3	Faktore wat aanleiding gee tot die keuse van die gemiddelde normaalspanningsvlak	60
6.3.1	Gemiddelde en afwykende spannings- tensore	61
6.3.2	Elastiese vervormingsteorie	65
6.4	'n Materiaalafhanklike beskrywing van die Mohrenvelop	67
7.	<u>DIE ONDERSOEK VAN DIE VOORGESTELDE MATERIAAL- AFHANKLIKE VERKLARING VAN DIE COULOMB-NAVIER INTERNE WRYWINGSKOEFFISIËNT</u>	
7.1	Inleiding	75
7.2	Die ondersoek van die eksperimentele data van Hoofstuk 4	75
7.2.1	Chertagtige gangmateriaal	76



7.2.2	Pennant Sandsteen	80
7.2.3	Snowdown Sandsteen	84
7.2.4	Materiaal afkomstig uit Gang 144 - E.R.P.M.	87
7.3	Bespreking	89
8.	<u>GEWYSIGDE VOORSTELLING VAN EKSPERIMENTELE DATA</u>	
8.1	Inleiding	92
8.2	Die invariante $\bar{\sigma}'$	93
8.3	Gewysigde Mohrkonstruksie	94
8.3.1	Pennant Sandsteen	95
8.3.2	Snowdown Sandsteen	98
8.3.3	Materiaal afkomstig uit Gang 144 - E.R.P.M.	98
8.3.4	Chertagtige Gangmateriaal	100
8.4	Bespreking	105
9.	<u>GEVOLGTREKKING</u>	106
	<u>VERWYSINGS</u>	108

## HOOFSTUK 1

### INLEIDING

Die studie van brosfrakture en veral daardie gedeelte wat betrekking het op die fraktuur van gesteentemassas vind sy inslag in die mens se belange in soverre dit strek tot die eksplorاسie, ontginning en produksie van natuurlike bronne, ingenieursprojekte op of onder die aardoppervlakte asook die voorspelling en beheer van aardkorsbewegings.

Die voortdurende eise van mynbouers, ingenieurs en geoloë oor die gedrag van gesteentes onder toestande wat vergelykbaar is met daardie by relevante dieptes in die aardkors, het aanleiding gegee tot die formulering van 'n aantal fraktuurkriteria wat essensieël beoordeel en vergelyk moet word deur die wyse waarop hulle voorspellings die eksperimentele resultate pas. Weens die akkuraatheid en relatiewe eenvoud van toepassing het die teorieë van Mohr en Griffith die meeste aandag getrek en word beide in gewysigde vorm as bruikbaar geag as fraktuurkriteria. Die konsep van *interne wrywingskoeffisiënt* wat in beide gevalle 'n dominerende rol speel, is egter onaanvaarbaar; soos Handin [1969 - (31)] dit stel: „.... the Coulomb-Mohr criterion can be useful even though its basis, the concept of internal friction, is unsatisfying”, om slegs 'n enkele voorbeeld te noem. Dit impliseer dus dat daar fundamentele aspekte van die frak-

tuurmeganika van bros materiale bestaan wat nog ontsluit moet word.

In hierdie verhandeling word gepoog om die leser op sistematiese wyse te lei deur die aspekte wat aanleiding kan gee tot die formulering van 'n materiaal-afhanklike verklaring van die Coulomb-Navier interne wrywingskoëffisiënt. Daarna word die voorgestelde verklaring getoets aan die hand van geskikte beskikbare eksperimentele data. Die geskrif word afgerond deur die implikasies van die benaderingswyse tot die probleem te behandel.

## HOOFSTUK 2

### LITERERE OORSIG: FRAKTUUR IN GESTEENTES

#### 2.1 Inleiding

Weens die wye sektor wat daarby kan baatvind is enige sinvolle navorsing wat kan lei tot 'n beter begrip van die fraktuurproses in gesteentes en die fisiese en meganiese gedrag van gesteentemassas, waarin die frakture voorkom, van wesentlike belang.

Die meer as 750 verwysings vermeld in die bibliografie deur Bieniawski [1965 - (3)] getuig van die besondere belangstelling op hierdie gebied. Die studie van frakture is waarskynlik die mees belangrikste onderwerp ook in hedendaagse rotsmeganika, hoofsaaklik weens die dominante rol wat dit speel in die meganisme van rotsswigting by die relatief lae drukke en temperature by vlak dieptes in die aardkors en weens die invloed van frakture op die fisiese en meganiese gedrag van die gesteentes.

Oorsigte deur Jaeger [1967 - (42)], Obert [1972 - (55)] en Friedman [Julie 1975 - (21)] bring die leser op hoogte van die mees onlangse werk op hierdie gebied. Nieteenstaande die aktiewe navorsing wat onderneem word, is dit dus insiggewend dat beide laasgenoemde twee outeurs dit ondubbel-sinnig stel dat geen enkele aspek van die fraktuur-

meganika van gesteentes ten volle verstaan word nie.

'n Werkstuk van hierdie aard sal onvolledig wees as die huidige stand van navorsing op hierdie gebied nie in breë trekke behandel word nie. Die reedsgenoemde oorsigte bied hierdie aspek in groter detail.

## 2.2 Frakturemeganismes en -kriteria

Bieniawsky [1967 - (4)] beskryf 'n genetiese frakturemeganisme as die proses wat in-die materiaal tydens belasting plaasvind en wat uiteindelik sal uitloop tot fraktuur terwyl 'n fraktuurkriterium 'n empiriese formule beskryf waardeur die sterkte van materiale onder veelassige spanning voorspel kan word indien 'n kritieke hoeveelheid soos byvoorbeeld eenassige trek- of druksterkte bekend is.

Die meganisme van fraktuurvorming en -voortplanting sowel as fraktuurkriteria is reeds en word steeds op

- (a) submikroskopiese
- (b) mikroskopiese en
- (e) makroskopiese skaal

ondersoek. Uit al die navorsing wat reeds op die verskillende skale gedoen is, sommige waarna verwys word in hierdie hoofstuk, kom dit egter voor asof die bekende werke van Griffith, Mohr, Coulomb en Navier die meeste aandag van navorsers ontvang het

in hulle soektog na 'n verklaring of formulering van die fraktuurproses.

### 2.2.1 Submikroskopiese skaal

Die studie op hierdie skaal behels die verbreking van die kohesiekragte tussen die struktuurelemente van 'n liggaam wanneer daar relatiewe verplasing plaasvind. Die ondersoek van frakture op die submikroskopiese skaal kan in drie groepe klassifiseer word, naamlik:

- (i) die meet van fraktuuroppervlakenergie,
- (ii) die studie van die chemiese effek en
- (iii) die rol van dislokasies.

#### 2.2.1.1 Oppervlakenergie

Die verskil tussen die berekende en eksperimenteel waarneembare waardes van treksterkte van eenvoudige kristalle word deur Griffith [1921 - (27); 1924 - (28)] toegeskryf aan die teenwoordigheid van baie klein krake, *Griffith krake*, in die materiaal en die gepaardgaande absorpsie van energie, afkomstig van die verbreking van chemiese bindinge, in die oppervlaktes van die krake. Die oppervlakenergie -  $\gamma$  per eenheidsoppervlakte - van die oppervlaktes van die krake word as 'n fundamentele materiaal-eienskap beskou. Die afstand tussen die twee oppervlaktes van so 'n kraak is in die orde van intermolekulêre spasiëring. As gevolg van die be-

langrikheid van  $\gamma$  in die ontwikkeling van 'n fraktuurkriterium gebaseer op die Griffith-beginsel, word voortdurend werk gedoen op die meet van oppervlakenergieë van materiale. Die rol van druk en temperatuur op die waarde van  $\gamma$  en die dissipasie van energie as gevolg van die plastiese vervorming by die dinamiese voortplanting van krake geniet tans deurdringende aandag deur onder andere Kassir en Sih [1975 - (47)] en die 79 bydraers tot die boek onder die redaksie van Sih [1973 - (70)].

Die belangrikheid van energie-oorewegings in die studie van fraktuur in gesteentes word in onlangse werk ook deur byvoorbeeld Hardy en andere [1973 - (35)] Hudson en andere [1973 - (39)], Krech [1974 - (49)] en Cain en andere [1974 - (17)] beklemtoon.

#### 2.2.1.2 Chemiese effek

Steengroefwerkers, mynwerkers en boormanne is jare lank reeds bewus daarvan dat water en verskeie oplossings die breeksterkte van rots reduseer.

Deur navorsing gedurende die tydperk 1965-1974 is die chemiese effek geskei van die meganiese effek en die presiese aard van die verandering in die tipe en sterkte van die chemiese bindings bestudeer. Die invloed van die hidrolitiese effek op die fraktuur van gesteentes by lae druk en temperatuur en die effek van die teenwoordigheid van oppervlak-

aktiewe-oplossings is beide kwalitatief en kwantitatief bepaal. Deur aanverwante navorsing het Jackson en andere [1974 - (41)] 'n twintigvoudige toename in boortempo vermag deur die chemies-meganiese eienskappe van die gesteentes in ag te neem by die boorpuntontwerp en deur die toepassing van 'n proses van ooreenstemmende omgewingschemie.

### 2.2.1.3 Die rol van dislokasies

Die idee dat kraake voorgestel kan word deur 'n kontinue rangskikking van dislokasies het navorsing ook in 'n ander rigting op die submikroskopiese skaal gelei. Dislokasies vind inslag in die teorie van fraktuurvorming op 'n tweeledige wyse. Eerstens as kristaldislokasies wat 'n rol speel in die fisiese beskrywing van frakture en tweedens as 'n wiskundige of gerieflike begripselement in die makroskopiese benadering van kraake soos byvoorbeeld deur Bilby en Eshelby [1968 - (7)] toegepas. Die fundamentele probleem in die teorie van kraake is die bepaling van die wêre waarop 'n kraak 'n toegepaste spanningsveld kan wysig soos in besonder deur Griffith [1921 - (27); 1924 - (28)], Orowan [1959 - (56)], Irwin [1960 - (40)], Barenblatt [1962 - (2)] en Mc Clintock en Walsch [1963 - (50)] intensief beskou is. Bilby en Eshelby [1968, p159 - (7)] het aangetoon dat die teorie van Barenblatt ooreenstem met die teorieë van Griffith, Orowan en



Irwin deur gebruik te maak van dislokasies.

Alhoewel dislokasies reeds in geologiese materiale bestudeer is, „is weinig indien enige sistematiese studie van die genetiese verwantskap tussen dislokasies en krake in gesteentes gemaak". - vertaal uit Friedman [1975, -p354 - (21)].

Hierdie stelling behoort egter uitgebrei te word om te lui dat: weinig indien enige genetiese verklaring van krake in gesteentes reeds gemaak is.

#### 2.2.2 Mikroskopiese skaal

Onder die term: Mikroskopiese skaal word die studie van die fraktuurproses op en in die omgewing van korrelgrense van die materiaal vervat. Die samestelling en aard van die gesteentetipes, die tekstuur daarvan, oneweredige verspreiding van spanning veroorsaak deur porieë, reedsbestaande krake, korrelkontakte en residuele spannings is almal aspekte wat onder hierdie kategorie van navorsing in die rotsmeganika val.

Ondersoeke op hierdie skaal veral gedurende die tydperk 1965 tot 1975 het gelei tot die beskikbaarheid van 'n magdom publikasies oor die vorming van mikrofrakture met betrekking tot die wyse waarop belasting plaasvind, waar en in watter rigting frakture voorkom, hoe en teen watter tempo krake propageer, kortom, hoe mikrofrakture ontwikkel

tot makrofrakture - hoofsaaklik deur die bepaling van dilatansie of fraktuurvorming wat sal lei tot makroskopiese trek- of skuiffrakture. So het Brace en andere [1966 - (16)], Bieniawsky [1967 - (5); 1967 - (6)], Crouch [1970 - (18)], Price [1975 - (59)], Simmons en andere [1974 - (71)], Wawersik en Fairhurst [1970 - (74)] en Zoback en Byerlee [1975 - (76)] byvoorbeeld studies gedoen wat gerig was op die meet of bepaling van volumetriese vorming met betrekking tot differensiële spanning, terwyl Brace en andere [1965 - (15)], Brace en Orange [1968 - (13); 1968 - (14)], Brace [1974 - (11)], Scholtz [1968 - (65); 1968 - (66); 1968 - (67)], Hoshino en Koide [1970 - (38)], Knill en andere [1968 - (48)] en Hardy en andere [1970 - (34)] aspekte rakende mikroeseismiciteit, elektriese resistiwiteit en akoestiese eienskappe ondersoek het.

Die werk van Zoback en Byerlee [1975 - (75)] en ook van Farran en Perami [1974 - (20)] kan as voorbeeld dien van die studie op die effek van dilatansie op die permeabiliteitsverandering by gesteentetipes tot by makroskopiese fraktuursterkte terwyl sikliese belastingstoetse deur Zoback en Byerlee [1975 - (76)], Hardy en Clugh [1970 - (33)], Scholtz en Kranz [1974 - (68)], Haimson en andere [1973 - (29)], Bombolakis [1973 - (9)] en Cain en andere [1974 - (17)] uitgevoer is en waardeur die belangrikheid van fraktuur aanvang by spannings laer

as dié vir makroskopiese fraktuur teen monotoniese belading aangetoon is.

Direkte mikroskopiese studies is ook onder andere deur Hoek [1965 - (37)], Bombolakis [1973 - (9)], Hoshino en Koide [1970 - (38)], Friedman en Logan [1970 - (25)], Baldrige en Simmons [1971 - (1)] en Hallbauer, Wagner en Cook [1973 - (30)] uitgevoer om die meganiese gedrag van gesteentes onder toestande van belasting waar te neem.

Benewens bogenoemde is foto-elastiese en relevante eksperimentele werk op glas uitgevoer deur Brace en Bombolakis [1963 - (12)], Bieniawsky [1967 - (4); 1967 - (5)] en Bombolakis [1968 - (8)] om 'n insig te verkry op die aspek van fraktuurvoortplanting en die invloed van frakture op die spanningsveld, terwyl Gallagher en andere [1974 - (26)], Friedman en Logan [1970 - (25)], Friedman [1972 - (22); 1972 - (23)] en Friedman en Bur [1974 - (24)] deur foto-elastiese studies op aggregate en heuristiese modelering te doen, die fraktuurgedrag en ook die invloed van residuele vervorming op fraktuuroriëntasie, -sterkte en anisotropieë van korrelrige sandsteen behandel.

### 2.2.3 Makroskopiese skaal

Onlangse studies op die gebied van makroskopiese fraktuurmeganismes en -kriteria word gerig op

die bevestiging, deur ware grootte eksperimente, van die konsep van effektiewe druk en die Coulomb-Mohrteorie. Handin [1969 - (31)] en Mogi [1974 - (51); 1974 - (52)] gebruik laasgenoemde as meganiese basis vir aardbewingbeheer en -modifikasie, verfyning van die studie van akkumulatiewe vervorming en spanningsverandering langs geologiese diskontinuiteite en suiwing van die Coulomb-Mohrkriterium.

Raleigh en andere [1972 - (61)] het aardbewingsbeheer deur die insluit van vloeistowwe en het daardeur die konsep van effektiewe druk en die gebruik van die Coulomb-Mohrenveloppe in die oplossing van volskaal probleme in die rotsmeganika bevestig. Die volskaalse eksperimentasie het gevolg op die redenasies van Evans [1966 - (19)] en Healy en andere [1968 - (36)], naamlik dat die teenwoordigheid van ingespuite vloeistowwe die vloeistofdruk verhoog en dat dit 'n afname in die effektiewe normaalspanning oor 'n bestaande geologiese diskontinuiteit tot gevolg het terwyl die afskuiwspanning nie verandering ondergaan nie. 'n Toestand wat verplasing langs die diskontinuiteit en aardbewings tot gevolg het.

Die studie van akkumulatiewe vervorming en spanningsverandering langs diskontinuiteite soos skuiffrakture is van belang om die oorsprongmeganisme van aardbewings en moontlike dilatansie van

die aangrensende rotsmassas by wrywingsglyding te verstaan. Friedman [1975 - (21)] maak vermelding van 'n aantal foto-elastiese en analitiese studies wat hieroor gedurende die tydperk 1961-1974 aangepak is.

Aspekte rakende boorwerk, rotsversplintering en die effek van temperatuur op fragmentering of versplintering word ook voortdurend ondersoek. Ook het Handin en andere [1967 - (32)], Mogi [1972 - (53)] en Nascimento en andere [1974 - (54)] verslag gelewer oor die invloed van die intermediêre normaalspanning op die fraktuursterkte van gesteentes. Benewens laasgenoemde word die spanningsgradiënte langs die fraktuurpad tydens ontwikkeling van frakture in die omgewing van verskeie vorms van openinge ook tans ondersoek.

## HOOFSTUK 3

### DIE FUNDAMENTELE WERKE

#### 3.1 Inleiding

Wanneer 'n liggaam geleidelik aan toenemende spanning onderwerp word, sal dit by 'n sekere toestand van spanning begin swig indien die materiaal plasties vervormbaar is. Indien die materiaal egter essensieel elasties of bros is, sal dit by 'n sekere spannings-toestand breek sonder dat enige noemenswaardige plastiese vervorming waarneembaar is.

Dit is dus noodsaaklik dat daar wyses bestaan waarvolgens akkurate voorspellings gemaak kan word van die gedrag van materiale wat as struktuurelemente dien wanneer dit onderwerp word aan die kragvelde van hul fisiese omgewing. Hierdie behoefte het aanleiding gegee tot die formulering van 'n verskeidenheid kriteria, waaronder onder andere die volgende bekende teorieë sou ressorteer.

- (i) Maksimum hoofnormaalspanningteorie
- (ii) Maksimum hoofvervormingteorie
- (iii) Maksimum skuifspanningteorie
- (iv) Maksimum skuifvervormingteorie
- (v) Maksimum vervormingsenergieteorie en
- (vi) Maksimum distorsionele vervormingsenergieteorie.

Weinig van die bogenoemde teorieë is gebaseer op enige interne frakturemeganisme, maar eerder ver-

onderstellings of pogings tot die verklaring van eksperimentele resultate. Sommige van hierdie teorieë is dikwels ongeldig vanweë die onaanvaarbare veronderstellings of aannames waarop dit berus. Die maksimum vervormingsenergieteorie vereis byvoorbeeld dat die grootte van die beperkende vervorming vir beide druk- en trektoestande dieselfde is. Die maksimum hoofnormaalspanningsteorie en die maksimum hoofvervormingsteorie word byvoorbeeld ook op grond van soortgelyke nie-feitelike getuienis dikwels vermy.

Twee van die teorieë, naamlik die Coulombteorie (maksimum skuifspanningsteorie) en die Coulomb-Navier-teorie (gewysigde maksimum skuifspanningsteorie), is van besondere geskiedkundige betekenis in die sin dat hulle die voorlopers of fundamentele werke was waarop menige kriteria, selfs in 'n beperkte mate die Mohr fraktuur- of swigtinskriterium, asook menige ander studies gebaseer was. Hierdie fenomenologiese benaderingswyse word hedendaags nog algemeen aanvaar en toegepas soos deur Handin [1969 - (31)], Timoshenko [1958 - (72)] en meer onlangs deur Obert [1972 - (55)], Scheidegger [1972 - (63)], [1973 - (64)] vermeld word.

Benewens die teorieë van Coulomb, Navier en Mohr, word die teorie van Griffith ook as fundamenteel beskou. Dit dien as die voorloper van die navorsing op die meganisme van fraktuurvorming en -voortplanting veral op die submikroskopiese skaal soos reeds geklas-

sifiseer en vermeld in die voorafgaande literêre oorsig.

Aangesien daar in latere hoofstukke by die behandeling van 'n moontlike materiaalafhanklike verklaring van die Coulomb-Navier interne wrywingskoëffisiënt na die teorieë van Coulomb, Coulomb-Navier en Mohr verwys word, word hierdie teorieë volledigheidshalwe kortliks in hierdie hoofstuk beskryf.

### 3.2 Die Coulombteorie

Coulomb postuleer in sy maksimum skuifspanningteorie dat fraktuur in 'n materiaal sal plaasvind wanneer die maksimum skuifspanning by 'n punt 'n sekere waarde  $\tau_0$ , die skuifsterkte van die materiaal, bereik. Indien 'n liggaam onder 'n toestand van spanning verkeer en  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  en  $\sigma_3$  die hoofnormaalspannings voorstel, met  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , dan sal die maksimum skuifspanning  $\tau_{\text{maks}}$  verkry word uit

$$\tau_{\text{maks}} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3). \quad \text{-----} \quad (3-1)$$

Coulomb se voorspelling vereis dan dat

$$\tau_{\text{maks}} \geq \tau_0 \quad \text{-----} \quad (3-2)$$

moet wees, of te wel:

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \geq \tau_0 \quad \text{-----} \quad (3-3)$$

waar  $\tau_0$  die skuifsterkte van die materiaal is. Dit impliseer verder dat die fraktuurvlak die hoek tussen die vlakke van maksimum en minimum hoofnormaalspanning sal halveer - 'n implikasie wat nie deur eksperimentele



werk bevestig word nie, aangesien hierdie rigting varieer met die toegepaste las en ook van een tipe materiaal tot 'n ander. Vir rotsmonsters wat onder 'n toestand van druk breek, vorm die fraktuurvlak 'n hoek kleiner as  $45^\circ$  met die rigting van die groter drukspanning, terwyl in die geval van monsters wat onder trektoestande faal, vorm die fraktuurvlak 'n hoek van ongeveer  $90^\circ$  met die rigting van die minimum spanning.

### 3.3 Die Coulomb-Navierteorie

Dit word algemeen aanvaar dat Navier die Coulomb-teorie gewysig het deur te stel dat die skuifsterkte van 'n materiaal toeneem met 'n hoeveelheid gelykstaande aan die produk van 'n konstante  $\mu$  en die normaalspanning oor die vlak. Die skuifweerstand oor die fraktuurvlak vergroot dus van  $\tau_0$  tot

$$|\tau| = \tau_0 + \mu\sigma \quad \text{-----} \quad (3-4)$$

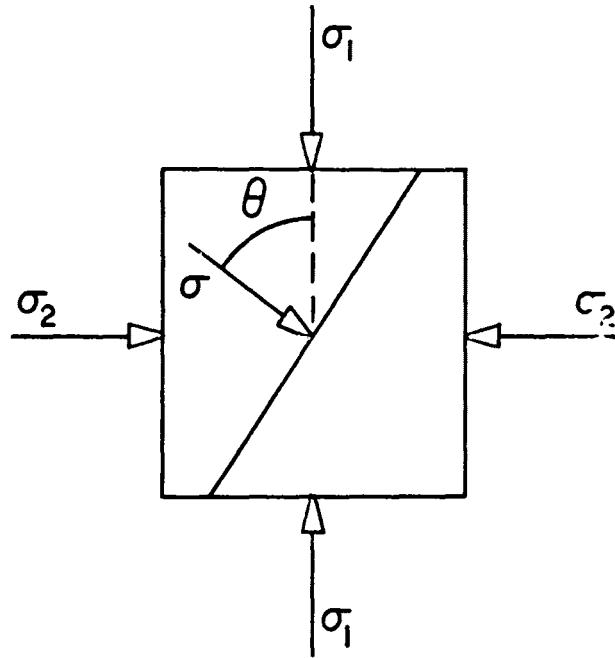
sodat na  $\mu$  verwys word as die *interne wrywingskoëffisiënt* aangesien  $\mu\sigma$  analoog is met die wrywingskrag op 'n hellende vlak. Die voorwaarde waarop hierdie skuifkriterium gebaseer word, is dat fraktuur sal plaasvind wanneer die skuifspanning in die fraktuurvlak die waarde  $|\tau|$  bereik.

Vergelyking (3-4) word verder vereenvoudig deur  $\tau$  en  $\sigma$  te vervang met hul grootes soos afgelei word uit 'n twee-dimensionele spanningsanalise, naamlik

$$\tau = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2} \sin 2\theta \quad \text{-----} \quad (3-5)$$

en 
$$\sigma = \frac{(\sigma_1 + \sigma_3)}{2} + \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2} \cos 2\theta \quad \text{-----} \quad (3-6)$$

waarin  $\theta$  die hoek tussen die rigting van  $\sigma_1$  en die rigting van die normaalspanning op die fraktuurvlak is soos voorgestel in figuur 3-1.



Figuur 3.1

Dan word  $\tau_0 = |\tau| - \mu\sigma$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2} \sin 2\theta - \mu \frac{(\sigma_1 + \sigma_3)}{2} - \mu \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2} \cos 2\theta \\
 &= -\mu \frac{(\sigma_1 + \sigma_3)}{2} + \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2} (\sin 2\theta - \mu \cos 2\theta)
 \end{aligned}$$

----- (3-7)

Hierdie vergelyking bereik 'n maksimum waarde met betrekking tot  $\theta$  wanneer

$$\tan 2\theta = -\frac{1}{\mu} \quad \text{-----} \quad (3-8)$$

sodat die maksimum waarde van  $\tau_o$  dan

$$\tau_o = \frac{\sigma_1}{2} \left( (\mu^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - \mu \right) - \frac{\sigma_3}{2} \left( (\mu^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + \mu \right) \quad \text{————— (3-9)}$$

sal wees.

Indien  $\mu$  'n konstante vir 'n gegewe materiaal is, sal die  $\sigma_1, \sigma_3$  fraktuurkromme 'n reguitlyn wees wat wel by benadering ooreenstem met die gedrag van stollingsgesteentes en ander harde kristalagtige gesteentetipes, aldus Obert [1972 - (55)].

Deur die verwantskap van vergelyking (3-9) in terme van suiwer trekspanning uit te druk, dit is  $\sigma_1 = 0$  en  $\sigma_3 = \sigma_T$ , word gesien dat

$$2\tau_o = \sigma_T \left( (\mu^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + \mu \right) \quad \text{————— (3-10)}$$

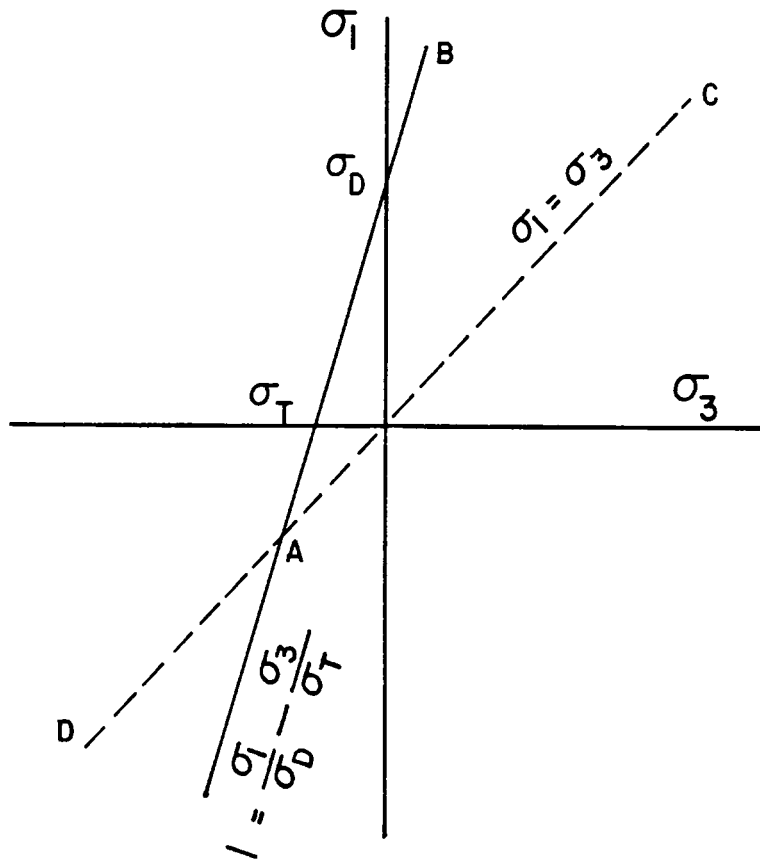
en in terme van suiwer drukspanning waar  $\sigma_1 = \sigma_D$  en  $\sigma_3 = 0$ , word dit

$$2\tau_o = \sigma_D \left( (\mu^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - \mu \right) \quad \text{————— (3-11)}$$

Terugvervang van vergelykings (3-10) en (3-11) in (3-9), gee

$$1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_D} - \frac{\sigma_3}{\sigma_T} \quad \text{————— (3-12)}$$

wat die vergelyking van die reguitlyn AB van figuur 3-2 is. Aangesien  $\sigma_1$  groter as  $\sigma_3$  moet wees, is die area regs van die reguitlyn DC nie van toepassing nie, terwyl die materiaal enige toestand van spanning vervat in die gebied BAC sal weerstaan. Fraktuur sal dus



Figuur 3.2

voorkom in die gebied links van die begrensing DAB.

Wanneer die normaalspanning oor die fraktuurvlak negatief is, met ander woorde 'n trekspanning in terme van hierdie tekenkonvensie is, sal dit neig om die fraktuuroppervlaktes van mekaar te skei sodat die term interne wrywing betekenisloos word, aldus Obert [1972 - (55)].

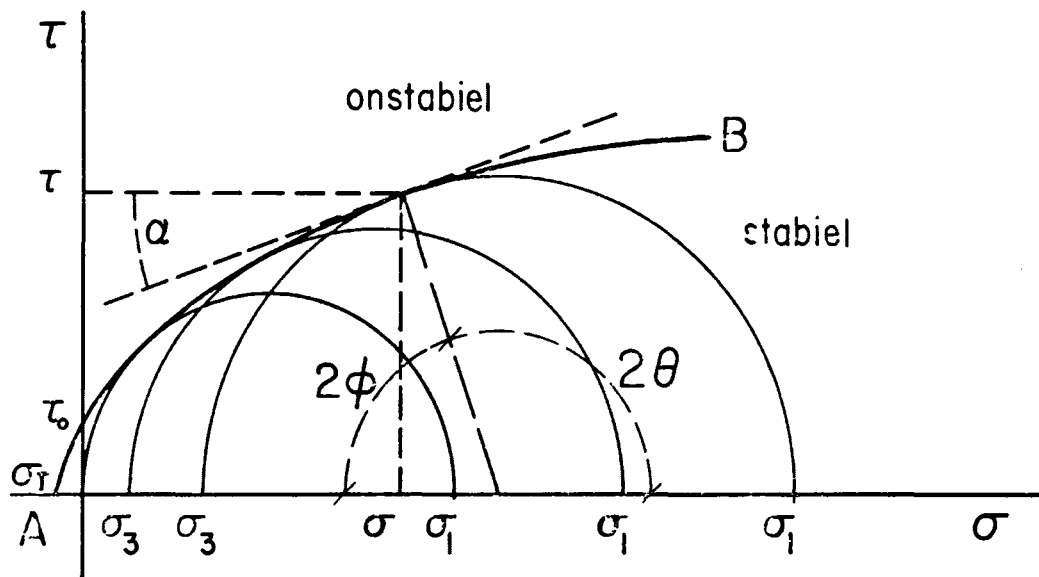
### 3.4 Die Mohrteorie

Die Mohrteorie postuleer dat 'n materiaal sal breek of permanent sal begin vervorm wanneer die

skuifspanning  $\tau$  op die fraktuurvlak 'n sekere waarde bereik wat 'n funksie van die normaalspanning op dieselfde vlak sal wees, naamlik

$$\tau = f(\sigma). \quad \text{-----} \quad (3-13)$$

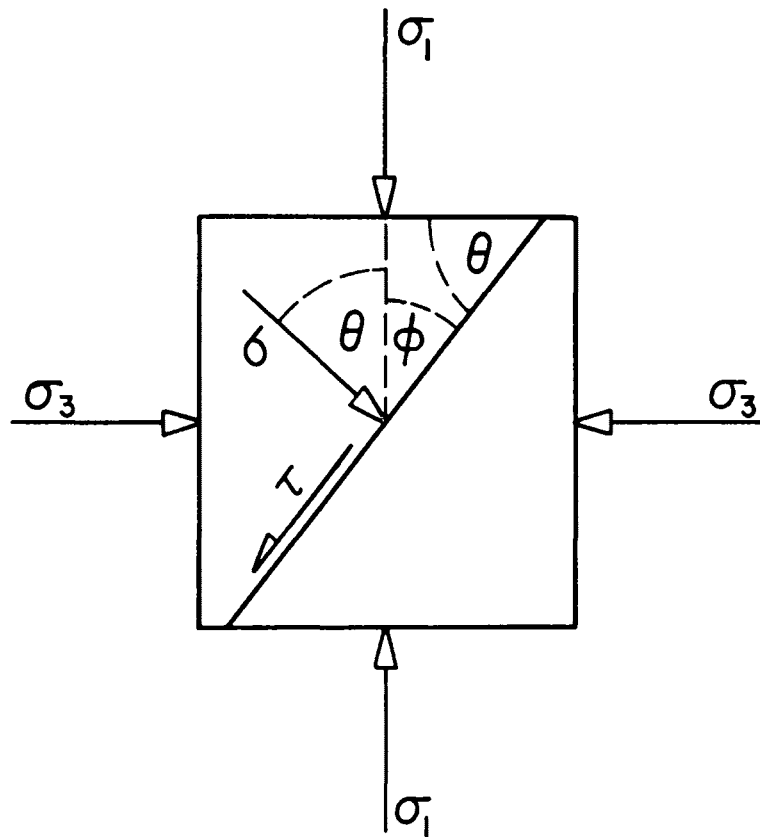
Bogenoemde funksionele verwandskap word eksperimenteel bepaal en word voorgestel deur die kromme AB van figuur 3-3.



Figuur 3.3

Die fisiese betekenis van die envelop van die Mohrsirkels vir die waardes van  $\sigma_1$  en  $\sigma_3$  by breking is dat vir enige toestand van spanning wat deur 'n Mohrsirkel voorgestel word en wat geheel en al binne die begrensing van die envelop lê, die materiaal nie sal faal nie. Indien enige sirkel buite die envelop is, sal die kritieke waardes van spanning oorskrei word, terwyl in die geval waar die envelop en sirkel mekaar raaklyng by 'n punt ontmoet, die kritieke

waardes van spanning bereik word op die vlak wat die hoek  $\phi$  maak met die rigting van die maksimum hoofnormaalspanning  $\sigma_1$ , soos aangedui in figuur 3-4.



Figuur 3.4

Hierdie teorie voorspel dus, benewens die toestand van spanning wat nodig is vir breking, ook die rigting van die fraktuurvlak.

In die geval waar die envelopkrommes reguitlyne is, soos byvoorbeeld vir stollingsgesteentes, word uit figuur 3-3 die  $(\sigma, \tau)$  funksionele verwantskap

$$\tau = \pm(\tau_0 + \sigma \tan \alpha) \quad \text{-----} \quad (3-14)$$

en aangesien

$$\tan 2\theta = -\frac{1}{\mu} \quad \text{-----} \quad (3-8)$$

$$\text{en } 2\phi = 180^\circ - 2\theta$$

$$\text{is } \tan 2\phi = \frac{1}{\mu} \quad \text{-----} \quad (3-15)$$

$$\text{en } \tan \alpha = \mu. \quad \text{-----} \quad (3-16)$$

Vervanging van vergelyking 3-16 in 3-14 gee

$$\tau = \pm (\tau_0 + \mu\sigma) \quad \text{-----} \quad (3-17)$$

wat identies is aan vergelyking 3-4. Dit toon dat die Coulomb-Navierteorie en die Mohrteorie in hierdie geval identiese numeriese resultate sal gee.

## HOOFSTUK 4

### EKSPERIMENTELE WERKE: BEVESTIGING VAN FUNDAMENTELE TEORETIESE WERKE

#### 4.1 Inleiding

Die funksionele verwantskap tussen normaal- en skuifspanning soos voorgestel deur Coulomb en Navier waarby die term interne wrywingskoëffisiënt ingevoer is, asook die fenomenologiese benaderingswyse van Mohr waarvolgens die envelop van Mohrsirkels die oorgang van stabiele tot onstabiele toestande van drie-assige spanning aandui, is reeds eksperimenteel bevestig. Dit word trouens hedendaags nog steeds gebruik in die voorstelling van eksperimentele data asook in die voorspelling van fraktuurvorming.

Ter illustrasie van die bevestiging van die fundamentele werke vermeld in hoofstuk 3, word 'n aantal eksperimentele werke aangebied. Uit die menige bronne waarin data van hierdie aard te vinde is, is slegs 'n paar gekies en as voorwaarde het die beskikbaarheid van die Poissonverhouding gegeld - hoofsaaklik omdat hierdie eksperimentele data ook later gebruik word by die ondersoek van 'n moontlike materiaalafhanklike verklaring van die Coulomb-Navier interne wrywingskoëffisiënt waarin die Poissonverhouding 'n prominente rol speel.



#### 4.2 Toetse uitgevoer op chertagtige gangmateriaal

Hierdie gesteente kom voor in myne van die sentraal Witwatersrand en word op grond van struktuur, voorkoms en gedrag as 'n benaderde ideale isotropiese elastiese vastestof beskou.

Die data van eksperimentele werk op hierdie gesteente en bogenoemde beskrywing word ontleen aan Hoek [1965 - (37)] en vervat resultate wat by beide die W.N.N.R. en M.I.T. uitgevoer is. Tabel 4-1 toon die metrieke ekwivalente waardes van imperiale waardes wat in genoemde publikasie gebruik is.

Deur die Mohrkonstruksies vir die data te maak en die envelop vir die sirkels te vind, word die funksionele verwantskap tussen  $\tau$  en  $\sigma$  verkry. Die helling van die envelop is telkens die waarde van die interne wrywingskoëffisiënt. Figuur (4-1) beeld die eksperimentele data van Tabel 4-1 uit.

#### 4.3 Toetse uitgevoer deur Price [1958 - (60)]

Die eksperimentele data wat in bogenoemde publikasie aangebied word is baie volledig en verteenwoordig toetse wat op verskeie gesteentes uitgevoer is om die invloed van drie-assige spanning op die elastiese gedrag van die gesteentes te bepaal. Benewens die verwantskap tussen Young se modulus en inklemspanning by 'n spesifieke differensiële spanning asook tussen die Poissonnommer en inklemspan-

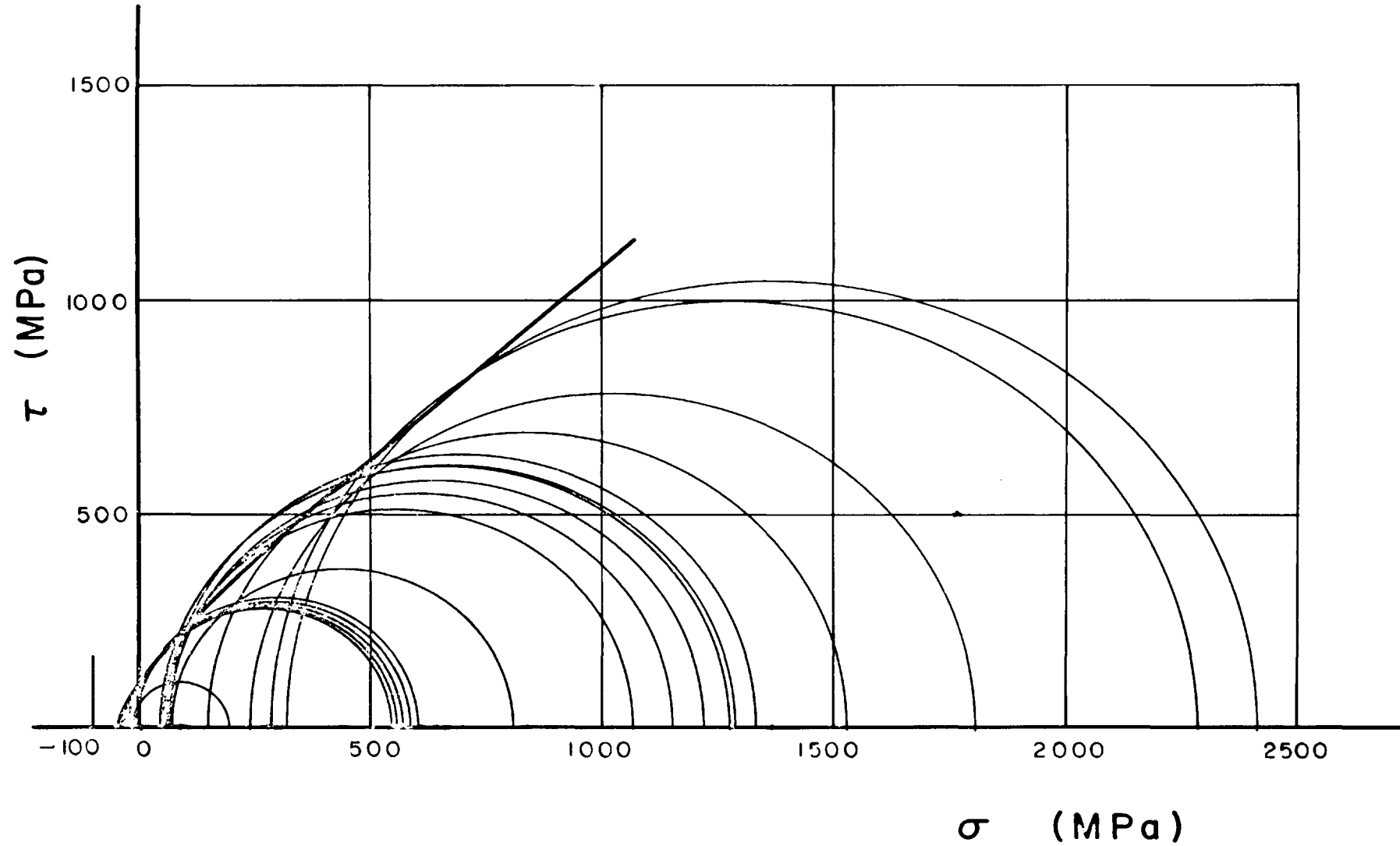
TABEL 4-1

DRIE-ASSIGE FRAKTUURDATA VIR CHERTAGTIGE GANGMATERIAAL

Maksimum hoof- normaalspanning $\sigma_1$ (MPa)	Minimum hoof- normaalspanning $\sigma_3$ (MPa)	Toets uitgevoer deur
0	-34,82	W.N.N.R.
2,28	-21,51	W.N.N.R.
3,17	-29,79	W.N.N.R.
197,19	-13,10	M.I.T.
610,88	0	W.N.N.R.
566,06	0	W.N.N.R.
592,95	0	W.N.N.R.
557,10	0	W.N.N.R.
579,16	0	W.N.N.R.
580,54	0	W.N.N.R.
603,98	0	M.I.T.
613,64	0	M.I.T.
813,59	77,91	M.I.T.
1080,42	57,92	W.N.N.R.
1167,98	62,74	W.N.N.R.
1233,48	65,50	W.N.N.R.
1275,54	67,57	W.N.N.R.
1288,64	62,74	W.N.N.R.
1344,49	71,02	W.N.N.R.
1544,44	144,79	M.I.T.
1820,23	241,32	M.I.T.
2295,97	286,82	M.I.T.
2426,97	325,43	M.I.T.

Poissonverhouding  $\nu = 0,2$  tot  $0,213$

Benaderde waarde  
van interne wry-  
wingskoeffisiënt  $\mu = 1,08$



Voorstelling van fraktuurdata : Chertagtige gangmateriaal

Figuur 4.1

ning by verskeie vlakke van differensiële spanning word ook, met enkele uitsonderings, die oriëntasie van die gelaagdheid ten opsigte van die longitudinale as van die toetsmonster, die verwantskap tussen  $\sigma_1$  en  $\sigma_3$  by breking, die vergelyking van die Mohrenvelop, die berekende en gemete fraktuurhoek en die variasiekoëffisiënt van die data van onder andere die volgende gesteentes gegee:

- (i) Pennant sandsteen
- (ii) Snowdown sandsteen

Die eksperimentele data wat in die eersvolgende paragrafe weergegee word, is slegs dié wat van toepassing is op monsters waar die gelaagdheid loodreg is op die rigting van  $\sigma_1$  aangesien in hierdie geval die monsters as meer homogeen beskou word as in die geval waar die gelaagdheid parallel is aan die rigting van  $\sigma_1$ . In laasgenoemde geval word waargeneem dat die oriëntasie van die fraktuurvlak drasties afwyk van die oriëntasie wat voorspel word deur die Mohrteorie. Hieruit word afgelei dat die Mohrteorie waarskynlik meer van toepassing is op homogene tipes gesteentes.

Tabel 4.2 is 'n verkorte weergawe van die eksperimentele data vir die genoemde tipes gesteentes. Imperiale waardes is na ekwivalente metrieke eenhede omgerek.

TABEL 4.2

Tipe gesteente	$\sigma_1, \sigma_3$ verwantskap (MPa)	$\tau, \sigma$ verwantskap (MPa)	Variasie-koëffisiënt (%)	Fraktuurhoek $\phi$	
				2 $\phi$ Bereken	2 $\phi$ Gemeet
Pennant sandsteen	$\sigma_1 = 153,75 + 5,0 \sigma_3$	$\tau = 35,16 + 0,90 \sigma$	5,1	48°	50°
Snowdown sandsteen	$\sigma_1 = 158,58 + 4,4 \sigma_3$	$\tau = 39,30 + 0,80 \sigma$	6,8	50°	52°

Dit is opmerklik dat die  $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$  asook die  $\tau$ ,  $\sigma$  verwantskappe deur Price as reglynig beskou word. Dit moet natuurlik binne die bestek van die variasiekoëffisiënt gesien word.

#### 4.3.1 Pennant Sandsteen

Die  $\tau$ ,  $\sigma$  verwantskap soos vermeld in tabel 4.2 vir hierdie gesteente is by benadering

$$\tau = 35,16 + 0,90 \sigma \quad (\text{MPa}) \quad \text{—————} \quad (4.1)$$

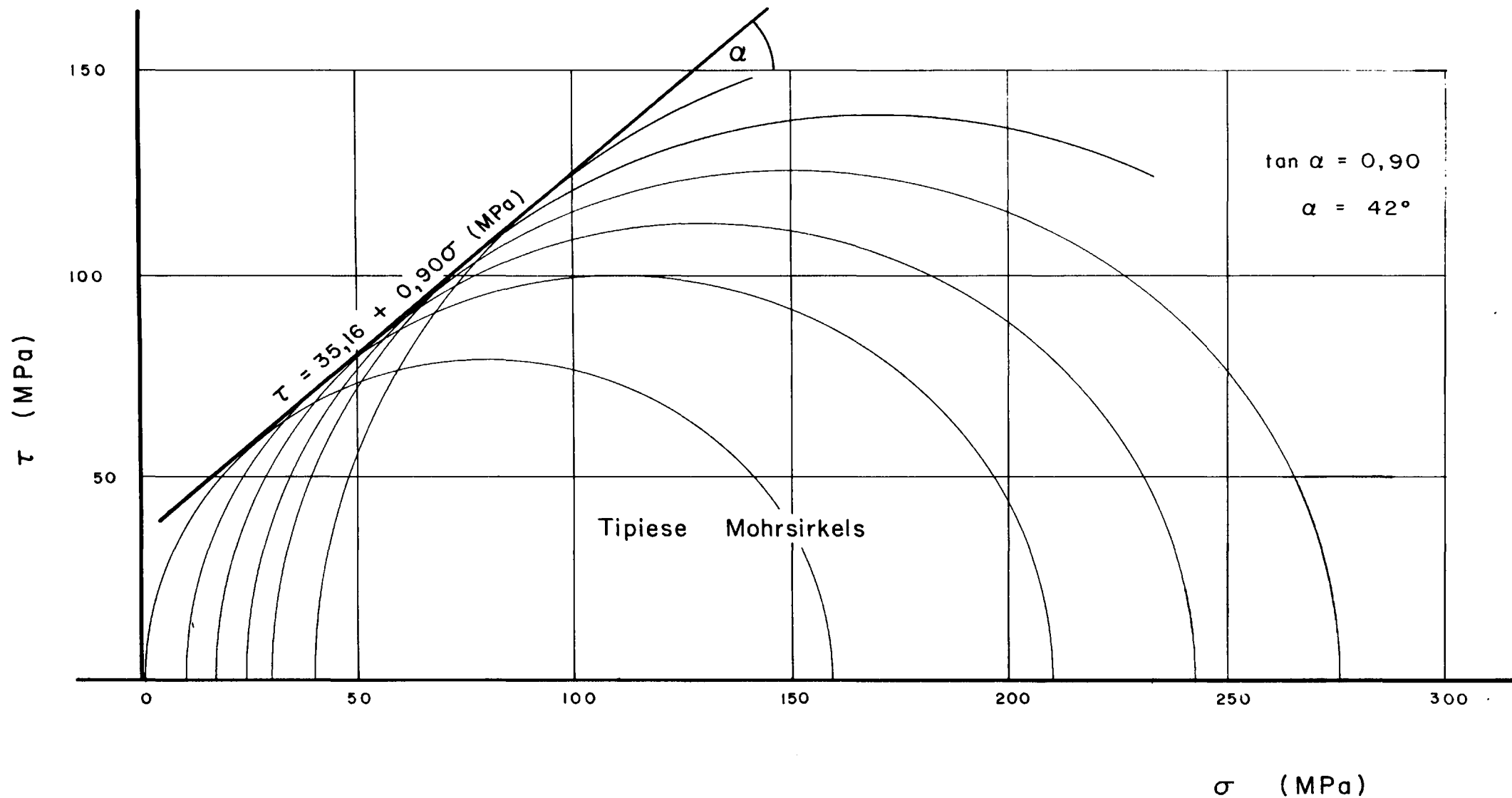
en stel die Mohrenvelop voor vir fraktuurtoetse waarin die  $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$  verwantskap gegee word deur

$$\sigma_1 = 153,75 + 5,0 \sigma_3. \quad (\text{MPa}) \quad \text{—————} \quad (4.2)$$

Die grafiese voorstelling van vergelyking 4.1 is soos in figuur 4.2 uitgebeeld.

Die variasie in Poissonnommer  $m = \frac{1}{\nu}$  met verandering in inklemspanning by verskeie vlakke van differensiële spanning ( $\sigma_1 - \sigma_3$ ) word deur Price grafies voorgestel.

Wanneer hierdie grafiese voorstelling analiseer word, word gemerk dat by die relatief lae waardes van  $\sigma_1$  en  $\sigma_3$  daar 'n aansienlike variasie in Poissonnommer is, maar dat afgelei kan word dat met verhoging van inklemspanning die krommes wat aange-  
toon is, uiteindelik by relatief hoë inklemspanning, die waarde van  $m = 4,38$  ( $\nu = 0,228$ ) sal bereik.



Voorstelling van fraktuurdata : Pennant Sandsteen

Figuur 4.2 © University of Pretoria

#### 4.3.2 Snowdown sandsteen

Die vergelyking vir die Mohrenvelop vir hierdie gesteente wat breek wanneer

$$\sigma_1 = 158,58 + 4,4 \sigma_3 \quad (\text{MPa}) \quad \text{—————} \quad (4.3)$$

is by benadering

$$\tau = 39,30 + 0,85 \sigma \quad (\text{MPa}) \quad \text{—————} \quad (4.4)$$

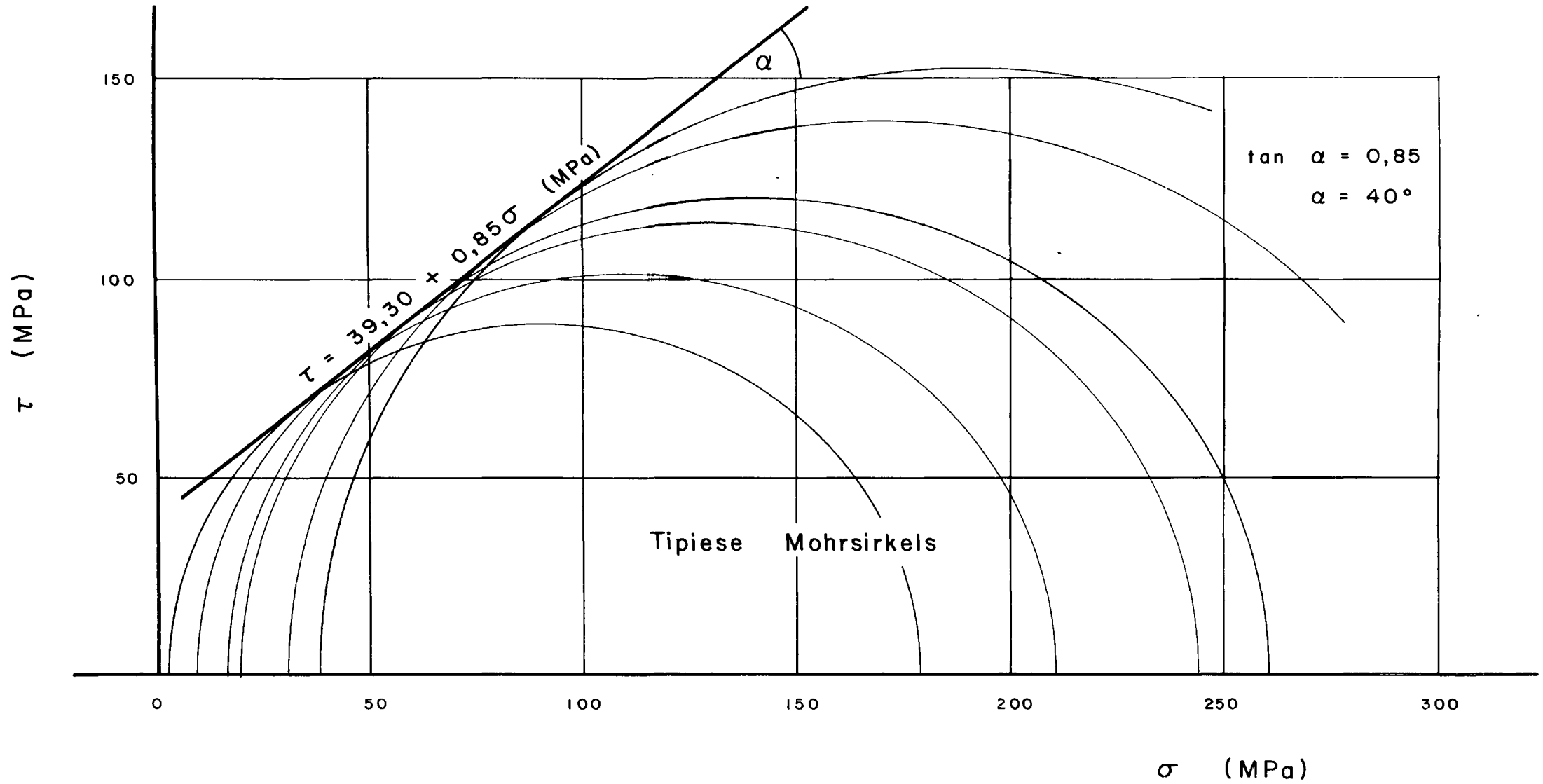
en word in figuur 4.3 getoon.

Vir hierdie gesteente word gemerk dat die Poissonverhouding by hoër spannings waarskynlik die waarde van 0,269 sal nader. Hierdie neiging van Poissonverhouding met betrekking tot spanning word deur Jaeger en Cook [1969 - (44)] bevestig.

#### 4.4 Toetse uitgevoer op materiaal afkomstig uit Gang 144 - E.R.P.M.

Hierdie toetse is uitgevoer deur Jeffery [1975 - (45)] en alhoewel dit, soos in die geval van paragraaf 4.2, ook materiaal is wat afkomstig is uit 'n gang, verskil die waardes van Poissonverhouding aansienlik in die twee gevalle. Die breeksterktes van die twee verskillende tipes gesteentes verskil ook soos te verwagte en soos gesien kan word wanneer die eksperimentele data van tabel 4-3 wat van toepassing is op gang 144 vergelyk word met dié vir chertagtige gangmateriaal.





32

Voorstelling van fraktuurdata : Snowdown Sandsteen.

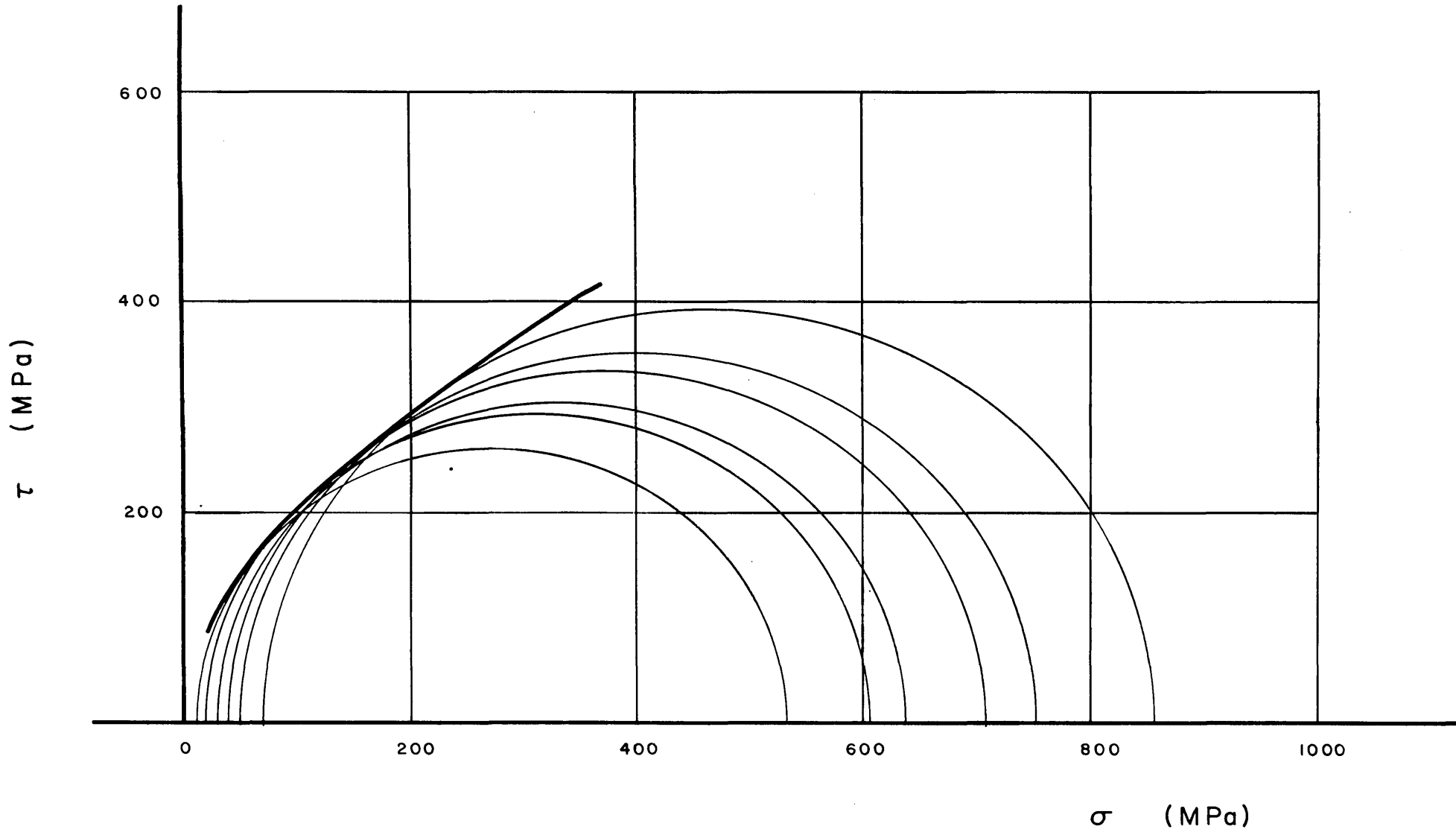
Figuur 4.3

TABEL 4.3DRIE-ASSIGE FRAKTUURDATA VIR MATERIAAL AFKOMSTIG UITGANG 144 - E.R.P.M.

$\sigma_1$ (MPa)	$\sigma_2 = \sigma_3$ (MPa)	$\mu = \tan \alpha$	$\alpha$	$2\phi$
534	10	1,8	61°	29°
604	20	1,5	56°	34°
637	30	1,3	52°	38°
711	40	1,25	51°	39°
755	50	1,2	50°	40°
855	70	1,1	48°	42°

Die gemiddelde waarde van die Poissonverhouding is  $\nu = 0,26$  met 'n standaardafwyking van 0,02.

Grafies word hierdie resultate voorgestel soos uitgebeeld in figuur 4.4.



Voorstelling van fraktuurdata – materiaal: gang 144 E.R.P.M.

Figuur 4.4

## HOOFSTUK 5

### VOORSTELLING VAN SPANNING IN 'N RUIMTE

#### 5.1 Inleiding

Die ondersoek van menige aspekte rakende Rotsmeganika, verg behendigheid in die hantering van drie-dimensionele geometrie. Hierbenewens is fundamentele kennis van spannings- en vervormingsanalise 'n noodsaaklike vereiste wanneer sodanige oefeninge in die Rotsmeganika deurgevoer word. Verskeie outeurs van geskrifte wat betrekking het op die meganika van vaste stowwe behandel die teorieë van elasticiteit baie breedvoerig, maar die oorgrootte meerderheid van die werke is egter meer gerig op die oplossing van probleme in die elasticiteit en nie soseer op die studie van spannings nie. Weinig van die werke bied ook duidelike sistematiese wyses waarvolgens die implikasies van variasie in spanning as gevolg van sekere veranderbare toestande interpreteer en bestudeer kan word. Die probleem is immers drie-dimensioneel ruimtelik van aard.

In hierdie hoofstuk word, benewens vermelding van sekere aspekte van drie-dimensionele spanningsanalise, die verspreiding van spanning in 'n liggaam met behulp van die stereografiese projeksie behandel. Die invloed wat die intermediêre hoofnormaalspanning  $\sigma_2$ , (d.i.  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ), wat as veranderlike hanteer word, het op die verspreiding van spanning in 'n liggaam,

terwyl  $\sigma_1$  en  $\sigma_3$  konstant gehou word, word grafies aangetoon.

## 5.2 Spanning in drie-dimensies

Die kubus met infinitesimale afmetings uitgebeeld in figuur 5-1(a) toon die nege spanningskomponente wat van toepassing is in hierdie geval. Indien die rigtings van die hoofnormaalspannings  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  en  $\sigma_3$  bekend sou wees, dan sou die normaalspanning  $\sigma_N$  op die vlak ABC in figure 5-1(b) en 5-1(c) waarin die rigtings van die asse OX, OY en OZ ooreenstem met die rigtings van die hoofnormaalspannings  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  en  $\sigma_3$  onderskeidelik, verkry word uit

$$\sigma_N = l^2\sigma_1 + m^2\sigma_2 + n^2\sigma_3 \quad \text{—————} \quad (5-1)$$

waar  $l$ ,  $m$  en  $n$  die rigtingscosinusse van die pool OP van die vlak ABC is.

$$l = \cos \alpha$$

$$m = \cos \beta$$

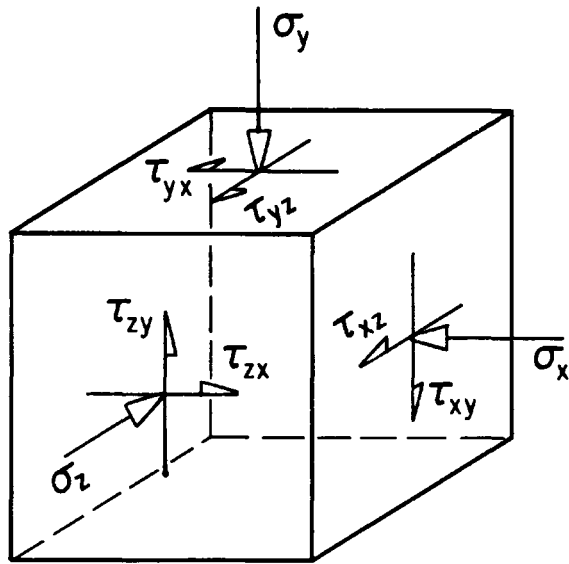
$$n = \cos \gamma$$

$$\text{en } l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad \text{—————} \quad (5-2)$$

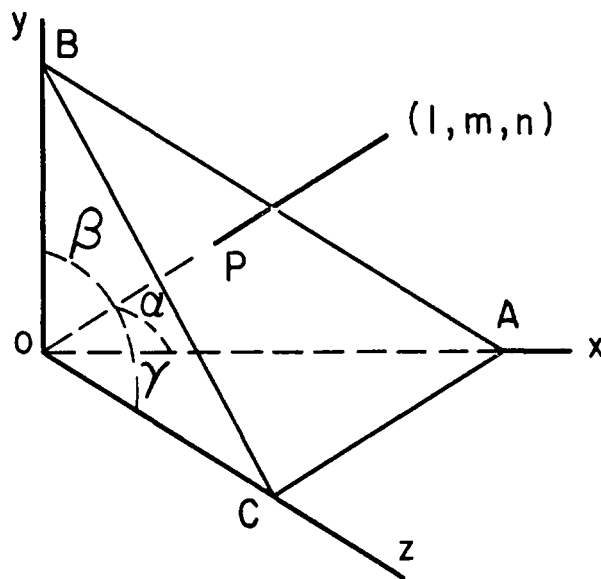
Die grootte van die resultante spanning  $\sigma_R$  word gegee deur

$$\sigma_R = \sqrt{l^2\sigma_1^2 + m^2\sigma_2^2 + n^2\sigma_3^2} \quad \text{—————} \quad (5-3)$$

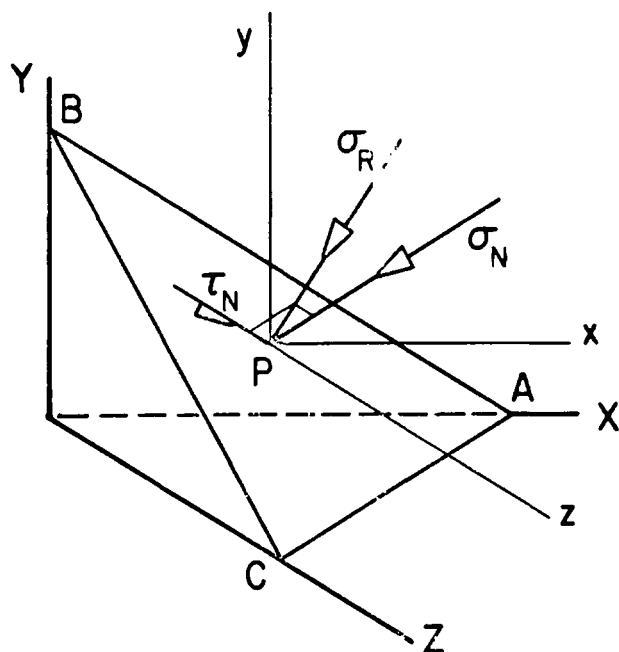
terwyl die grootte van die skuifspanning  $\tau_N$  wat in die vlak van  $\sigma_R$  en  $\sigma_N$  lê, voorgestel word deur



(a)



(b)



(c)

Figuur 5.1

$$\tau_N = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 l^2 m^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 m^2 n^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 n^2 l^2$$


---

 (5-4)

### 5.3 Die Spanningsellipsoïde

Die drie onderling loodregte komponente van die resultante spanning  $\sigma_R$ , vergelyking (5-3), oor die vlak ABC in figuur 5-1(c) is  $p_x$ ,  $p_y$  en  $p_z$  en kan voorgestel word deur

$$\begin{aligned} p_x &= l\sigma_1 \\ p_y &= m\sigma_2 \\ p_z &= n\sigma_3 \end{aligned}$$


---

 (5-5)

indien die rigtings van die hoofnormaalspannings  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  en  $\sigma_3$  ooreenstem met die assestelsel OXYZ van figuur 5-1(c). In die meer algemene geval sou die komponente egter

$$\begin{aligned} p_x &= l\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx} \\ p_y &= l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{zy} \\ p_z &= l\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n\sigma_z \end{aligned}$$


---

 (5-6)

wees.

Die komponente  $p_x$ ,  $p_y$  en  $p_z$  lê op 'n ellipsoïde met semi-asse  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  en  $\sigma_3$  en waarna verwys word as die *spanningsellipsoïde*. Die ellipsoïde word gekenmerk deur die verwantskap

$$\frac{p_x^2}{\sigma_1^2} + \frac{p_y^2}{\sigma_2^2} + \frac{p_z^2}{\sigma_3^2} = 1$$


---

 (5-7)



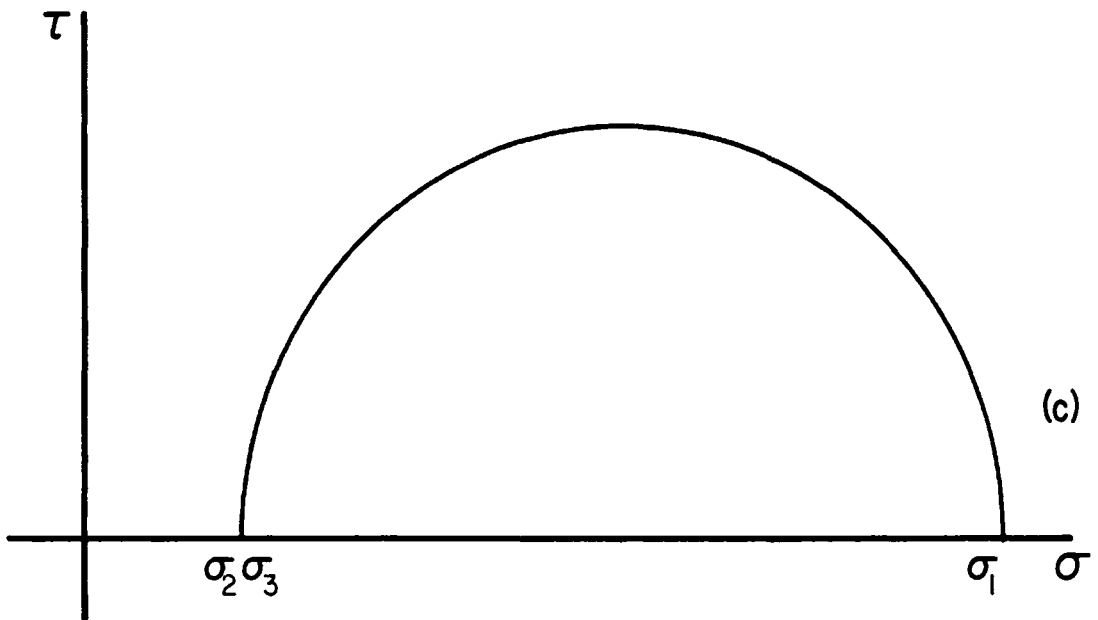
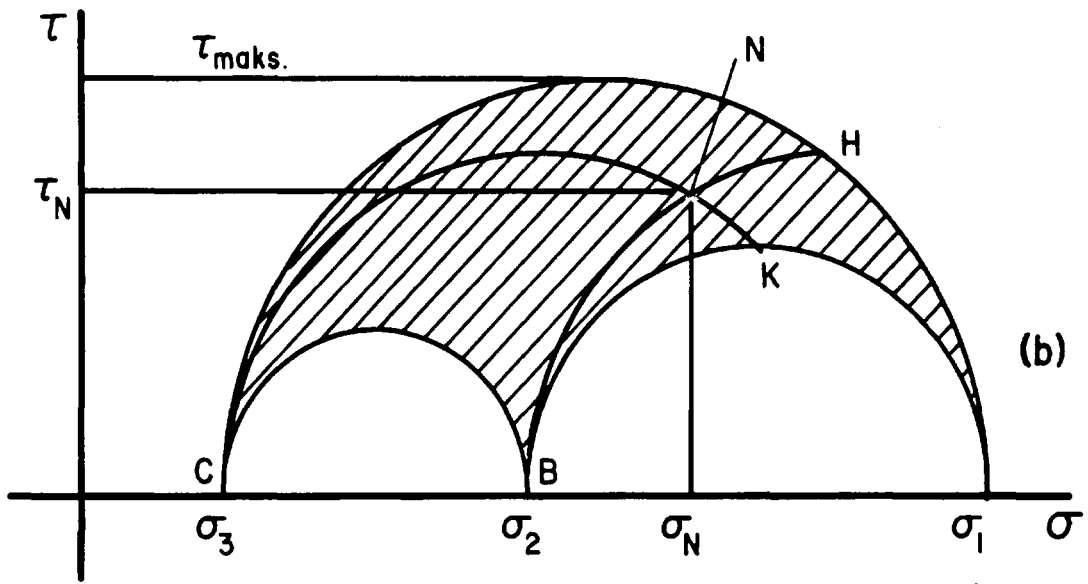
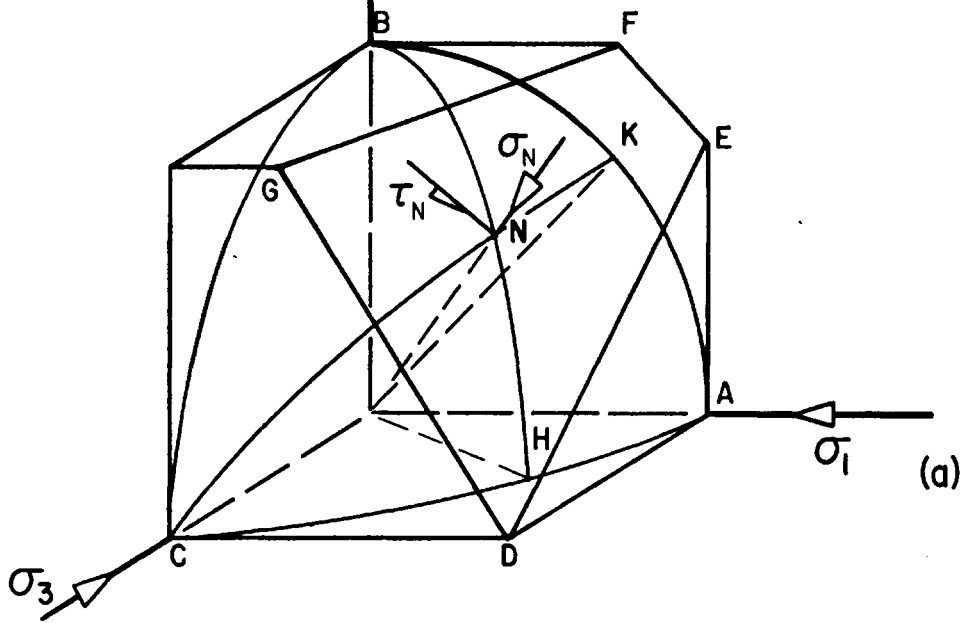


#### 5.4 Die Mohrdiagram

'n Drie-assige toestand van spanning kan ook met behulp van die Mohrdiagram voorgestel word. Hierdie konstruksie vorm 'n belangrike komponent van die Mohr-fraktuurteorie en ook van ander teorieë of wysigings of verklarings van die oorspronklike Mohrteorie.

Figuur 5-3(a) toon 'n drie assige toestand van spanning. Die normaalspanning  $\sigma_N$  en die skuifspanning  $\tau_N$  by die punt N in die vlak DEFG word verkry uit die konstruksie getoon in figuur 5-3(b). Die punte N op beide figure lê op die sny punte van die krommes CK en BH. In hierdie geval word  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  geneem, maar in die Rotsmeganika waar drie-assige druktoetse op rotsmonsters uitgevoer word, is die intermediêre hoofnormaalspanning  $\sigma_2$  gewoonlik gelyk aan die minimum hoofnormaalspanning  $\sigma_3$ ; sodat  $\sigma_1 > (\sigma_2 = \sigma_3)$ . Die Mohrdiagram vir so 'n toestand van spanning word getoon in figuur 5-3(c). Dit het die voorkoms van die bekende twee-dimensionele Mohrdiagram en word ook dikwels by berekeninge en interpretasie van spanningsvelde deur menige outeurs as sodanig verwar.

Die Mohrdiagram is 'n baie handige instrument by die hantering van probleme in die meganika van vaste stowwe, maar bied nie in die drie-dimensionele geval 'n eenvoudige sistematiese uitbeelding van 'n sekere spanningsveld nie.



© University of Pretoria  
 Figure 5.3

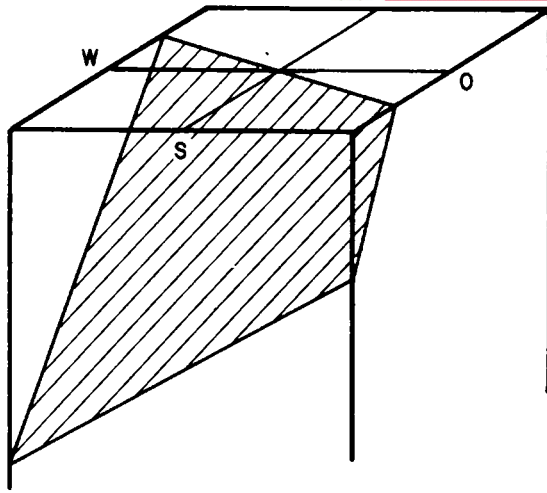
## 5.5 Die Stereografiese Projeksie

Hierdie metode word gekenmerk deur sy eenvoud van toepassing, die relatief hoë oplossingspoed en die baie netjiese voorstelling van drie dimensionele geometrie. Dit dien as algemene hulpmiddel vir struktuurgeoloë en, veral by die studie van kristallografie, mineralogie en sulkesoortige vakke waar die sistematiese oplossing en bestudering van ruimtelike probleme aan die orde van die dag is, word die stereografiese projeksie metode ook dikwels gebruik.

Die beeld wat verkry kan word en bestudeer kan word, is afkomstig van 'n stereografiese projeksie op 'n ekwatoriale vlak van 'n sferiese projeksie van 'n vlak in die ruimte wat 'n bekende oriëntasie ten opsigte van 'n sekere asstelsel het. Figure 5-4(a) tot (d) toon die breë beginsel hiervan kortliks aan, terwyl Phillips [1963 - (57)] die onderwerp stelselmatig en breedvoerig behandel.

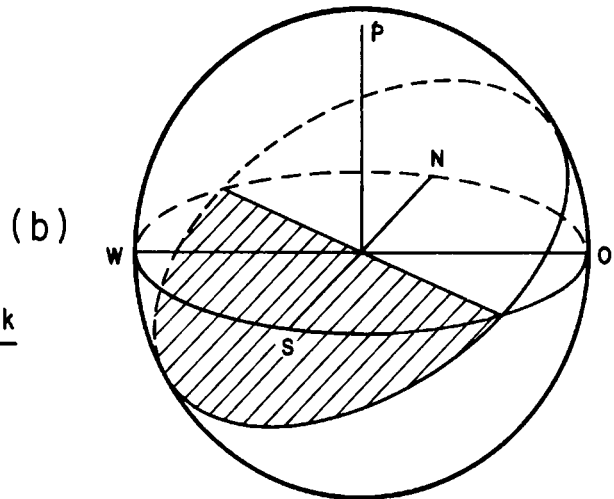
### 5.5.1 Die gebruik van die stereografiese projeksie by die bestudering van spanningsvelde.

Die normaalspanning  $\sigma_N$  op die vlak ABC getoon in figure 5-1(b) en 5-1(c) word gegee in terme van die hoofnormaalspannings en die rigtingscosinusse van die pool OP van die vlak ABC ten opsigte van die



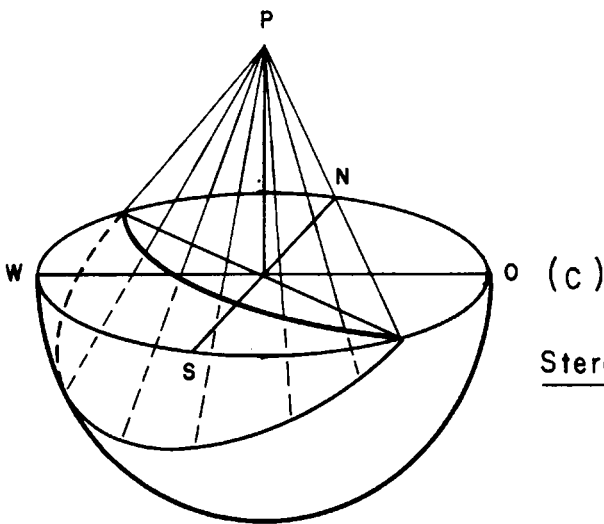
(a)

Blokdiagram van 'n vlak

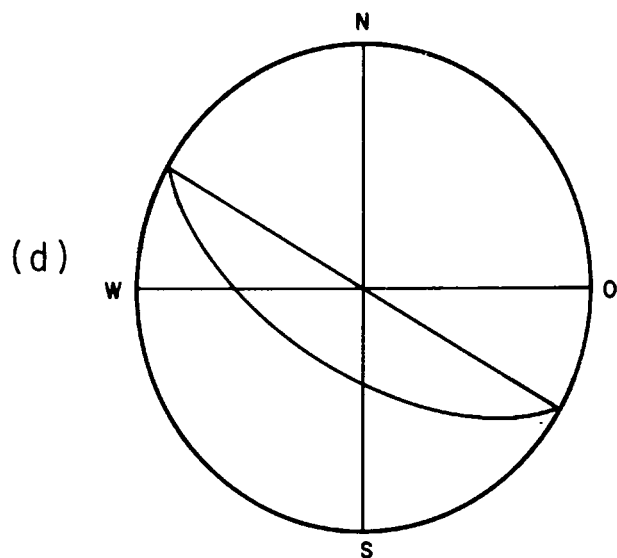


(b)

Sferiese projeksie van die vlak



Stereografiese projeksie van die vlak



(d)

Stereogram van die vlak

besondere assestelsel en oorsprong - of te wel

$$\sigma_N = l^2\sigma_1 + m^2\sigma_2 + n^2\sigma_3 \quad \text{-----} \quad (5-1)$$

met  $l = \cos \alpha$ ,

$$m = \cos \beta,$$

$$n = \cos \gamma$$

$$\text{en } l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad \text{-----} \quad (5-2)$$

Indien  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  en  $\sigma_3$  dus bekend is en die pool OP word om die punt 0 in die ruimte roteer, dan kan vir elke posisie van OP die normaalspanning op 'n vlak vir daardie posisie van OP bereken word. Op soortgelyke wyse kan die grootte van die skuifspanning  $\tau_N$  afkomstig uit

$$\tau_N = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 l^2 m^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 m^2 n^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 n^2 l^2 \quad \text{-----} \quad (5-4)$$

ook bereken word vir elke posisie van OP. Die rigting van  $\tau_N$  kan verkry word uit die grootte van die resultante spanning  $\sigma_R$ , naamlik

$$\sigma_R = \sqrt{l^2\sigma_1^2 + m^2\sigma_2^2 + n^2\sigma_3^2} \quad \text{-----} \quad (5-3)$$

en die rigtingscosinusse van  $\sigma_R$  naamlik

$$l_{\sigma_R} = l \frac{\sigma_1}{\sigma_R}$$

$$m_{\sigma_R} = m \frac{\sigma_2}{\sigma_R}$$

$$\text{en } n_{\sigma_R} = n \frac{\sigma_3}{\sigma_R} \quad \text{-----} \quad (5-8)$$

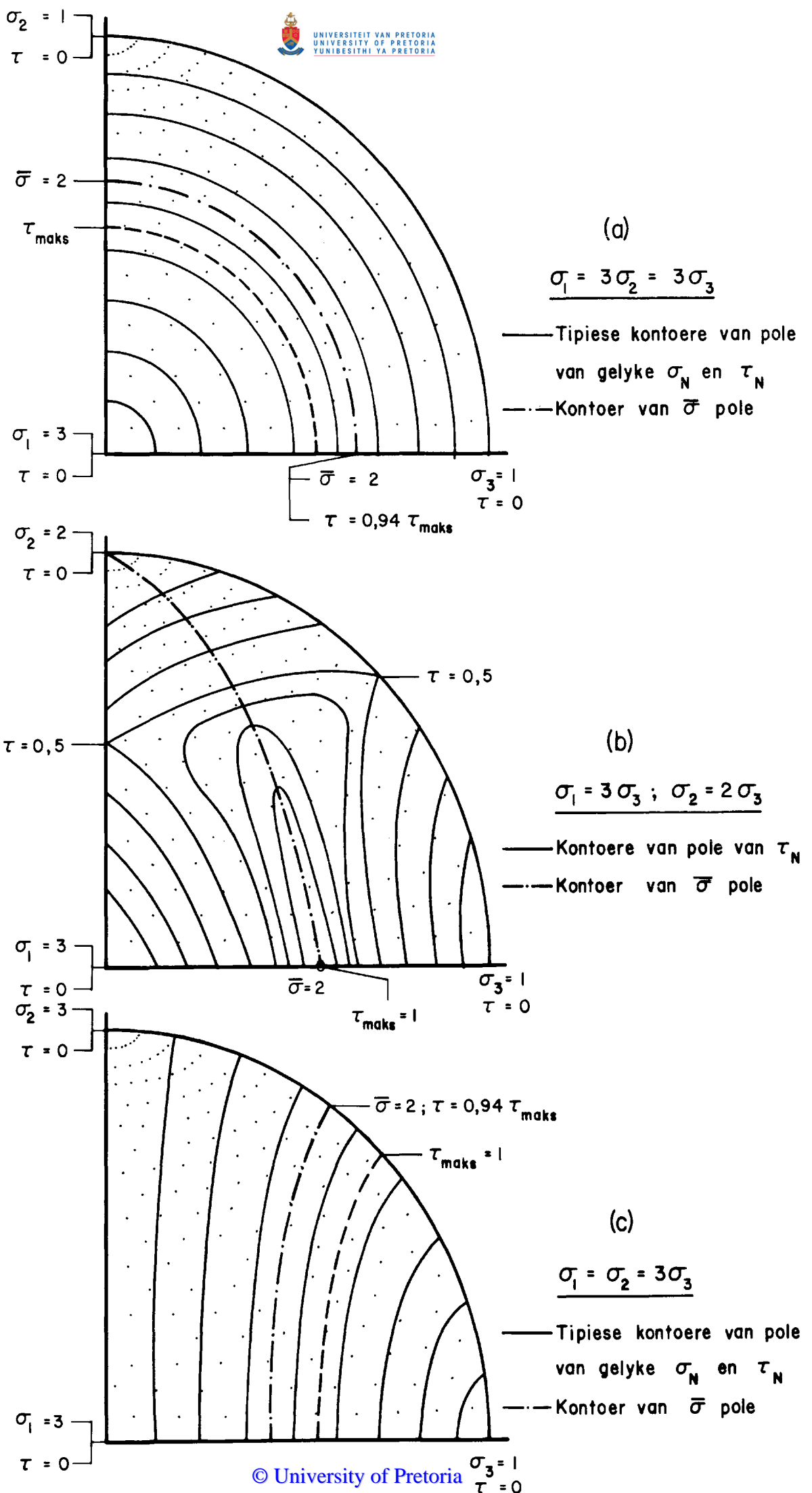
omdat  $\tau_N$  in die vlak van  $\sigma_R$  en  $\sigma_N$  lê.

Met behulp van die Wulff-net of Meridionale stereonet kan gerieflike posisies van OP gekies word. (Die projeksie van 'n pool is 'n punt op die ekwatoriale vlak.) Hieruit is die rigtingsconsinusse van die pool by die verskillende posisies bekend. Vervanging van hierdie bekende waardes van rigtingsconsinusse in vergelyking (5-1) tesame met 'n toegepaste, dus bekende spanningstoestand, kan die verspreiding van normaalspanning deur die hele netwerk bereken en kontoer word.

Figure 5-5(a), (b) en (c) is kwadrante van die net wat die kontoere van  $\sigma_N$  vir die volgende toestande uitbeeld.

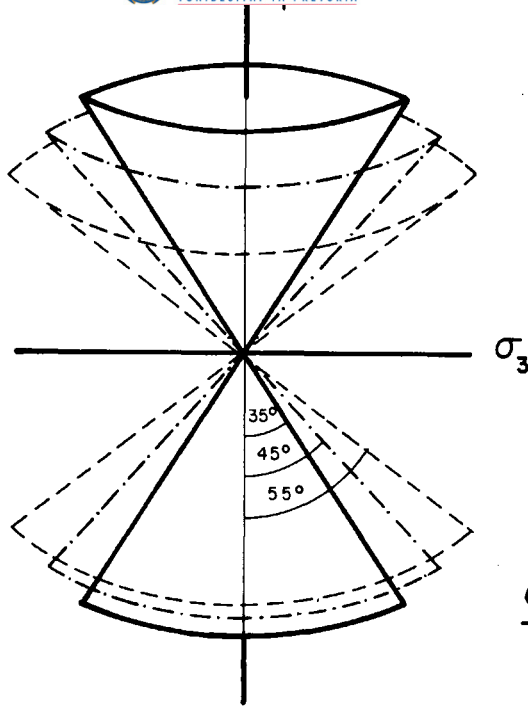
Geval	Figuur	Spanningstoestand
I	5-5 (a)	$\sigma_1 = 3\sigma_2 = 3\sigma_3$
II	5-5 (b)	$\sigma_1 = 3\sigma_3$ $\sigma_2 = 2\sigma_3$
III	5-5 (c)	$\sigma_1 = \sigma_2 = 3\sigma_3$

Die kontoere van figure 5-5 het betrekking op pole van vlakke waarop gelyke normaalspanning



Figuur 5.5

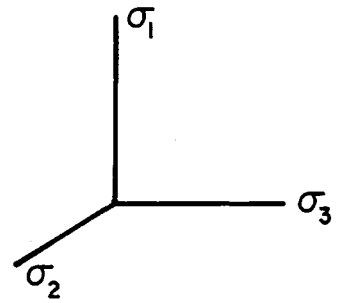
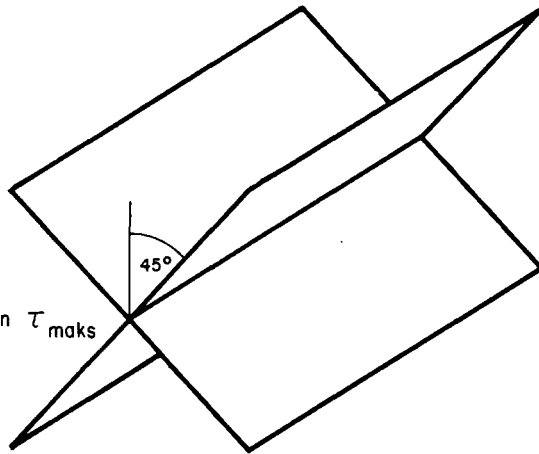
—  $\bar{\sigma}$  vlak  
 - - -  $\tau_{maks}$   
 - - -  $\bar{\sigma}$  pole



(a)

$\sigma_1 = 3\sigma_2 = 3\sigma_3$

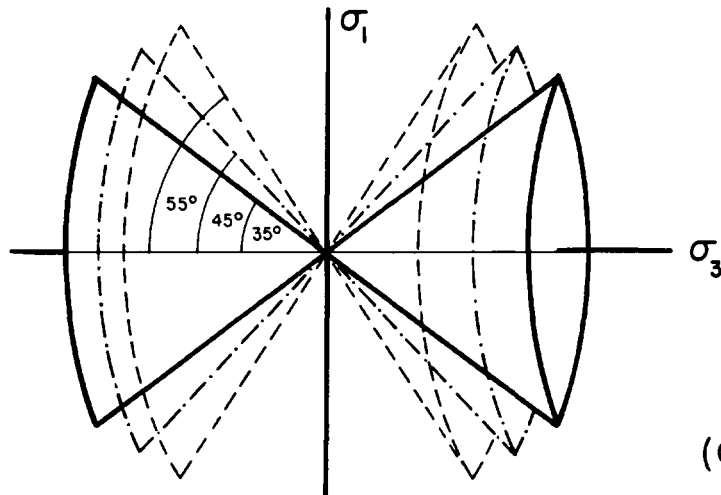
'n vlak van  $\bar{\sigma}$ ; ook die vlak van  $\tau_{maks}$



(b)

$\sigma_1 = 3\sigma_3; \sigma_2 = 2\sigma_3$

—  $\bar{\sigma}$  vlak  
 - - -  $\tau_{maks}$   
 - - -  $\bar{\sigma}$  pole



(c)

$\sigma_1 = \sigma_2 = 3\sigma_3$

Figuur 5.6

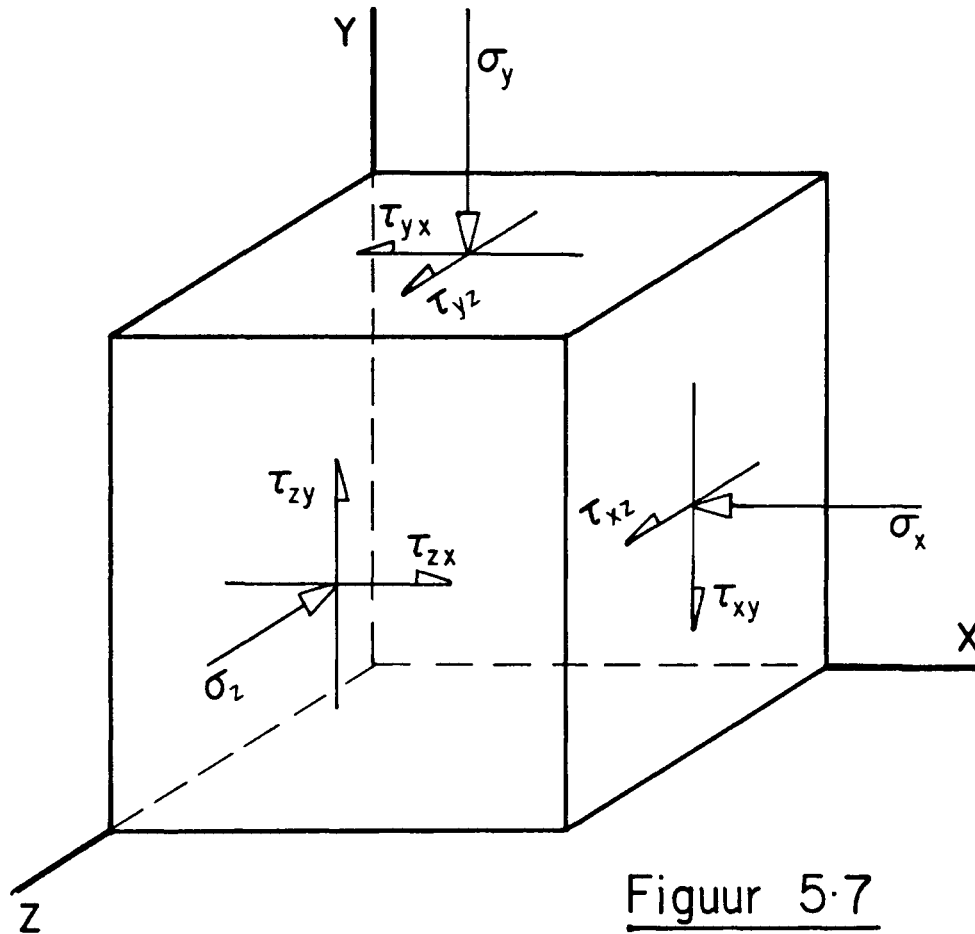


voorkom. Figure 5-6(a), (b) en (c) toon telkens die vlakke waarop die invariante normaalspanning  $\bar{\sigma} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$  inwerk vir gevalle I, II en III van figure 5-5 respektiewelik.

Die relatiewe waardes van  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  en  $\sigma_3$  vir die gevalle hierbo, is so gekies om die rol wat die intermediêre hoofnormaalspanning  $\sigma_2$  kan speel in die verspreiding van spanning in 'n liggaam, aan te toon. Dit kan duidelik gesien word dat deur die grootte van  $\sigma_2$  te varieer tussen die waardes van  $\sigma_3$  en  $\sigma_1$ , terwyl  $\sigma_3$  en  $\sigma_1$  relatief tot mekaar dieselfde waardes behou, daar 'n duidelike verskuiwing van verspreiding van spanning plaasvind, of te wel verskuiwing van vlakke van byvoorbeeld 'n invariante spanning soos  $\bar{\sigma}$ . Hierdie verskynsel word interpreteer as voldoende aanduiding dat  $\sigma_2$  'n betekenisvolle rol speel in die geometriese analise van drie-dimensionele spanningstoestande.

## 5.6 Die Spanningtensor

Die nege spanningskomponente wat die toestand van spanning by enige punt beskryf kan in matriksvorm gerangskik word en beskryf 'n fisiese kwantiteit wat as die *spanningtensor* bekend staan. Die algemene toestand van spanning by 'n punt kan diagrammaties soos volg uitgebeeld word.



Figuur 5.7

Die spanningtensor vir hierdie geval in matriks-  
 vorm lyk soos volg

$$\begin{vmatrix}
 \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\
 \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\
 \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z
 \end{vmatrix}
 \quad \text{-----} \quad (5-9)$$

en deur die transformasie van spanning van een asse-  
 stelsel tot 'n ander sou, indien die asse met die  
 hoofspanningsrigtings saamval, die tensor voorgestel  
 word deur

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} \quad \text{-----} \quad (5-10)$$

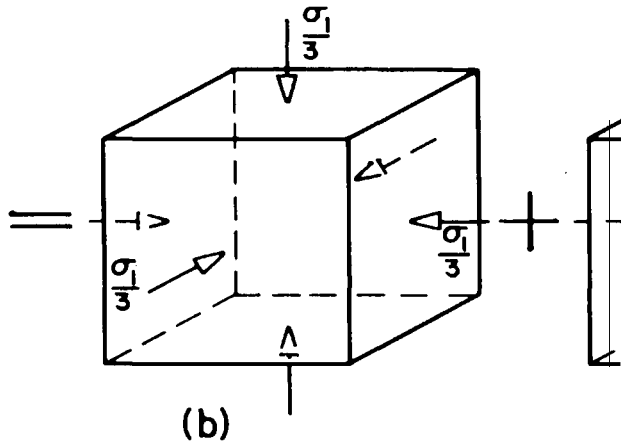
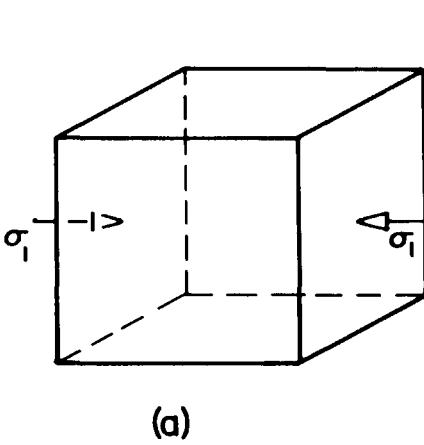
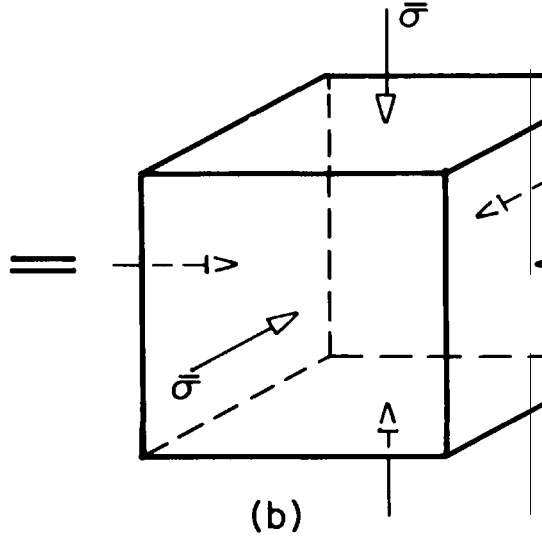
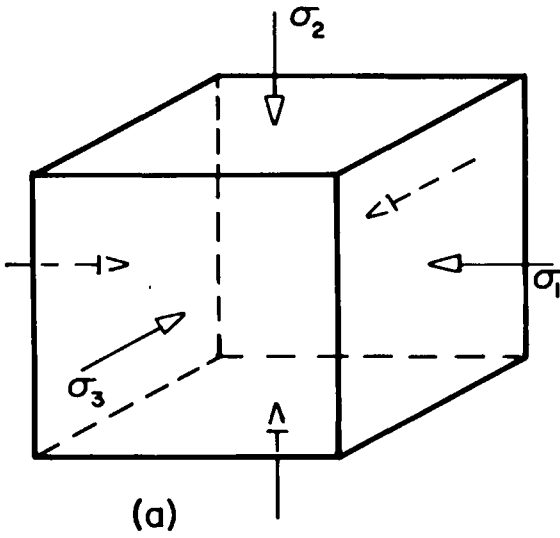
Gebaseer op die konsep van superposisie, kan spanningsanalise uitgevoer word deur die spanning-tensor te ondersoek deur die toepassing van die matriksteorieë. So kan die spanningtensor uitgedruk word om te bestaan uit twee saamgevoegde komponenttensore, waar die elemente van die een komponenttensor byvoorbeeld gedefinieer word as die gemiddelde spanning of „hidrostatiese“-spanning of oktahedralespanning of  $\frac{1}{3}$  die grootte van die invariant  $(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$ , naamlik

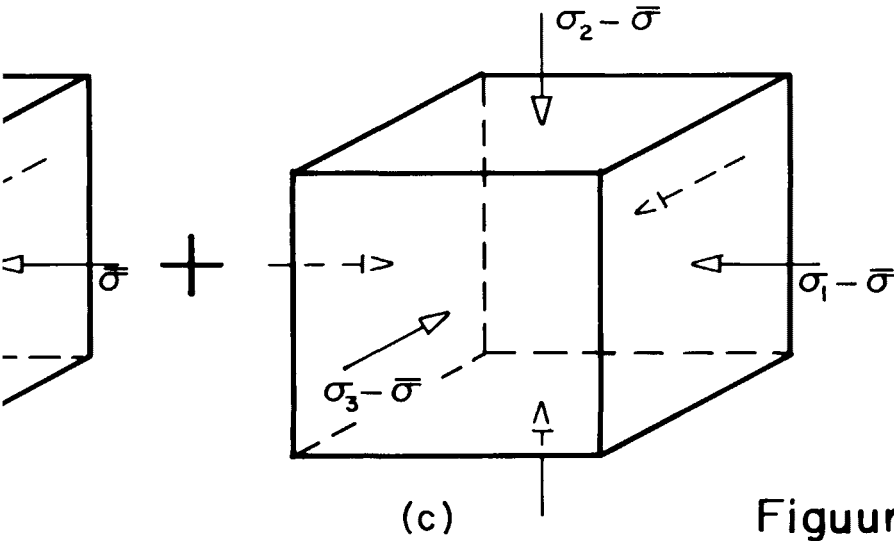
$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

Die elemente van die ander komponenttensor is dan  $(\sigma_1 - \bar{\sigma})$ ,  $(\sigma_2 - \bar{\sigma})$  en  $(\sigma_3 - \bar{\sigma})$  sodat wanneer dit in matriksvorm voorgestel word, dit soos volg lyk:

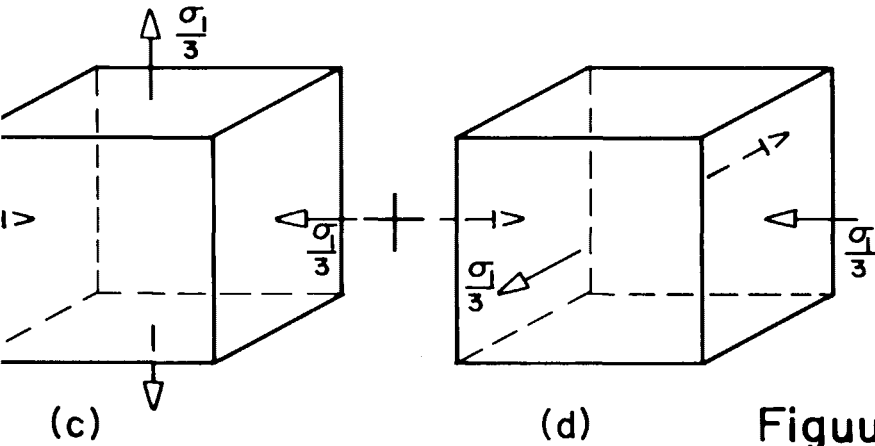
$$\begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_1 - \bar{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \bar{\sigma} \end{vmatrix} \quad \text{-----} \quad (5-11)$$

Die diagrammatiese voorstelling van bogenoemde word in figuur 5-8 aangetoon. Figuur 5-9 toon 'n spesiale geval waarin die eenassige toestand van spanning nog verder afgetakel word, dit wil sê, die





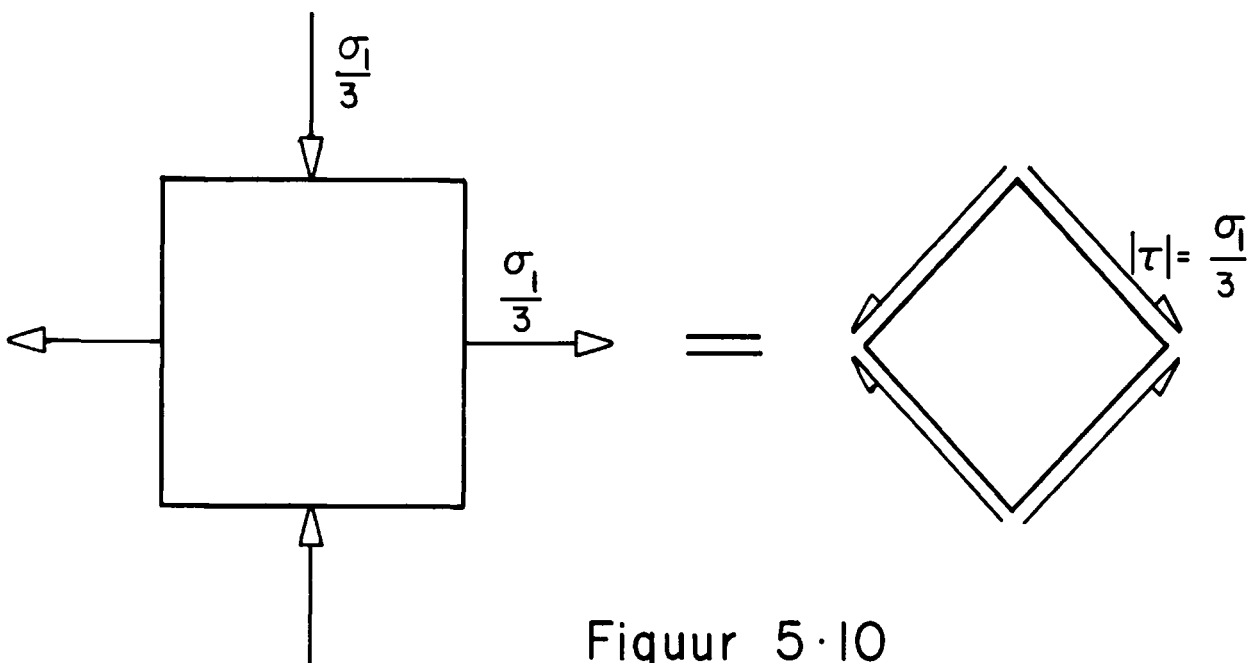
Figuur 5·8



Figuur 5·9

som van die spannings in figure 5-9 (c) en (d) stem met die laaste komponenttensor van vergelyking (5-11) ooreen.

Aangesien die spanningselemente van die eerste komponenttensor van vergelyking (5-11) dieselfde is in elke moontlike rigting, staan dit as die *sferiese spanningtensor* of as die *dilatasionele spanningtensor* bekend, omdat die dilatasie van 'n elastiese liggaam proporsioneel is aan  $\bar{\sigma}$ . Hierbenewens staan die laaste komponenttensor van vergelyking (5-11) as die *afwykende-* of *distorsionele spanningtensor* bekend, omdat die spanningstoestand wat heers en wat gesien kan word in figure 5-9 (c) en (d), bestaan uit gelyke trek- en drukspanning op onderling loodregte vlakke. Laasgenoemde is die ekwivalent van suiwer skuifspanning soos diagrammaties in figuur 5-10 aangetoon word en word gekenmerk deurdat dit



Figuur 5.10

geen volumetriese verandering veroorsaak nie, maar  
wel die oorspronklike kubiese vorm van die elemente  
verwring of daarvan laat afwyk.

## HOOFSTUK 6

### 'N MOONTLIKE FRAKTUURVLAK

#### 6.1 Inleiding

Die eksperimentele werk getabuleer en ook grafies voorgestel in hoofstuk 4 toon dat die fraktuurvlak 'n oriëntasie van  $14,5^\circ$  tot  $34^\circ$  met die maksimum hoofnormaalspanningrigting het. Hoek [1965 - (37)] vermeld dat die inherente krake van die materiaal met oriëntasie  $20^\circ$  tot  $30^\circ$  vanaf die rigting van maksimum hoofnormaalspanning die mees kritieke sal wees by fraktuurvoortplanting, terwyl die toetse en observasies van Handin en andere [1967 - (32)] op Blair dolemiet die oriëntasie van die fraktuurvlak tussen  $24^\circ$  en  $34^\circ$  stel.

Met hierdie eksperimenteel bewese verskynsel in gedagte en die reedsvermelde betroubaarheid van die gewilde Mohr-fraktuurkriterium, het Roering en Van der Merwe [1975 - (62)] tot die slotsom laat raak dat die vlak waarop die invariante normaalspanning  $\bar{\sigma} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$  inwerk 'n besonder geskikte vlak vir fraktuurvorming kan wees. Deur hierdie vlak te ondersoek met behulp van die Mohrkonstruksie vir die drie-assige spanningstoestande waarna in hoofstuk 5 verwys word, word aangetoon dat die gemiddelde normaalspanningsvlak weliswaar 'n baie gunstige oriënta-



sie het, maar dat dit geometries 'n konstante oriëntasie het met die maksimum hoofnormaalspanningsrigting en ook geheel en al onafhanklik van die waardes van  $\sigma_1$  met betrekking tot  $\sigma_3 = \sigma_2$  is. Die term drie-assige spanningstoestand verwys na die geval  $\sigma_1 > (\sigma_2 = \sigma_3) > 0$ , terwyl die term poli-assig die geval  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > 0$  beskryf.

'n Verklaring wat lei tot 'n konstante oriëntasie van die fraktuurvlak met betrekking tot die  $\sigma_1$ -as is nie in ooreenstemming met eksperimentele waarnemings nie. Indien egter van die standpunt uitgegaan word dat die gemiddelde normaalspanningsvlak wel waarskynlik die kritieke fraktuurvlak is en dit gekoppel word met die variasie in oriëntasie van die fraktuurvlak tydens drie-assige toetse op verskillende bros gesteentetipes, moet daar 'n materiaalafhanklike beskrywing vir die fraktuurvlak bestaan.

In hierdie hoofstuk word die bogenoemde argumente meer breedvoerig uiteengesit wat eintlik 'n moontlike materiaalafhanklike verklaring van die Coulomb-Navier interne wrywingskoeffisiënt impliseer.

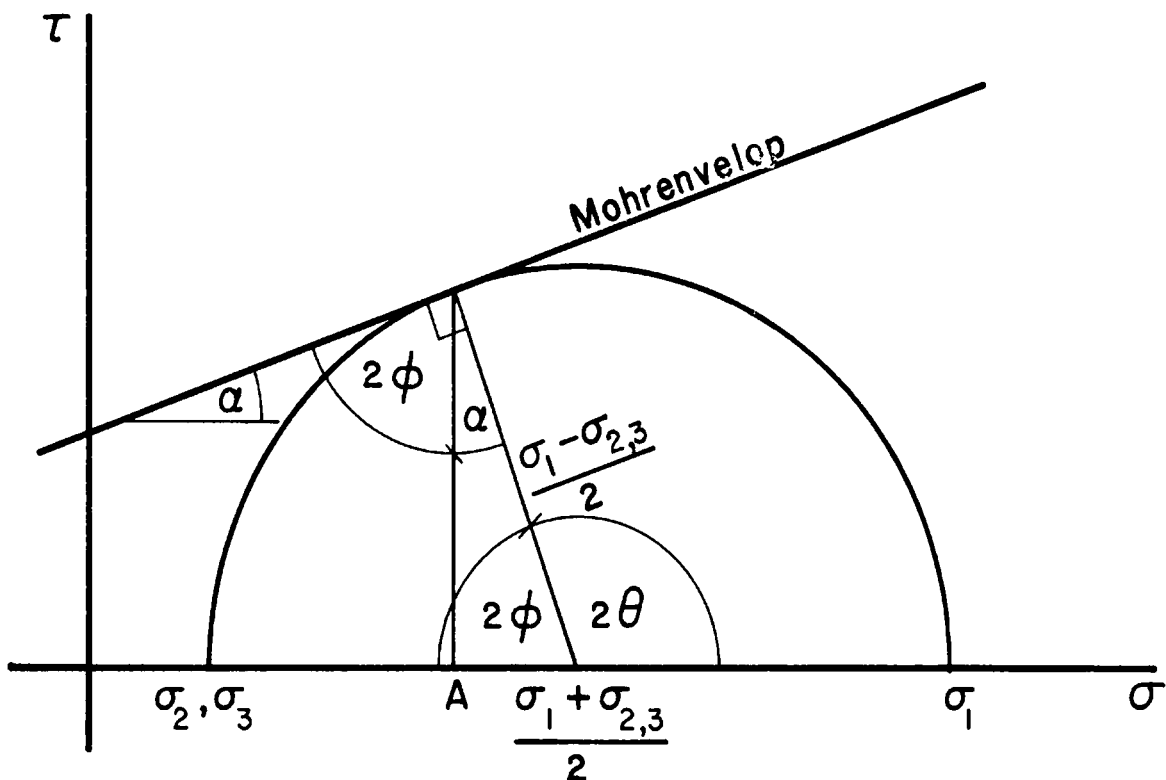
## 6.2 Oriëntasie van die gemiddelde normaalspanningsvlak

Dit is reeds in paragraaf 3.4 aangetoon dat die helling van die Mohrenvelop  $\tan \alpha$  gelyk is aan die interne wrywingskoeffisiënt  $\mu$  afkomstig uit die

Coulomb-Navierteorie, of te wel

$$\tan \alpha = \mu \quad \text{—————} \quad (3-16)$$

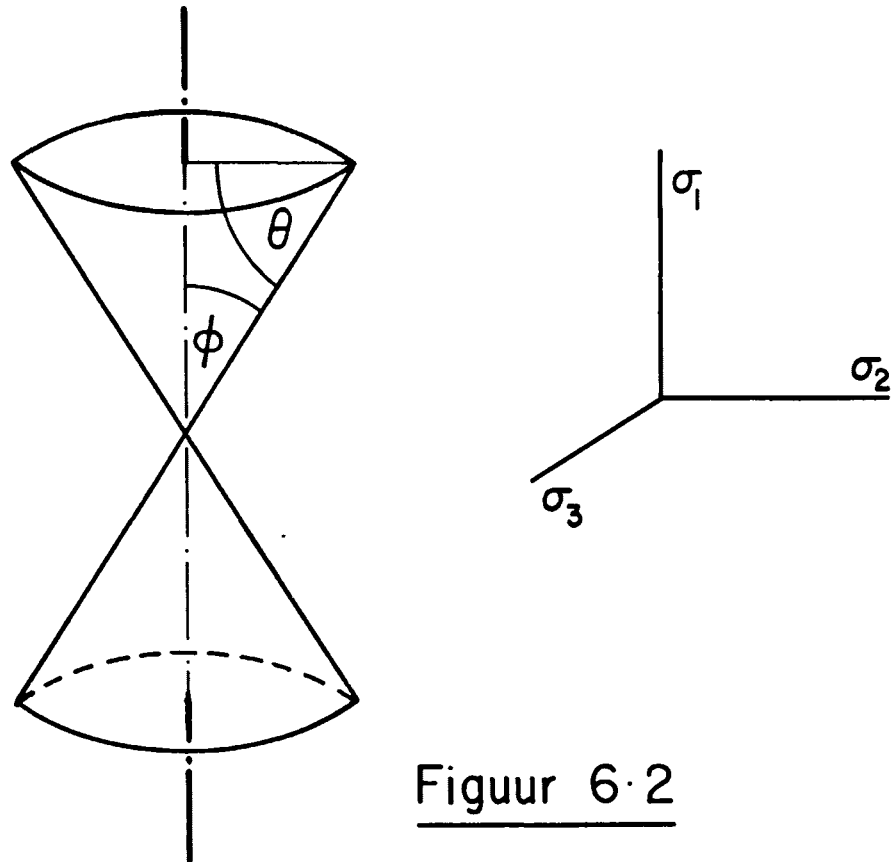
Hierdie verwantskap is van toepassing op reguitlyn-Mohrenvelpe vir drie-assige spanningstoestande wat tot fraktuurvorming sal lei. Figuur 6-1 toon so 'n voorstelling diagrammaties aan.



Figuur 6.1

Om instaat te kan wees om die helling van die Mohrenvelpe uit figuur 6-1 te vind, moet die normaalspanning, deur punt A in die figuur verteenwoordig, gevind word. Dit sal dan ook die normaalspanning

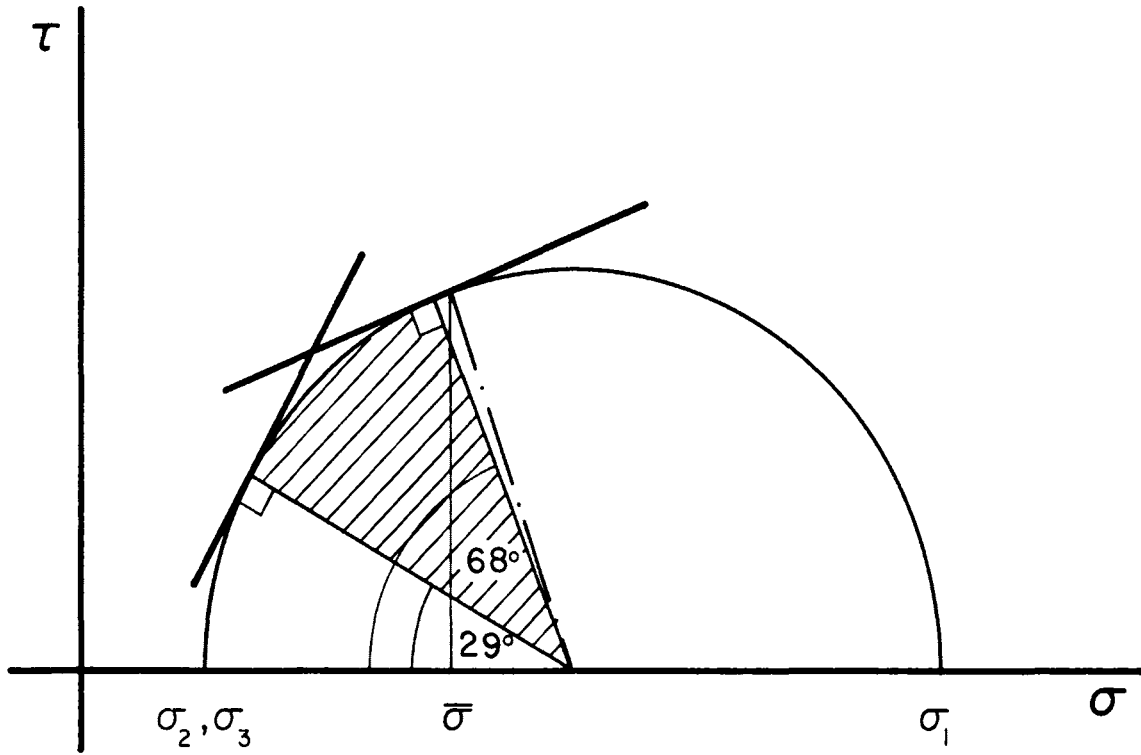
op die koniese fraktuurvlak wees waarna in hoofstuk 5 verwys is en wat in figuur 6-2 uitgebeeld word.



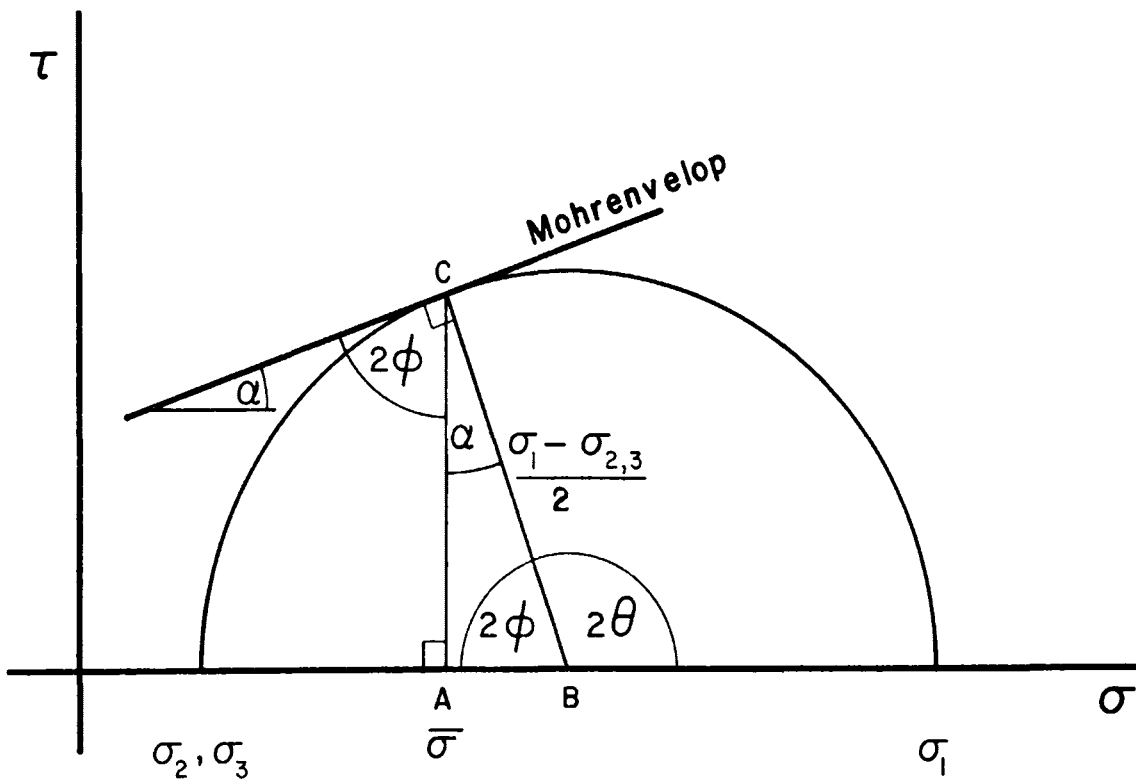
Figuur 6.2

Die enkele eksperimentele werke vermeld in hoofstuk 4 wat verteenwoordigend is van eksperimentele werk van hierdie aard, dui aan dat die oriëntasie  $\phi$  van die fraktuurvlak varieer binne die grense  $14,5^\circ$  tot  $34^\circ$ . Hierdie variasie in oriëntasie word in figuur 6-3 deur die gearseerde gebied aangedui.

'n Ondersoek van figuur 6-3 bring aan die lig dat die vlak waarop die invariante gemiddelde nor-



Figuur 6.3



Figuur 6.4

maalspanning inwerk 'n gunstige oriëntasie het soos  
 deur  $\bar{\sigma}$  aangedui word.      Figuur 6-4 toon die  
 Mohrenvelop teen die helling  $\tan \alpha = \mu$  wat die  
 Mohrsirkel vir 'n drie-assige spanningstoestand  
 raak by die punt C.    Dit dui verder aan dat die  
 kritieke fraktuurvlak die helling  $\phi$  maak met die  
 rigting van die maksimum hoofnormaalspanning  $\sigma_1$  en  
 dat die normaalspanning op die kritieke fraktuurvlak  
 gelyk is aan  $\bar{\sigma}$  waar  $\bar{\sigma} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$  .

Uit die geometrie van figuur 6-4 is

$$\sin \alpha = \frac{AB}{BC} \quad \text{-----} \quad (6-1)$$

$$\text{waar } AB = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

$$\text{en } BC = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

en aangesien  $\sigma_2 = \sigma_3$  is

$$AB = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{6}$$

sodat

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{6}}{\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}} \\ &= \frac{1}{3} \quad \text{-----} \quad (6-2) \end{aligned}$$

Vergelyking (6-2) impliseer dat die helling van die Mohrenvelop gelyk is aan

$$\tan \alpha = 0,3536 \quad \text{—————} \quad (6-3)$$

en daardeur is die interne wrywingskoëffisient  $\mu$  ook

$$\mu = 0,3536. \quad \text{—————} \quad (6-4)$$

Verder sal

$$\cos 2\phi = \frac{1}{3} \quad \text{—————} \quad (6-5)$$

waaruit

$$2\phi = 70,528^\circ \quad \text{—————} \quad (6-6)$$

$$\text{en dus } \phi = 35,264^\circ \quad \text{—————} \quad (6-7)$$

### 6.3 Faktore wat aanleiding gee tot die keuse van die gemiddelde normaalspanningsvlak

Benewens dat die oriëntasie van die gemiddelde normaalspanningsvlak gunstig vergelyk met die oriëntasie van die werklike fraktuurvlakke soos waargeneem en waarna reeds verwys is in die voorafgaande paragrawe, is daar ook ander argumente en besondere eienskappe wat die keuse van die invariante gemiddelde normaalspanningsvlak as potensiële fraktuurvlak ondersteun.

Seely en Smith [1952 - (69)] verwys na die gemiddelde normaalspanningskomponent as die waarskyn-

like oorsaak van fraktuurvorming terwyl die skuifspanning op hierdie vlak assosieer kan word met swigting en onelastiese aksie - 'n sienswyse wat deur Boresi en Lynn [1974 - (10)] ondersteun word. Jaeger [1964 - (43)] verwys na die belangrike vereiste van 'n swigtingskriterium naamlik dat swigting onafhanklik van die keuse van die asse plaasvind en daarom moet die kriterium invariant wees met betrekking tot die rotasie van die asse. Hierdie logiese stelling dui ook ondubbelsinnig aan dat die invariante spanningskomponent 'n waarskynlike sleutel tot fraktuurstudies kan wees.

Die gemiddelde normaalspanningsvlak het reeds heelwat aandag geniet soos onder andere deur Seely en Smith [1952 - (69)] en ook Timishenko [1958 - (72)], om slegs enkele voorbeelde te noem, aangedui is. Daar word dikwels na dié vlak as die oktahedrale spanningsvlak verwys. Dit is egter reeds in hoofstuk 5 aangetoon, dat die gemiddelde normaalspanning in die geval van 'n drie-assige toestand van spanning nie noodwendig op die sye van 'n oktaheder inwerk nie, maar wel op 'n koniese vlak.

### 6.3.1 Gemiddelde en afwykende spanningstensore

Die gebruik van die spanningstensor as nuttige instrument in die analise van spanningsvelde is reeds in paragraaf 5-6 aangetoon. Verskeie outeurs,

waaronder Boresi [1974 - (10)] en Popov [1968 - (58)], hanteer hierdie aspek in hulle geskrifte, maar kom tot geen slotsom by die bespreking van die fisiese betekenis van komponenttensore nie. Die gemiddelde normaalspanningstensor en gepaardgaande afwykende-tensor wat weer in komponenttensore afgetakel kan word, is reeds in hoofstuk 5 behandel, maar gebaseer op die stellings van onder andere Boresi [1974 - (10)] en Seely en Smith [1952 - (69)] waarin die gemiddelde normaalspanningsvlak by implikasie as „kritieke” vlak na verwys word, word die spanningstensor nou deur skrywer vir 'n drie-assige toestand van spanning aangebied.

Die spanningstensor vir die drie-assige toestand van spanning, dit is  $\sigma_1 > (\sigma_2 = \sigma_3)$ , word voorgestel deur

$$\mathbf{T} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_3 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} \quad \text{—————} \quad (6-8)$$

terwyl die normaalspanningskomponent op die gemiddelde normaalspanningsvlak soos volg kan lyk.

$$\mathbf{T}_{\text{gem}} = \begin{vmatrix} \bar{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma} \end{vmatrix} \quad \text{—————} \quad (6-9)$$

Die verwantskap



$$T = T_{\text{gem.}} + T_{\text{afw.}} \quad \text{-----} \quad (6-10)$$

lewer die afwykende spanningstensor  $T_{\text{afw.}}$ , naamlik

$$T_{\text{afw}} = \begin{vmatrix} \sigma_1 - \bar{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_3 - \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \bar{\sigma} \end{vmatrix} \quad \text{-----} \quad (6-11)$$

Vergelyking (6-9) stel die sferiese of dilatasionele spanningstensor voor. Vergelyking (6-11) kan omskryf word deur  $\sigma_1 - \bar{\sigma} = \sigma_1 - \frac{\sigma_1 + 2\sigma_3}{3}$

$$= 2 \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{3} \quad \text{---} \quad (6-12)$$

en

$$\begin{aligned} \sigma_3 - \bar{\sigma} &= \sigma_3 - \frac{\sigma_1 + 2\sigma_3}{3} \\ &= \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{3} \\ &= - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{3} \quad \text{-----} \quad (6-13) \end{aligned}$$

te stel, sodat

$$T_{\text{afw}} = \begin{vmatrix} 2 \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{3} & 0 & 0 \\ 0 & - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{3} & 0 \\ 0 & 0 & - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{3} \end{vmatrix} \quad \text{---} \quad (6-14)$$

Vergelyking (6-14) lewer twee komponente naamlik

$$T_{afw_1} = \begin{vmatrix} \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{-----} \quad (6-15)$$

$$\text{en } T_{afw_2} = \begin{vmatrix} \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{3} \end{vmatrix} \quad \text{-----} \quad (6-16)$$

wat toon dat die toestand bestaan uit gelyke trek- en drukspannings op onderling loodregte vlakke of met ander woorde ekwivalent is aan suiwer skuifspanning. Soos reeds in hoofstuk 5 vermeld veroorsaak hierdie komponente geen volumetriese verandering nie, maar wel verwringing van die oorspronklike kubiese element.

Alhoewel die argumente die meganisme van fraktuurvorming in die gemiddelde normaalspanningsvlak kan behels, word dit geensins beweer dat hierdie stellings nodige en voldoende of selfs waarskynlike voorwaardes vir die klassifikasie van die vlak as potensiële fraktuurvlak is nie. Hierdie besondere eienskappe is egter uniek vir hierdie vlak ten opsigte van 'n liggaam wat onder enige toestand van

spanning verkeer.

### 6.3.2 Elastiese vervormingsenergie

Daar bestaan verskeie swigtingsteorieë wat nieteenstaande kritiek tog deur eksperimentele werk gerugsteun word. Onder dié, ressorteer die maksimum skuifspanningsteorie waarvolgens die swigspanning  $\sigma_c$  gegee word deur

$$\sigma_c = \sigma_1 - \sigma_3 \quad \text{————— (6-17)}$$

Meer onlangs is heelwat oorweging geskenk aan die vervormingsenergie van deformatsie per eenheidsvolume van 'n materiaal. Die totale vervormingsenergie per eenheidsvolume  $w$  bestaan uit twee komponente, naamlik die energie van volume verandering per eenheidsvolume  $w_v$  en die distorsionele energie per eenheids volume  $w_d$  of te wel

$$w = w_v + w_d \quad \text{————— (6-18)}$$

Die twee energie-komponente is te verwagte wanneer die tensoranalise van die voorafgaande in oënskou geneem word.

Dit is bekend dat indien die drie hoofnormaalspannings  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  en  $\sigma_3$  by 'n punt bestaan, die werk per eenheidsvolume van die materiaal om hierdie spannings te bereik gelyk is aan

$$w = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3). \quad \text{--- (6-19)}$$

Daarenteen is die energie van volumeverandering per eenheidsvolume van die materiaal

$$w_v = \frac{(\bar{\sigma})^2}{2E_v} \quad \text{--- (6-20)}$$

$$\text{waar } \bar{\sigma} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

$$\text{en } E_v = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}$$

Vergelykings (6-18), (6-19) en (6-20) gee die distorsionele energie per eenheidsvolume

$$w_d = \frac{1 + \nu}{6E} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]. \quad \text{--- (6-21)}$$

Uit hierdie vergelyking spruit die voorwaarde vir swigting gebaseer op die distorsionele energieteorie, naamlik

$$w_d = \frac{1 + \nu}{3E} (\sigma_c)^2, \quad \text{--- (6-22)}$$

wat impliseer dat

$$2(\sigma_c)^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 \quad \text{--- (6-23)}$$

en wat deur Timoshenko en Young [1968 - (73)] as geldig vir onelastiese aksie rapporteer word.

Wanneer vergelyking (6-23) vir die drie-assige toestand van spanning beskou word, waar  $\sigma_1 > (\sigma_2 = \sigma_3)$ ,

dan is

$$2\sigma_c^2 = 2(\sigma_1 - \sigma_3)^2 \quad \text{-----} \quad (6-24)$$

sodat vergelyking (6-22) aandui dat

$$w_d = \frac{1 + \nu}{3E} (\sigma_1 - \sigma_3)^2 \quad \text{-----} \quad (6-25)$$

Vergelykings (6-24) en (6-25) het 'n ooreenstemming met vergelyking (6-17) wat toon dat daar 'n verwantskap kan bestaan tussen die maksimum skuifspanningsteorie en die distorsionele energieteorie.

Timoskenko [1958 - (72)] vermeld dat dieselfde voorwaarde vir swigting soos verkry uit die maksimum distorsionele energieteorie, ook verkry kan word deur die skuifspanning op die „oktahedrale“ vlak in berekening te bring. Hierdie stelling is insiggewend aangesien die „oktahedrale“ vlak juis die gemiddelde normaalspanningsvlak is wat deur die skrywer as kritieke vlak aanvaar word.

Die aspekte wat tot nou toe in hierdie hoofstuk uitgewys is, alhoewel nie volledig konklusief nie, dui daarop dat daar besondere eienskappe gekoppel kan word aan die vlak waarop die gemiddelde normaalspanning heers.

#### 6.4 'n Materiaalafhanklike beskrywing van die Mohrenvelop

Indien, na aanleiding van die voorafgaande, aan-

vaar sou word dat die gemiddelde normaalspanningsvlak wel die fraktuurvlak is, moet daar 'n materiaalafhanklike verklaring bestaan wat die variasie in oriëntasie van die fraktuurvlak, soos eksperimenteel waargeneem word, sal bevredig.

Dit is reeds getoon dat (1) die gemiddelde normaalspanningsvlak 'n konstante oriëntasie het met betrekking tot die maksimum hoofnormaalspanningsrigting en dat dit (2) onafhanklik is van die waardes van  $\sigma_1$  met betrekking tot  $\sigma_3 = \sigma_2$ . Eersgenoemde, alhoewel nie in ooreenstemming met eksperimentele gegewens, word egter weens sy gunstige oriëntasie en ook weens ander reedsvermelde besondere gedrag as fraktuurvlak aanvaar. Laasgenoemde is ook nie in ooreenstemming met eksperimentele gegewens nie, aangesien dit sou impliseer dat alle Mohrenveloppe reguitlyne moes wees, wat nie die geval is nie.

Die variasie in waarneembare fraktuurvlak, die betroubaarheid van die Mohr- en Coulomb - Navier-teorieë en die spanningsafhanklike helling van die Mohrenvelop dui daarop dat daar 'n inherente materiaaleienskap moet bestaan wat 'n betekenisvolle invloed op die spanningsveld het.

Dit is bekend dat wanneer 'n liggaam aan 'n eenassige drukspanning onderwerp word, 'n geïndu-

seerde trekspannings in die rigting loodreg op die drukspanningsrigting met behulp van eindige elementstudie gevind word. Wanneer daar na die fundamentele elastisiteit gekyk word, word sulke gevalle ook opgespoor. Weinig outeurs, met die uitsondering van Timoskenko [1958 - (72)], Johnson [1970 - (46)] en Timoskenko en Young [1968 - (73)], maak enige melding van hierdie formulering van „geïnduseerde” spanning.

Uit die elementêre drie-dimensionele elastisiteit, is dit algemeen bekend dat die netto vervorming  $\epsilon'$  in die drie hoofnormaalspanningsrigtings, as gevolg van die invloed van die Poissonverhouding  $\nu$ , gelyk is aan

$$\epsilon_1' = \epsilon_{11} + \epsilon_{12} + \epsilon_{13} \quad \text{————— (6-26)}$$

$$\epsilon_2' = \epsilon_{22} + \epsilon_{21} + \epsilon_{23} \quad \text{————— (6-27)}$$

$$\epsilon_3' = \epsilon_{33} + \epsilon_{31} + \epsilon_{32}, \quad \text{————— (6-28)}$$

waar die eerste voetskrif die rigting van vervorming aandui en die tweede voetskrif die rigting van die hoofnormaalspanning wat die vervorming veroorsaak, aandui.

Vergelykings 6-26 tot 6-28 kan omskryf word tot

$$\epsilon_1' = \epsilon_{11} - \nu\epsilon_{22} - \nu\epsilon_{33} \quad \text{————— (6-29)}$$

$$\epsilon_2' = \epsilon_{22} - \nu\epsilon_{11} - \nu\epsilon_{33} \quad \text{—————} \quad (6-30)$$

$$\epsilon_3' = \epsilon_{33} - \nu\epsilon_{11} - \nu\epsilon_{22} \quad \text{—————} \quad (6-31)$$

en wanneer elkeen van die bogenoemde vergelykings met 'n konstante naamlik, Young se modulus  $E$ , vermenigvuldig word, dan sal vir klein vervormings geld dat

$$\sigma_1' = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \quad \text{—————} \quad (6-32)$$

$$\sigma_2' = \sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3) \quad \text{—————} \quad (6-33)$$

$$\sigma_3' = \sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2), \quad \text{—————} \quad (6-34)$$

waar die aksenttekens telkens nettospannings aandui.

'n Element wat dus onder ewewig verkeer onder 'n toestand van vervorming, as gevolg van 'n driedimensionele veld van kragte, sal dus 'n gemiddelde netto-normaalspanningsvlak hê waarop die gemiddelde netto-normaalspanning  $\bar{\sigma}'$  gelyk sal wees aan

$$\bar{\sigma}' = \frac{\sigma_1' + \sigma_2' + \sigma_3'}{3} \quad \text{—————} \quad (6-35)$$

Die oriëntasie van die gemiddelde netto-normaalspanningsvlak ten opsigte van die maksimum netto-hoofnormaalspanning sal, vir die element in vervormde toestand, dieselfde wees as die oriëntasie van die gemiddelde normaalspanningsvlak ten opsigte



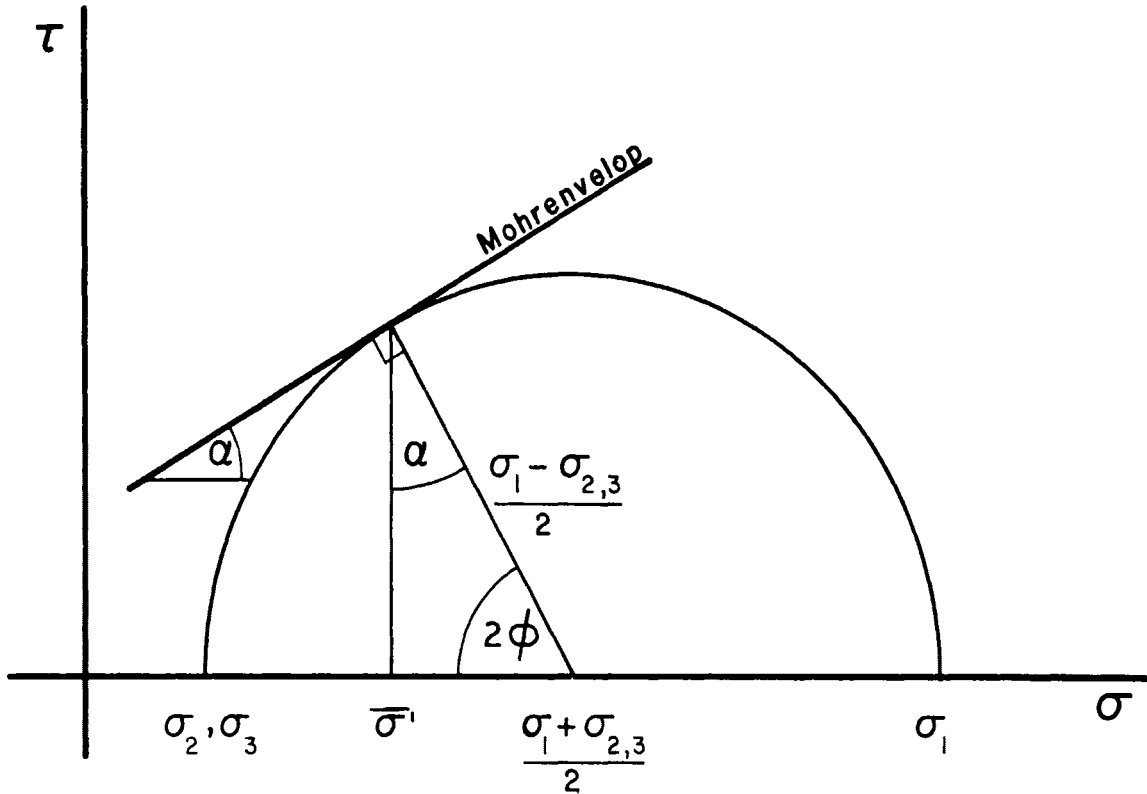
van die hoofnormaalspanning vir die „onvervormde“ element.

Wanneer die gemiddelde netto-normaalspanningsvlak ondersoek word ten opsigte van die aanvaarbare Mohrdiagram waarop hoofnormaalspannings geplot word, word, soos in hoofstuk 7 aangetoon, gevind dat die oriëntasie van die voorgestelde fraktuurvlak die gedrag van die eksperimentele waardes, wat in hoofstuk 4 genoem is, volg.

In figuur 6-5 word die Mohrdiagram vir 'n drie-assige toets voorgestel. Die waardes van  $\sigma_1$  en  $\sigma_2 = \sigma_3$  op die  $\sigma$ -as is hoofnormaalspannings. Die figuur dui verder aan dat die Mohrenvelop, wat 'n helling van  $\tan \alpha$  het, die Mohrsirkel raak by die punt wat die gemiddelde netto-normaalspanningsvlak voorstel. Met ander woorde, die normaalspanning op die vlak het die grootte  $\bar{\sigma}' = \frac{\sigma_1' + \sigma_2' + \sigma_3'}{3}$ . Die helling van die Mohrenvelop word uit die volgende verkry.

$\tan \alpha = \mu$  die interne wrywingskoëffisiënt

$$= \frac{\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \bar{\sigma}'}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \bar{\sigma}'\right)^2}}$$



**Figuur 6.5**

$$= \frac{A}{\sqrt{(B)^2 - (A)^2}} \quad \text{-----} \quad (6-37)$$

waar  $A = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \bar{\sigma}'$  ----- (6-38)

en  $B = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$  ----- (6-39)

Verder is  $\sigma_2 = \sigma_3$ ,

$$\bar{\sigma}' = \frac{\sigma_1' + \sigma_2' + \sigma_3'}{3}, \quad \text{-----} \quad (6-35)$$

$$\begin{aligned} \sigma_1' &= \sigma_1 - \nu\sigma_2 - \nu\sigma_3 \\ &= \sigma_1 - 2\nu\sigma_3, \end{aligned} \quad \text{-----} \quad (6-40)$$

$$\begin{aligned}\sigma_2' &= \sigma_2 - \nu\sigma_1 - \nu\sigma_3 \\ &= \sigma_3(1 - \nu) - \nu\sigma_1\end{aligned}\quad \text{----- (6-41)}$$

en  $\sigma_3' = \sigma_3 - \nu\sigma_1 - \nu\sigma_2$

$$= \sigma_3(1 - \nu) - \nu\sigma_1\quad \text{----- (6-42)}$$

$\sigma_2'$  is soos te verwagte gelyk aan  $\sigma_3'$

$$\sigma_2' = \sigma_3'\quad \text{----- (6-43)}$$

Uit bogenoemde is

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}' &= \frac{\sigma_1 - 2\nu\sigma_3 + 2\sigma_3(1 - \nu) - 2\nu\sigma_1}{3} \\ &= \frac{\sigma_1(1 - 2\nu) + 2\sigma_3(1 - 2\nu)}{3} \\ &= \frac{(\sigma_1 + 2\sigma_3)(1 - 2\nu)}{3}\end{aligned}\quad \text{----- (6-44)}$$

Dit kan verder aangetoon word dat

$$A = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \bar{\sigma}'\quad \text{----- (6-38)}$$

$$= \frac{(\sigma_1 - \sigma_3) + 4\nu(\sigma_1 + 2\sigma_3)}{6}\quad \text{----- (6-45)}$$

waaruit

$$\begin{aligned}(A)^2 &= \frac{\sigma_1^2}{36} - \frac{\sigma_1\sigma_3}{18} + \frac{\sigma_3^2}{36} + \frac{2\nu\sigma_1^2}{9} + \frac{4\nu\sigma_1\sigma_3}{9} - \frac{2\nu\sigma_1\sigma_3}{9} - \frac{4\nu\sigma_3^2}{9} + \\ &\quad \frac{4\nu^2\sigma_1^2}{9} + \frac{16\nu^2\sigma_1\sigma_3}{9} + \frac{16\nu^2\sigma_3^2}{9}.\end{aligned}\quad \text{----- (6-46)}$$

Ook is

$$(B)^2 = \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^2$$

$$= \frac{\sigma_1^2}{4} - \frac{\sigma_1\sigma_3}{2} + \frac{\sigma_3^2}{4} \quad \text{-----} \quad (6-47)$$

sodat

$$(B)^2 - (A)^2 = \frac{2}{9} \left[ (\sigma_1 - \sigma_3) + \nu(\sigma_1 + 2\sigma_3) \right] \left[ (\sigma_1 - \sigma_3) - 2\nu(\sigma_1 + 2\sigma_3) \right] \quad \text{-----} \quad (6-48)$$

Uit vergelykings (6-45) en (6-48) is

$$\mu = \tan \alpha = \frac{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_3) + 4\nu(\sigma_1 + 2\sigma_3)]}{[2\{(\sigma_1 - \sigma_3) + \nu(\sigma_1 + 2\sigma_3)\} \{(\sigma_1 - \sigma_3) - 2\nu(\sigma_1 + 2\sigma_3)\}]^{\frac{1}{2}}} \quad \text{-----} \quad (6-49)$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(C + 4\nu D)}{[2(C + \nu D)(C - 2\nu D)]^{\frac{1}{2}}} \quad \text{-----} \quad (6-50)$$

waarin  $C = \sigma_1 - \sigma_3$  ----- (6-51)

en  $D = \sigma_1 + 2\sigma_3$  ----- (6-52)

Vergelyking (6-51) is die bekende maksimum afwykende spanning terwyl vergelyking (6-52) die bekende invariant of die som van die drie hoofnormaalspannings waarskynlik is.

Hierdie uiteensetting, wat meer volledig behandel word deur Roering en Van der Merwe [1975 - (62)], gee dus 'n moontlike materiaalafhanklike verklaring van die Coulomb-Navier interne wrywingskoeffisiënt.

## HOOFSTUK 7

### DIE ONDERSOEK VAN DIE VOORGESTELDE MATERIAALAFHANKLIKE

#### VERKLARING VAN DIE COULOMB-NAVIER INTERNE

#### WRYWINGSKOEFFISIËNT

##### 7.1 Inleiding

Indien die vergelyking vir die interne wrywingskoeffisiënt, vergelyking 6-49, enigsins betekenisvol sou wees, dan moet die gegewens wat verkry word by die toepassing van die vergelyking, binne aanvaarbaarheidsgrense, eksperimentele waarnemings volg.

In hierdie hoofstuk word die getabuleerde data van hoofstuk 4 gebruik om die sinvolheid van vergelyking 6-49 te toets deur die waarde van die interne wrywingskoeffisiënt te bereken op twee wyses, naamlik: (i) met behulp van vergelyking

6-49 en

(ii) met behulp van die bekende gemodifiseerde Griffith teorie, wat 'n aanvaarbare verwerkingsmetode van eksperimentele data is

en dan hierdie berekende waardes met mekaar te vergelyk.

##### 7.2 Die ondersoek van die eksperimentele data van

### 7.2.1 Chertagtige gangmateriaal

Die drie-assige fraktuurdata vir hierdie gesteente is in tabel 4-1 gegee. Wanneer hierdie waardes analiseer word, word gemerk dat daar data van 4 toetse, wat in die trekspanningsgebied uitgevoer was, vermeld word. Aangesien vergelyking 6-49 afgelei is in terme van hoofnormaalspannings wat dieselfde teken het, en in hierdie geval drukspanning, word hierdie 4 waardes nie by hierdie vergelykende studie gebruik nie. Verder word 'n hele aantal toetse vir eenassige druksterkte vermeld. Vir die doel van hierdie oefening, word, waar toepaslik, die rekenkundige gemiddelde van hierdie waardes gebruik. Een verdere toetsresultaat word ook weggelaat aangesien dit ooglopend teenstrydig is met die neiging van die eksperimentele data. Die verkorte weergawe van tabel 4.1 waarop die vergelykende studie uitgevoer word, word in tabel 7.1 gegee.

Die gemiddelde waarde van eenassige druksterkte volgens die W.N.N.R. is 581,12 MPa, terwyl die M.I.T. die eenassige druksterkte as gemiddeld 608,81 MPa rapporteer. Uit die publikasie van Hoek [1965 - (37)] blyk dit dat die Poisson-verhouding varieër tussen 0,2 en 0,213.

TABEL 7-1

VERKORTE WEERGAWE VAN DRIE-ASSIGE FRAKTUURDATA VIR  
CHERTAGTIGE GANGMATERIAAL

no.	$\sigma_1$ (MPa)	$\sigma_3$ (MPa)	Toets uitgevoer deur
1	813,59	77,91	M.I.T.
2	1080,42	57,92	W.N.N.R.
3	1167,98	62,74	W.N.N.R.
4	1233,48	65,50	W.N.N.R.
5	1275,54	67,57	W.N.N.R.
6	1344,49	71,02	W.N.N.R.
7	1544,44	144,79	M.I.T.
8	1820,23	241,32	M.I.T.
9	2295,97	286,82	M.I.T.
10	2426,97	325,43	M.I.T.

Volgens die gemodifiseerde teorie van Griffith is

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_c} = \left( \frac{\sqrt{1 + \mu^2} + \mu}{\sqrt{1 + \mu^2} - \mu} \right) \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + 1 \quad \text{----- (7.1)}$$

waar  $\sigma_c$  = eenassige druksterkte.

Uit vergelyking 7-1 is die interne wrywingskoëffisiënt

$$\mu = \frac{\frac{\sigma_1}{\sigma_c} - \frac{\sigma_3}{\sigma_c} - 1}{2 \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_c} \cdot \frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{----- (7.2)}$$

$$\text{dit wil sê } \mu = \frac{A - B - 1}{2(A \cdot B - B)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{----- (7.3)}$$

$$\text{waar } A = \frac{\sigma_1}{\sigma_c}$$

$$\text{en } B = \frac{\sigma_3}{\sigma_c} \quad (\text{aldus Jeffery [1975 - (45)])}$$

en wanneer die waardes van tabel 7.1 tesame met 'n gemiddelde waarde van  $\sigma_c = 594,96$  (MPa) in vergelyking 7.3 vervang word, word die waardes  $\mu_{Gr}$  van tabel 7.2 verkry.

Deur die gegewens van tabel 7.1 en  $0,2 \leq \nu \leq 0,213$  in vergelyking 6-49 te vervang word die ooreenstemmende voorgestelde materiaalafhanklike waardes van  $\mu$ , naamlik  $\mu_m$ , van tabel 7.2 verkry.

Die grootte van  $\alpha$  en  $2\phi$  kom uit die verwantskap

$$\tan \alpha = \mu$$

$$\text{en } \alpha + 2\phi = 90^\circ$$

sodat die vergelykbare verwerkte fraktuurdata van cheragtige gangmateriaal is, soos in tabel 7.2 uiteengesit word. Die voetskrifte Gr en m dui telkens aan dat die betrokke waardes met behulp van die Griffith en voorgestelde materiaalafhanklike verklaring respektiewelik verkry is.



TABEL 7.2

## VERWERKTE FRAKTUURDATA VIR CHERTAGTIGE GANGMATERIAAL

no.	$\sigma_1$ (MPa)	$\sigma_3$ (MPa)	$A = \frac{\sigma_1}{\sigma_c}$	$B = \frac{\sigma_3}{\sigma_c}$	$\mu_{Gr}$	$\mu_m$	$\alpha_{Gr}$	$\alpha_m$	$2\phi_{Gr}$	$2\phi_m$
1	813,59	77,91	1,367	0,131	0,539	1,001	28,33	45,04	61,67	44,96
2	1080,42	57,92	1,816	0,097	1,275	0,891	51,89	41,73	38,11	48,27
3	1167,98	62,74	1,963	0,105	1,346	0,892	53,38	41,74	36,62	48,26
4	1233,48	65,50	2,073	0,110	1,401	0,8906	54,48	41,69	35,52	48,31
5	1275,54	67,57	2,144	0,114	1,429	0,8903	55,02	41,68	34,98	48,32
6	1344,49	71,02	2,260	0,119	1,470	0,8900	55,78	41,67	34,22	48,33
7	1544,44	144,79	2,596	0,243	1,085	0,995	47,34	44,87	42,66	45,13
8	1820,23	241,32	3,059	0,406	0,905	1,125	42,14	48,38	47,86	41,62
9	2295,97	286,82	3,859	0,482	1,012	1,096	45,35	47,64	44,65	42,36
10	2426,97	325,43	4,079	0,547	0,976	1,131	44,29	48,53	45,71	41,47

Die ontleding van tabel 7.2 gee die gemiddeldes met standaardafwykings soos getoon in tabel 7.3.

TABEL 7.3  
ONTLEDING VAN VERWERKTE FRAKTUURDATA VIR CHERT-  
AGTIGE GANGMATERIAAL

	gemiddelde waarde	standaard- afwyking
$\mu_{Gr}$	1,144	0,279
$\mu_m$	0,980	0,099
$\alpha_{Gr}$	47,8°	7,99°
$\alpha_m$	44,30°	2,83°
$2\phi_{Gr}$	42,2°	7,99°
$2\phi_m$	45,7°	2,83°

Dit kan duidelik gesien word dat die berekende waardes volgens die voorgestelde materiaalafhanklike verklaring baie gerieflik akkommodeer word binne die grense van die waardes soos deur die aanvaarbare gemodifiseerde Griffithteorie voorspel. Trouens, baie kleiner afwykings word met behulp van vergelyking 6-49 verkry.

#### 7.2.2 Pennant Sandsteen

Die funksionele verwantskap tussen  $\sigma_1$  en  $\sigma_3$

vir hierdie gesteente is, uit tabel 4.2, wat ontleen is aan Price [1958 - (60)],

$$\sigma_1 = 153,75 + 5,0 \sigma_3 \quad (\text{MPa}) \quad \text{—————} \quad (7.4)$$

waaruit relatiewe waardes van  $\sigma_1$  en  $\sigma_3$  bereken kan word. Hierdie waardes van  $\sigma_1$  en  $\sigma_3$  sou dus verteenwoordigend wees van die tipiese waardes waaruit Mohrsirkels vir hierdie gesteente konstrueer sou kon word, soos reeds in figuur 4.2 aangetoon is. Die vergelyking van die envelop van sodanige sirkels is, uit tabel 4.2,

$$\tau = 35,16 + 0,90 \sigma \quad (\text{MPa}), \quad \text{—————} \quad (7.5)$$

wat impliseer dat die waarde van  $\mu = \tan \alpha = 0,90$  en daaruit  $\alpha = 41,98^\circ$  en  $2\phi = 48,02^\circ$ . Die variasiekoëffisiënt word gegee as 5,1% wat aandui dat  $2\phi$  waarskynlik betroubaar kan varieër binne 'n standaardafwyking van  $2,45^\circ$ .

Die Mohrkonstruksie van Price toon dat die fraktureksperimente uitgevoer is vir waardes van  $\sigma_1$  tot 'n maksimum van ongeveer 250 MPa. Deur binne hierdie beperking gerieflike waardes van  $\sigma_1$  te kies, kan ooreenstemmende waardes van  $\sigma_3$  uit vergelyking 7.4 bereken word. Tabel 7.4 toon gekose en berekende waardes van  $\sigma_1$  en  $\sigma_3$  deur vergelyking 7.4 te omskryf tot

$$\sigma_3 = 0,20 \sigma_1 - 27,15 \quad (\text{MPa}) \quad \text{—————} \quad (7.6)$$

TABEL 7.4

DRIE-ASSIGE FRAKTUURDATA VIR PENNANT SANDSTEEN

no.	$\sigma_1$ (MPa)	$\sigma_3$ (MPa)
1	160,0	4,85
2	175,0	7,85
3	200,0	12,85
4	225,0	17,85
5	250,0	22,85

Deur  $\sigma_3 = 0$  in vergelyking 7.4 te stel, word die eenassige druksterkte  $\sigma_c = 153,75$  MPa verkry.

Die waarde van Poissonverhouding vir hierdie gesteente is  $\nu \leq 0,228$  uit paragraaf 4.3.1 en deur dieselfde prosedure as vir chertagtige gangmateriaal te volg, word die vergelykbare verwerkte fraktuurdata van Tabel 7.5 vir Pennant sandsteen verkry.

Die ontleding van tabel 7.5 gee die gemiddeldes met standaardafwykings soos getoon in tabel 7.6. In dieselfde tabel word die waarnemings van Price ook aangetoon en hierdie waardes word gekenmerk met die voetskrif P.

TABEL 7.5

## VERWERKTE FRAKTUURDATA VIR PENNANT SANDSTEEN

no.	$\sigma_1$ (MPa)	$\sigma_3$ (MPa)	$A = \frac{\sigma_1}{\sigma_c}$	$B = \frac{\sigma_3}{\sigma_c}$	$\mu_{Gr}$	$\mu_m$	$\alpha_{Gr}$	$\alpha_m$	$2\phi_{Gr}$	$2\phi_m$
1	160	4,85	1,041	0,032	0,127	0,878	7,25°	41,3°	82,75°	48,7°
2	175	7,85	1,138	0,051	0,519	0,916	27,42°	42,5°	62,58°	47,5°
3	200	12,85	1,301	0,084	0,685	0,971	34,41°	44,1°	55,59°	45,9°
4	225	17,85	1,463	0,116	0,749	1,020	36,82°	45,6°	53,18°	44,4°
5	250	22,85	1,626	0,149	0,783	1,065	38,05°	46,8°	51,95°	43,2°

TABEL 7.6

ONTLEDING VAN VERWERKTE FRAKTUURDATA VIR PENNANT

SANDSTEEN

	gemiddelde waarde	standaard- afwyking
$\mu_{Gr}$	0,572	0,240
$\mu_m$	0,970	0,067
$\mu_P$	0,90	0,080
$\alpha_{Gr}$	28,79°	11,38°
$\alpha_m$	44,06°	2,00°
$\alpha_P$	41,98°	2,45°
$2\phi_{Gr}$	61,21°	11,38°
$2\phi_m$	45,94°	2,00°
$2\phi_P$	48,02°	2,45°

'n Leemte in die gemodifiseerde Griffittheorie word opgemerk by sekere numeriese rangskikkings van  $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$  en  $\sigma_c$  veral wanneer  $\sigma_1 - \sigma_3$  neig na  $\sigma_c$ , terwyl  $\frac{\sigma_1}{\sigma_3}$  relatief klein is. Dit is egter duidelik van tabel 7.6 dat die voorgestelde moontlike materiaalafhanklike verklaring die eksperimentele waarnemings sinvol voorspel.

7.2.3 Snowdown Sandsteen

Die  $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$  verwantskap vir Snowdown sandsteen

is volgens tabel 4.2

$$\sigma_1 = 158,58 + 4,4 \sigma_3 \quad (\text{MPa}) \quad \text{—————} \quad (7.7)$$

waaruit die waardes, soos in die geval van Pennant sandsteen, van  $\sigma_1$  en  $\sigma_3$  gekies en bereken word.

Tabel 7.7 dui tipiese data aan.

TABEL 7.7

DRIE-ASSIGE FRAKTUURDATA VIR SNOWDOWN SANDSTEEN

no.	$\sigma_1$ (MPa)	$\sigma_3$ (MPa)
1	165,00	1,46
2	175,00	3,73
3	185,00	6,00
4	195,00	8,28

$$\sigma_c = 158,58 \text{ MPa}$$

$$\nu \leq 0,269$$

Uit tabel 4.2 word afgelei dat  $\mu_p = 0,85$ ,  $\alpha_p = 40,36^\circ$  en  $2\phi_p = 49,64^\circ$  terwyl die variasie-koëffisiënt 6,8% is.

Die vergelykbare verwerkte fraktuurdata vir hierdie gesteente word in tabel 7.8 gegee.

TABEL 7.8

## VERWERKTE FRAKTUURDATA VIR SNOWDOWN SANDSTEEN

no.	$\sigma_1$ (MPa)	$\sigma_3$ (MPa)	$A = \frac{\sigma_1}{\sigma_c}$	$B = \frac{\sigma_3}{\sigma_c}$	$\mu_{Gr}$	$\mu_m$	$\alpha_{Gr}$	$\alpha_m$	$2\phi_{Gr}$	$2\phi_m$
1	165,00	1,46	1,040	0,009	0,810	0,899	39,01°	42,0°	50,99°	48,0°
2	175,00	3,73	1,104	0,024	0,811	0,949	39,03°	43,3°	50,97°	46,7°
3	185,00	6,00	1,167	0,038	0,811	1,001	39,04°	45,0°	50,96°	45,0°
4	195,00	8,28	1,230	0,052	0,810	1,056	39,02°	46,6°	50,98°	43,4°



Uit tabel 7.8 word gemiddelde waardes verkry wat tesame met waarnemings deur Price in tabel 7.9 gegee word.

TABEL 7.9

ONTLEDING VAN VERWERKTE FRAKTUURDATA VIR SNOWDOWN

SANDSTEEN

	Gemiddelde waarde	standaard-afwyking
$\mu_{Gr}$	0,8105	0,0005
$\mu_m$	0,9762	0,058
$\mu_P$	0,8500	0,107
$\alpha_{Gr}$	39,03°	0,01°
$\alpha_m$	44,22°	1,74°
$\alpha_P$	40,36°	3,38°
$2\phi_{Gr}$	50,97°	0,01°
$2\phi_m$	45,78°	1,74°
$2\phi_P$	49,64°	3,38°

Alhoewel nie so akkuraat soos in die vorige twee gevalle nie, is die betrokke waardes soos verkry uit vergelyking 6.49 telkens binne bereik van dié volgens Price.

7.2.4 Materiaal afkomstig uit gang 144 - E.R.P.M.

Wanneer die gegewens van paragraaf 4.4 analiseer word, word die waardes soos in tabel 7.10 weer-

TABEL 7.10

VERWERKTE FRAKTUURDATA VIR MATERIAAL AFKOMSTIG UIT GANG 144 E.R.P.M.

no.	$\sigma_1$ (MPa)	$\sigma_2$ (MPa)	$A = \frac{\sigma_1}{\sigma_c}$	$B = \frac{\sigma_3}{\sigma_c}$	$\mu_{Gr}$	$\mu_m$	$\alpha_{Gr}$	$\alpha_m$	$2\phi_{Gr}$	$2\phi_m$
1	604	20	1,569	0,052	1,503	1,116	56,37°	48,2°	33,63°	41,8°
2	637	30	1,655	0,078	1,277	1,176	51,93°	49,6°	38,07°	40,4°
3	711	40	1,847	0,104	1,252	1,220	51,39°	50,7°	38,61°	39,3°
4	755	50	1,961	0,130	1,176	1,271	49,63°	51,8°	40,37°	38,2°
5	855	70	2,221	0,182	1,103	1,364	47,79°	53,8°	42,21°	36,2°

∞

spieël, verkry. Die eenassige druksterkte is volgens die berekeninge van die outeur van die publikasie waaruit die eksperimentele data verkry is, 385 MPa.

Tabel 7.11 is die opsomming van die waardes van tabel 7.10.

TABEL 7.11

ONTLEDING VAN VERWERKTE FRAKTUURDATA VIR MATERIAAL

AFKOMSTIG UIT GANG 144 - E.R.P.M.

	gemiddelde waarde	standaard-afwyking
$\mu_{Gr}$	1,262	0,135
$\mu_m$	1,229	0,084
$\alpha_{Gr}$	51,42°	2,87°
$\alpha_m$	50,82°	1,91°
$2\phi_{Gr}$	38,58°	2,87°
$2\phi_m$	39,18°	1,91°

Ook in hierdie geval word waargeneem dat die waardes verkry uit die toepassing van vergelyking 6.49 gerieflik binne die aanvaarbaarheidsgrense van die eksperimentele data val.

### 7.3 Bespreking

Die voorgaande verwerking en vergelyking van

data toon dat die waardes van die interne wrywingskoëffisiënt soos bepaal deur die betrokke outeurs met behulp van bestaande aanvaarbare teorieë, sinvol deur vergelyking 6.49 voorspel kan word. Trouens, die waardes, soos verkry deur die toepassing van vergelyking 6.49, toon 'n kleiner afwyking om die gemiddelde waarde as die ooreenstemmende data afkomstig uit bestaande teorieë.

'n Aspek wat egter opmerklik is, is dat die neiging van waardes van  $\mu$ , volgens vergelyking 6.49, oor die algemeen 'n toename toon met toenemende maksimum hoofnormaalspanning, terwyl die  $\mu$ -waardes, volgens die gemodifiseerde Griffithteorie, soms 'n toenemende neiging het, soms konstant bly en soms 'n dalende neiging het.

Wat egter besonder insiggewend is, is dat die waardes van  $\mu$ , volgens vergelyking 6.49, met afnemende tempo sistematies vergroot met toenemende spanning, en trouens in die geval van die chertagtige gangmateriaal weliswaar 'n konstante waarde bereik by die relatief hoë spannings wanneer die data van die W.N.N.R- en M.I.T. afsonderlik beskou word. Hierdie neiging tot 'n konstante waarde van  $\mu$  is van besondere belang aangesien

- (i) die waarde van Poissonverhouding juis neig tot 'n konstante waarde by hoë spanning wat aandui dat die materiaal neig tot 'n ideale elastiese

- medium by hoë spanning en
- (ii) dit beteken dat die oriëntasie van die frak-  
tuurvlak konstant sal wees vir 'n gegewe  
materiaal, onafhanklik van spesifieke waardes  
van  $\sigma_1$  en  $\sigma_3$ .

Hierdie waarneming stem ooreen met die uiteen-  
setting van paragrawe 6.2 en 6.4 waarin daar reeds  
aangetoon is dat die gemiddelde normaalspanningsvlak  
en gemiddelde netto-normaalspanningsvlak, ten opsigte  
van die rigtings van die maksimum normaalspanning  
en maksimum netto-normaalspanning respektiewelik,  
konstant is en onafhanklik is van spesifieke waardes  
van  $\sigma_1$  en  $\sigma_3$ .

## HOOFSTUK 8

### GEWYSIGDE VOORSTELLING VAN EKSPERIMENTELE DATA

#### 8.1 Inleiding

Die vergelyking van die materiaalafhanklike verklaring, vergelyking 6.49, was afgelei met aanvanklike uitgangspunt dat die grootte van die normaalspanning op die fraktuurvlak 'n invariante hoeveelheid, naamlik die gemiddelde waarde van die onderling loodregte normaalspannings sal hê, naamlik

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

en dat  $\bar{\sigma} = \frac{\sigma_1 + 2\sigma_3}{3}$  \_\_\_\_\_ (8.1)

vir die drie-assige toestand van spanning. Deur hierop voort te bou, is die begrip van netto-hoofnormaalspannings ingevoer en is die vlak waarop die gemiddelde netto-hoofnormaalspanning inwerk geanaliseer ten opsigte van die  $\sigma_1, \sigma_3$  verwysingsnetwerk, of te wel die fenomenologiese Mohrenvelop - Mohrsirkelwyse van aanbieding van eksperimentele data.

Die ontleding van die verwerkte fraktuurdata, wat in hoofstuk 7 gedoen is, toon dat die voorgestelde materiaalafhanklike verklaring, waarin aanvaar word dat die normaalspanning op die kritieke vlak die waarde van die gemiddelde netto-hoofnormaalspanning

sal hê, wel sinvolle waardes van die interne wrywingskoëffisiënt aanbied en daarom kan afgelei word dat daar meriete in die benaderingswyse bestaan wat die formulering van die betrokke vergelyking voorafgegaan het.

In hierdie hoofstuk word daar uitgebrei op die implikasies van die benaderingswyse en daar word aangetoon dat dit aanleiding kan gee tot 'n gewysigde voorstelling van eksperimentele data.

## 8.2 Die invariante $\bar{\sigma}'$

Die grootte van die gemiddelde netto-hoofnormaalspanning word verkry uit

$$\bar{\sigma}' = \frac{\sigma_1' + \sigma_2' + \sigma_3'}{3}$$

en sal vir die drie-assige spanningstoestand gegee word deur

$$\bar{\sigma}' = \frac{\sigma_1' + 2\sigma_3'}{3} . \quad \text{-----} \quad (8.2)$$

Soos reeds voorheen aangetoon is, is die waarde van  $\bar{\sigma}'$  in terme van  $\sigma_1$  en  $\sigma_3$  gelyk aan

$$\bar{\sigma}' = \frac{(\sigma_1 + 2\sigma_3)(1 - 2\nu)}{3} \quad \text{-----} \quad (8.3)$$

Vergelyking 8.3 wys daarop dat  $\bar{\sigma}'$  invariant kan wees ten opsigte van die  $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$  verwysingsnetwerk, mits die waarde van die Poissonverhouding  $\nu$  konstant

sou wees. So 'n toestand word bereik by relatief hoë spannings en is trouens in hoofstuk 7 aan die hand van die verwerking van sommige eksperimentele data bevestig deur die toepassing van beide die gemodifiseerde Griffith-beginsel en die voorgestelde materiaalafhanklike verklaring.

Hieruit kan dus aanvaar word dat (i) die kritieke vlak waarop die normaalspanning die waarde  $\bar{\sigma}'$  bereik invariant is ten opsigte van die  $\sigma_1, \sigma_3$  netwerk vir 'n ideaal isotropiese, elastiese materiaal en (ii) dat die  $\bar{\sigma}'$ -vlak die kritieke vlak is. Die waarde van  $\bar{\sigma}'$  is egter nie meer gelyk aan die gemiddelde normaalspanning in terme van die drie-assige toestand van spanning nie.

Dit sou egter meer sinvol wees om die vlak van  $\bar{\sigma}'$  te verwys na die  $\sigma_1', \sigma_3'$  spanningsnetwerk.

### 8.3 Gewysigde Mohrkonstruksie

Analoog aan die teorie waaruit die Mohrkonstruksie volg, kan gestel word dat 'n element in ewewig verkeer onder die onderling loodregte spanningstoestand  $\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3'$ . Met  $\sigma_2' = \sigma_3'$  sal die oriëntasie van die  $\bar{\sigma}'$ -vlak ten opsigte van die rigting van  $\sigma_1'$  'n hoek van  $35,264^\circ$  vorm en onafhanklik wees van die waardes van  $\sigma_1'$  en  $\sigma_3'$  (sien paragraaf 6.2).

Hierdie argument stel dus voor dat die fraktuur-data van 'n sekere gesteente, met ander woorde die



$\sigma_1$ ,  $\sigma_3$  waardes waarby die gesteente breek, verwerk kan word met behulp van die Poissonverhouding  $\nu$  sodat 'n familie van waardes van  $\sigma_1'$  en  $\sigma_3'$  verkry word en dat wanneer hierdie familie van  $\sigma_1'$ ,  $\sigma_3'$ -waardes op die Mohrwyse gekonstrueer word, dan moet, aangesien die kritieke  $\bar{\sigma}$  vlak 'n vaste oriëntasie het vir elke Mohrsirkel van enige  $\sigma_1'$ ,  $\sigma_3'$ , daar 'n duidelike verwantskap waargeneem behoort te kan word wat daarop sal dui dat die besondere konstruksies tot 'n sekere familie behoort.

Tabelle 8.1 tot 8.4 en figure 8.1 tot 8.4 verteenwoordig die verwerking en grafiese voorstelling van die fraktuurdata in terme van netto-hoofnormaalspannings vir elk van die gesteentes wat reeds voorheen in hierdie geskrif gebruik is.

### 8.3.1 Pennant Sandsteen

Die netto-hoofnormaalspannings word in terme van die Poissonverhouding en die normaalspannings verkry uit die vergelykings

$$\sigma_1' = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \quad \text{—————} \quad (8.4)$$

$$\sigma_2' = \sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3) \quad \text{—————} \quad (8.5)$$

$$\sigma_3' = \sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2) \quad \text{—————} \quad (8.6)$$

Vir  $\sigma_2 = \sigma_3$  word dit

$$\sigma_1' = \sigma_1 - 2\nu\sigma_3 \quad \text{—————} \quad (8.7)$$

$$\sigma_2' = \sigma_3(1 - \nu) - \nu\sigma_1 \quad \text{—————} \quad (8.8)$$

en  $\sigma_3' = \sigma_3(1 - \nu) - \nu\sigma_1. \quad \text{—————} \quad (8.9)$

Deur die relevante waardes van  $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$  en  $\nu$  in vergelykings 8.7 en 8.9 te vervang word die gegewens van tabel 8.1 vir Pennant Sandsteen verkry.

TABEL 8.1

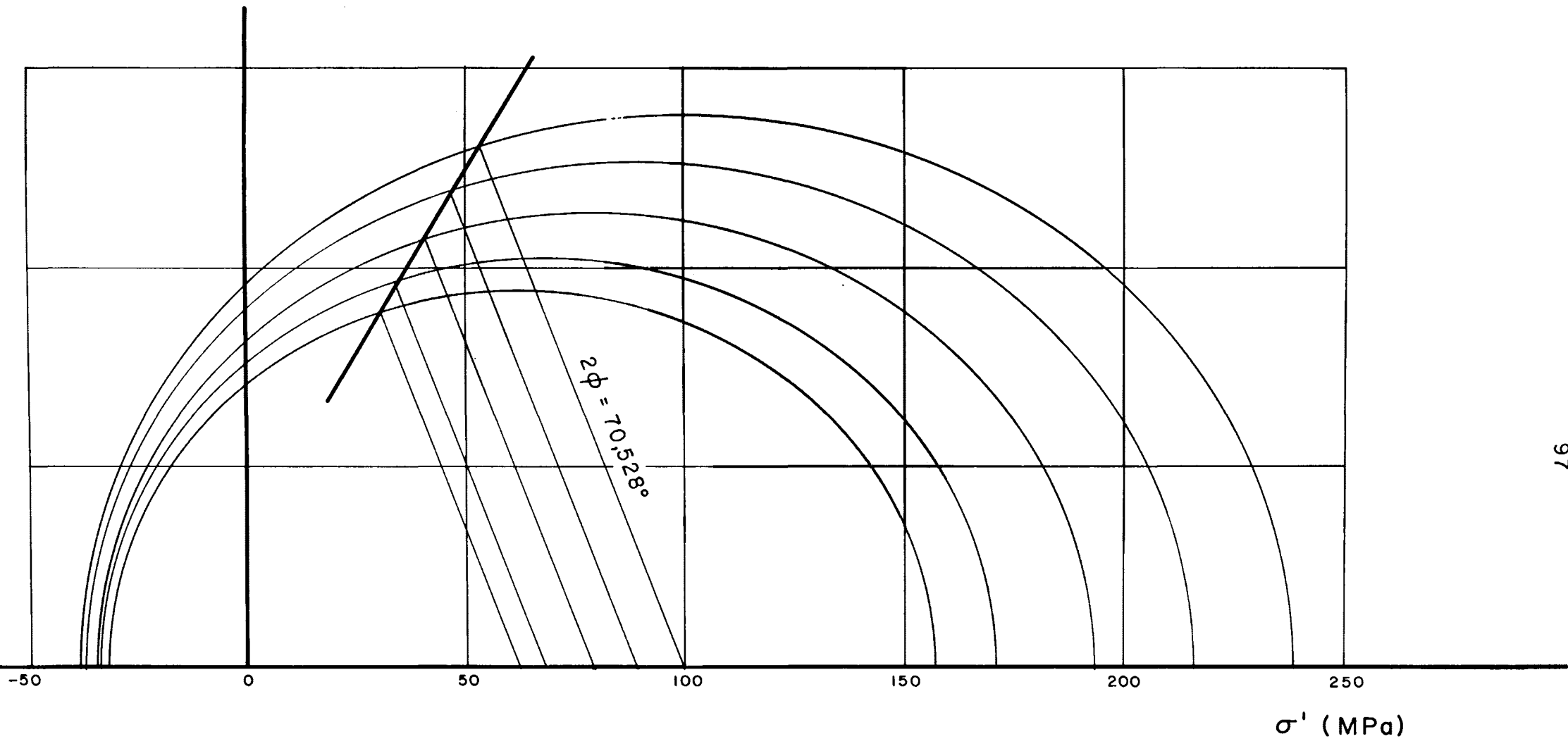
FRAKTUURDATA IN TERME VAN NETTO-HOOFNORMAALSPANNINGS

VIR PENNANT SANDSTEEN

no.	$\sigma_1$ (MPa)	$\sigma_3$ (MPa)	$\sigma_1'$ (MPa)	$\sigma_3'$ (MPa)
1	160,0	4,85	157,8	-32,7
2	175,0	7,85	171,4	-33,8
3	200,0	12,85	194,1	-35,7
4	225,0	17,85	216,9	-37,5
5	250,0	22,85	239,6	-39,4

$$\nu = 0,228$$

Die grafiese voorstelling van die gegewens van tabel 8.1 word in figuur 8.1 gegee. Dit kan duidelik in figuur 8.1 gesien word dat daar 'n verwantskap bestaan tussen die sirkels, aangesien daar 'n reguitlyn gevind kan word wat die sirkels koppel deur 'n sekere invariant in elke geval te beskou.



Gewysige voorstelling van fraktuudata : Pennant Sandsteen

Figuur 8 · 1

### 8.3.2 Snowdown Sandsteen

Die bevindinge van paragraaf 8.3.1 word bevestig deur dieselfde prosedure te volg vir Snowdown sandsteen.

Tabel 8.2 stel die fraktuurdata vir hierdie gesteente in terme van netto-hoofnormaalspannings voor, terwyl figuur 8.2 die grafiese voorstelling van tabel 8.2 is.

TABEL 8.2

FRAKTUURDATA IN TERME VAN NETTO-HOOFNORMAALSPANNINGS

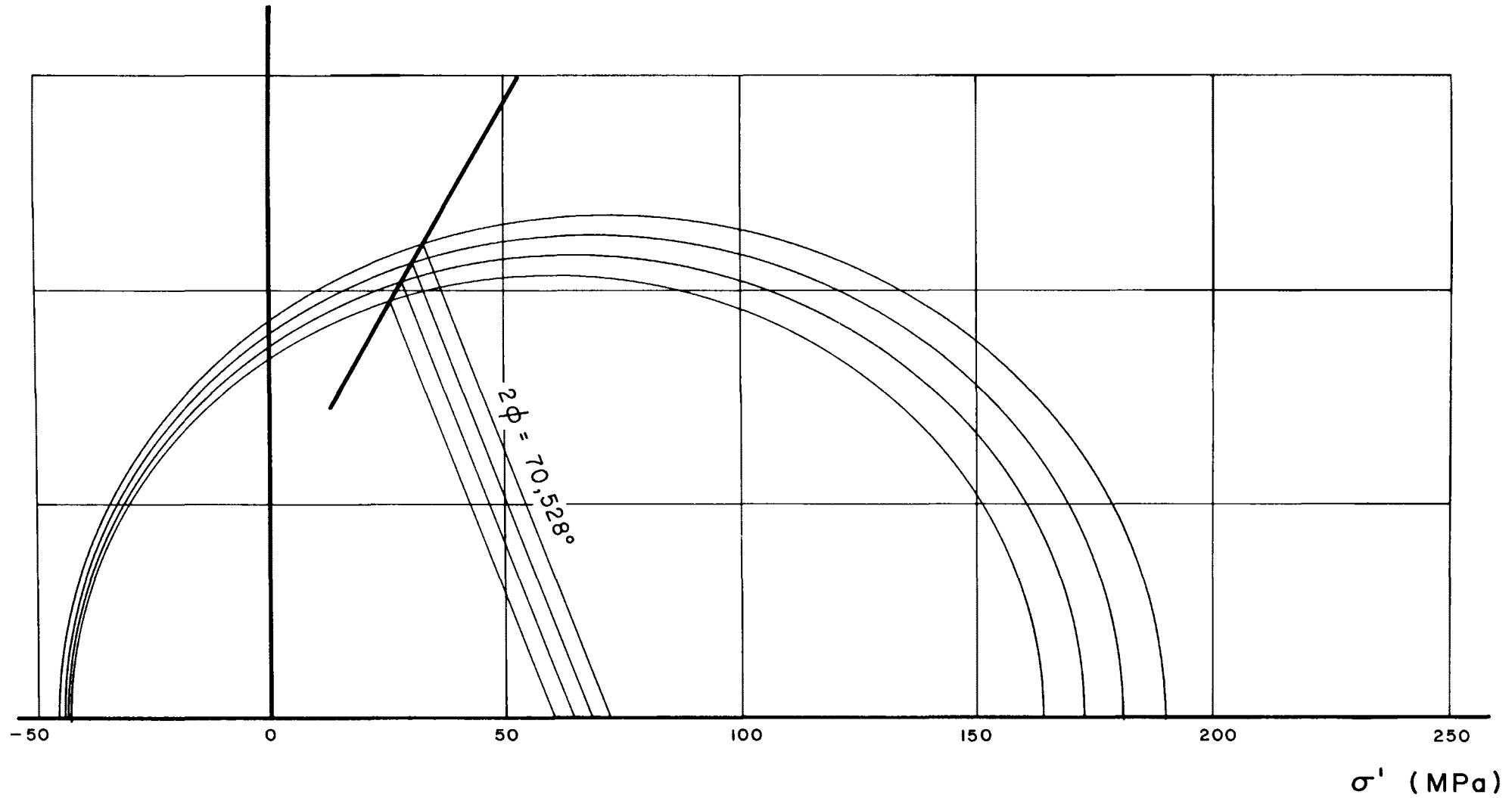
VIR SNOWDOWN SANDSTEEN

no.	$\sigma_1$ (MPa)	$\sigma_3$ (MPa)	$\sigma_1'$ (MPa)	$\sigma_3'$ (MPa)
1	165,0	1,46	164,2	-43,3
2	175,0	3,73	173,0	-44,3
3	185,0	6,00	181,8	-45,4
4	195,0	8,28	190,5	-46,4

$$\nu = 0,269$$

### 8.3.3 Materiaal afkomstig uit Gang 144 - E.R.P.M.

Tabel 8.3 en figuur 8.3 verteenwoordig die fraktuurdata vir hierdie gesteente. Ook in hierdie geval word dieselfde bevinding waargeneem.



Gewysigde voorstelling van fraktuurdata : Snowdown Sandsteen

Figuur 8 · 2

TABEL 8.3

FRAKTUURDATA IN TERME VAN NETTO-HOOFNORMAALSPANNINGS

VIR MATERIAAL AFKOMSTIG UIT GANG 144 - E.R.P.M.

no.	$\sigma_1$ (MPa)	$\sigma_3$ (MPa)	$\sigma_1'$ (MPa)	$\sigma_3'$ (MPa)
1	604	20	593,6	-142,2
2	637	30	621,4	-143,4
3	711	40	690,2	-155,3
4	755	50	729,0	-159,3
5	855	70	818,6	-170,5

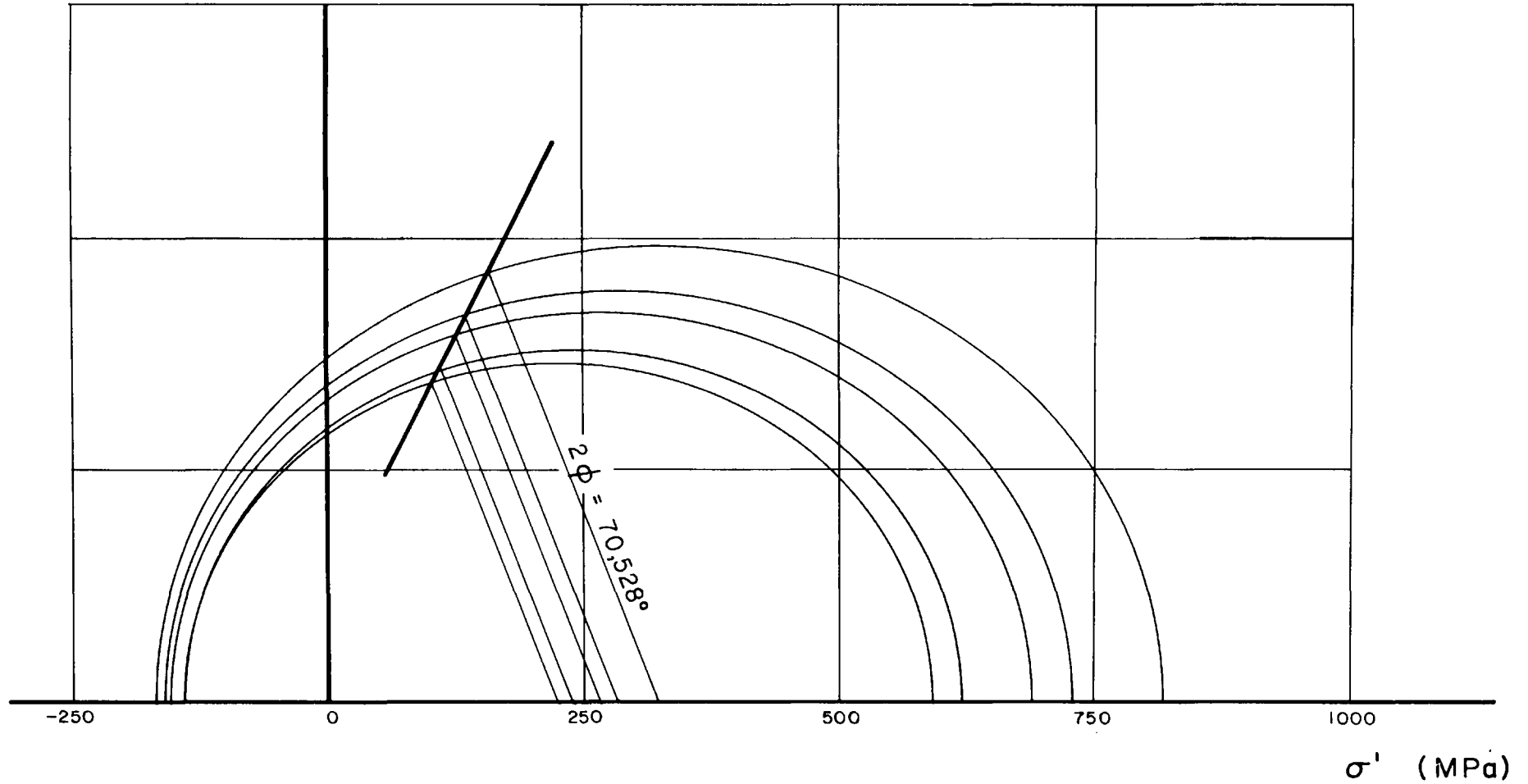
$$\nu = 0,28$$

8.3.4 Chertagtige Gangmateriaal

In tabel 8.4 word die fraktuurdata vir hierdie gesteente in terme van netto-hoofnormaalspannings gegee.

Die grafiese voorstelling van hierdie gegewens, wat in figuur 8.4 aangebied word, toon dat daar duidelik twee families van sirkels bestaan, wat besonder insigwend is, aangesien die twee families van mekaar onderskei word op grond van die plek waar die toetse uitgevoer is. Die verklaring van hierdie verskynsel behoort gevind te word uit een of 'n kombinasie van die volgende algemene argumente, naamlik:

- (i) dat dit nie dieselfde gesteente was wat deur die twee instansies getoets was nie;



Gewysige voorstelling van fraktuurdata - materiaal: gang 144 E.R.P.M.

Figuur 8 · 3

TABEL 8.4

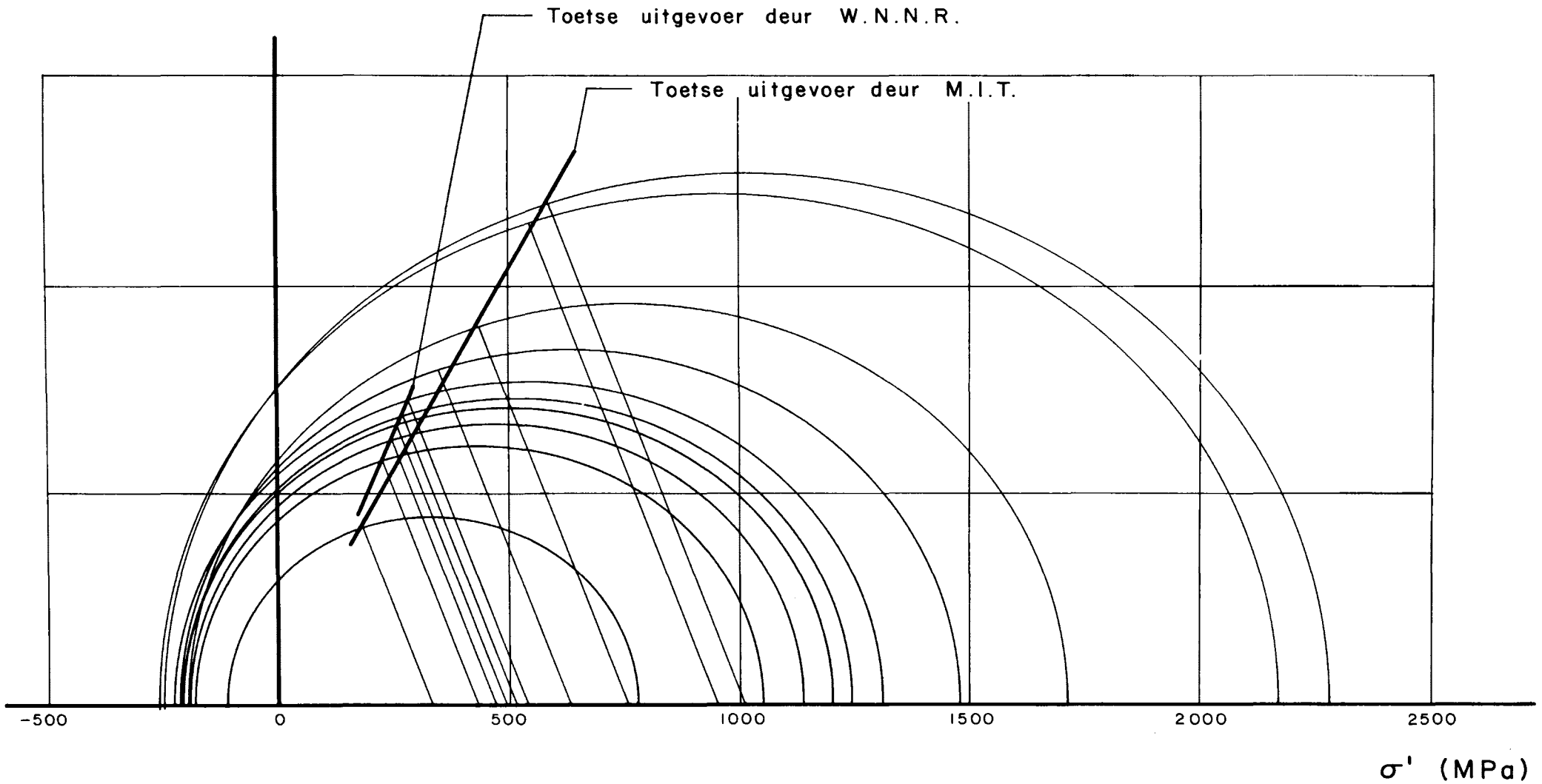
FRAKTUURDATA IN TERME VAN NETTO-HOOFNORMAALSPANNINGS  
VIR CHERTAGTIGE GANGMATERIAAL

no.	$\sigma_1$ (MPa)	$\sigma_3$ (MPa)	$\sigma_1'$ (MPa)	$\sigma_3'$ (MPa)	toets uitgevoer deur
1	813,59	77,91	780,4	-112,0	M.I.T.
2	1080,42	57,92	1055,7	-184,5	W.N.N.R.
3	1167,98	62,74	1141,3	-199,4	W.N.N.R.
4	1233,48	65,50	1205,6	-211,2	W.N.N.R.
5	1275,54	67,57	1246,8	-218,5	W.N.N.R.
6	1344,49	71,02	1314,2	-230,5	W.N.N.R.
7	1544,44	144,79	1482,8	-215,0	M.I.T.
8	1820,23	241,32	1717,4	-197,8	M.I.T.
9	2295,97	286,82	2173,8	-263,3	M.I.T.
10	2426,97	325,43	2288,3	-260,8	M.I.T.

$$\nu = 0,213$$

- (ii) dat, indien dit wel dieselfde gesteente was, die monsters wat deur die twee instansies getoets was op verskillende wyses gekies was, sodat faktore soos byvoorbeeld gelaagdheid wat elastisiteitseienskappe rigtingsgewys drasties beïnvloed, nie deur die twee instansies op dieselfde wyse benader is nie;
- (iii) dat, indien die toetse op dieselfde wyse op identies voorbereide monsters uitgevoer was, daar aansienlike verskil in die styfheid van





Gewysigde voorstelling van fraktuurdata : Chertagtige gangmateriaal

Figuur 8.4 © University of Pretoria

die apparatuur van die instansies bestaan wat aanleiding kan gee tot afwykings in die eksperimentele data; en

(iv) dat, indien anisotropieë uitgeskakel kan word, die twee instansies op verskillende eksperimentele wyses die drie-assige fraktuurdata verkry het, wat die „foutkonstante" tussen die twee groepe kan verklaar.

Uit die publikasie van Hoek [1965 - (37)] waaruit die oorspronklike fraktuurdata en beskrywing van hierdie gesteente verkry is, kan afgelei word, met behulp van sy bronneverwysings, dat die eksperimentele metode van verkryging van die  $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$  waardes van die twee instansies drasties verskil. In die geval van M.I.T., was gebruik gemaak van silindriese monsters wat longitudinaal direk belas was (daaruit  $\sigma_1$ ) en radiaal ingeklem was met behulp van 'n hidroliese vloeistof (daaruit  $\sigma_2 = \sigma_3$ ). Die W.N.N.R. het daarteen plaatmodelle gebruik wat biaksiaal belas was, en waaruit die waardes van  $\sigma_1$  en  $\sigma_2 = \sigma_3$  bereken was (Hoek [1965 - (37)] - p 131-142).

Hierdie afwyking in eksperimentele prosedure verklaar mynsinsiens die afwyking in eksperimentele data wat eers duidelik waarneembaar word wanneer die data op die netto-hoofnormaalspanningswyse, figuur 8.4, voorgestel word, argument (iv).

gesteente skakel argument (ii) uit, terwyl (i) nie van toepassing in hierdie geval is nie. 'n Soortgelyke verskynsel sal egter waarneembaar wees indien verskillende gesteentes met mekaar vergelyk word. Argument (iii) is weens die aanvaarding van argument (iv) ook nie in hierdie geval van toepassing nie.

#### 8.4 Bespreking

Dit kom voor asof eksperimentele data in eenvoudige verwerkte vorm sinvol en betekenisvol op hierdie wyse voorgestel kan word.

'n Besondere uitvloeisel van hierdie wyse van aanbieding van eksperimentele data is dat die rol van die invariante toestande van spanning beklemtoon word, aangesien ander invariante ook 'n soortgelyke koppeling tussen sirkels van 'n sekere familie van sirkels wat bymekaar hoort sal gee. Hierdie eienskap en die bevindinge van hoofstuk 7, kan waarskynlik aanleiding gee tot die formulering van 'n aanvaarbare fraktuurkriterium wat op genetiese grondslag berus.

## HOOFSTUK 9

### GEVOLGTREKKING

Uit die voorafgaande kan die volgende gevolgtrekkings gemaak word:

- i. Dat die voorgestelde materiaal-afhanklike verklaring van die Coulomb-Navier interne wrywingskoëffisiënt wel sinvolle waardes van die interne wrywingskoëffisiënt voorspel;
2. Dat die grootte van die normaalspanning op die kritieke vlak invariant sal wees;
3. Dat die grootte van die normaalspanning op die kritieke vlak die waarde van die gemiddelde netto-hoofnormaalspanning sal hê;
4. Dat die oriëntasie van die kritieke vlak 'n sekere konstante oriëntasie met betrekking tot 'n verwysingsrigting sal hê wanneer die materiaal 'n ideaal isotropiese toestand nader;
5. Dat elasticiteitseienskappe van materiale, die oriëntasie van die kritieke vlak beïnvloed;
6. Dat dieselfde kritieke vlak met betrekking tot 'n een-

voudig berekenbare verwysingsnetwerk, 'n konstante oriëntasie sal het;

7. Dat laasgenoemde oriëntasie onafhanklik is van die materiaal wat onder beskouing is, maar dat die verwysingsnetwerk wel materiaal-afhanklik is.
  
8. Dat alhoewel die voorgestelde materiaal-afhanklike verklaring, numeriesgewys, aanvaarbare waardes van die interne wrywingskoëffisiënt gee, kan geensins op hierdie stadium afgelei word wat die meganisme van inisiëring en voortplanting van frakture in 'n korrelrige medium, soos 'n gesteente, sal wees nie.

## VERWYSINGS

1. Baldrige, S., en G. Simmons, Progress in microcrack decoration (abstract), *Eos Trans. AGU*, 52, 342, 1971.
2. Barenblatt, G.I., The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture, *Advances in Applied Mechanics*, Academic Press, 7, 55-129, 1962.
3. Bieniawsky, E.M., A bibliography on fracture of rock, *Rep. S.Afr. Counc. sci. industr. Res.*, no. MEG 355, Mei 1965, 60 p.
4. Bieniawsky, Z.T., Mechanisms of brittle fracture of rock, Part I: Theory of the Fracture Process, *Rep. S.Afr. Counc. sci. industr. Res.*, no. MEG 520, Jan. 1967.
5. Bieniawsky, Z.T., Mechanisms of brittle fracture of rock, Part II: Experimental studies, *Rep. S.Afr. Counc. sci. industr. Res.*, no. MEG 521, 1967.
6. Bieniawski, Z.T., Mechanisms of brittle fracture of rock, Part III: Fracture in tension and under long-term loading, *Rep. S.Afr. Counc. sci. industr. Res.*, no. MEG 522, 1967.
7. Bilby, B.A., en J.D. Eshelby, Dislocations and the theory of fracture, *Fracture, An Advanced Treatise*, H. Liebowitz red., Academic Press, N.Y., 1, 99-182, 1968.
8. Bombolakis, E.G., Photoelastic study of initial stages of brittle fracture in compression, *Tectonophysics*, 6, 461-473, 1968.

9. Bombolokis, E.G., Study of the brittle fracture process under uniaxial compression, *Tectonophysics*, 18, 231-248, 1973.
10. Boresi, A.P., en P.P. Lynn, *Elasticity in Engineering Mechanics*, Prentice-Hall, V.S.A., 1974, 475 p.
11. Brace, W.F., Dilatancy-related electrical resistivity changes in rocks (abstract), *Eos Trans. AGU*, 56, 1195, 1974.
12. Brace, W.F., en E.G. Bombolakis, A note on brittle crack growth in compression, *J. Geophys. Res.*, 68, 3709-3713, 1963.
13. Brace, W.F., en A.S. Orange, Electrical resistivity changes in saturated rocks during fracture and frictional sliding, *J. Geophys. Res.*, 73, 1433-1445, 1968.
14. Brace, W.F., en A.S. Orange, Further studies of the effect of pressure on electrical resistivity of rocks, *J. Geoph. Res.*, 73, 5407-5420, 1968.
15. Brace, W.F., A.S. Orange, en T.M. Madden, The effect of pressure on the electrical resistivity of water-saturated crystalline rocks, *J. Geophys. Res.*, 70, 5669-5678, 1965.
16. Brace, W.F., B.W. Paulding, Jr., en C. Scholz, Dilatancy in the fracture of crystalline rocks, *J. Geophys. Res.*, 71, 3939-3953, 1966.
17. Cain, P.J., S.S. Peng, en E.R. Podnieks, Rock fragmentation by high frequency fatigue, *Proc. Third Cong. Int. Soc. Rock Mech.*, IIA, 367-372, 1974.
18. Crouch, S.L., Experimental determination of volumetric strains in failed rock, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 7, 589-603, 1970.

19. Evans, D., The Denver Area earthquakes and the Rocky Mountain arsenal well, *Mt. Geologist*, 3, 23-36, 1966.
20. Farran, J., en R. Perami, Microfissuration, deformation, and compressibility of rocks under triaxial stress, *Proc. Third Cong. Int. Soc. Rock Mechanics*, IIA, 138-143, 1974.
21. Friedman, M., Fracture in Rock, *Reviews of Geophysics and space Physics*, vol. 13, No. 3, (352-358), Julie 1975.
22. Friedman, M., X-ray analysis of residual elastic strain in quartzose rocks, *Basic and Applied Rock Mech.*, K.E. Gray, red., Proc. 10th Symp. Rock Mech., AIME, 573-595, 1972.
23. Friedman, M., Residual elastic strain in rocks, *Tectonophysics*, 15, 297-330, 1972.
24. Friedman, M., en T.R. Bur, Investigations of the relations among residual strain, fabric, fracture, and ultrasonic attenuation and velocity in rocks, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 11, 221-234, 1974.
25. Friedman, M., en J.M. Logan, The influence of residual elastic strain on the orientation of experimental fractures in three quartzose sandstones, *J. Geophys. Res.*, 75, 387-405, 1970.
26. Gallagher, J.J., M. Friedman, J. Handin, G.M. Sowers, Experimental studies relating to microfracture in sandstone, *Tectonophysics*, 21, 203-247, 1974.
27. Griffith, A.A., The phenomena of rupture and flow in solids, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, A221, 163-198, 1921.
28. Griffith, A.A., Theory of rupture, *Proc. First International Cong. Appl. Mech.*, Delft, 55-63, 1924.



29. Haimson, B.C., C.M. Kim, en T.M. Tharp, Tensile and compressive cyclic stresses in rock, in *New Horizons in Rock Mech.*, 14th Symp. on Rock Mech., Penn. St. Univ., Junie 1972.
30. Hallbauer, D.K., H. Wagner, en N.G.W. Cook, Some observations concerning the microscopic and mechanical behaviour of quartzite specimens in stiff, triaxial compression tests, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 10, 713-726, 1973.
31. Handin, John, On the Coulomb-Mohr failure criterion, *J. Geophys. Res.*, 74, 5343-5348, 1969.
32. Handin, John, H.C. Heard en J.N. Magouirk, The effect of the intermediate principle stress on the failure of limestone, dolomite, and glass at different temperatures and strain rates, *J. Geophys. Res.*, 72, 611-640, 1967.
33. Hardy, H.R. Jr., en Y.P. Clugh, Failure of geological materials under lowcycle fatigue, *Sixth Canadian Sump. on Rock Mechanics*, Montreal, May, 1970.
34. Hardy, H.R. Jr., R.Y. Kim, R. Stefanko, en Y.J. Wang, Creep and microseismic activity in geological materials, in *Rock Mech. Theory and Practice*, W.H. Somerton, red., Proc. Eleventh Symp. Rock Mech. Berkeley Calif., Junie 1968, AIME, 377-413, 1970.
35. Hardy, M.P., J.A. Hudson, en C. Fairhurst, The failure of rock beams, Part I - Theoretical studies, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 10, 53-67, 1973.

36. Healy, J.H., W.W. Rubey, D.T. Griggs, en C. B. Raleigh,  
The Denver earthquakes, *Science*, 161, 1301-1310,  
1968.
37. Hoek, E., Rock fracture under static stress conditions,  
*Rep. S.Afr. Counc. sci. industr. Res.*, No. MEG 383,  
1965.
38. Hoshini, K., en H. Koide, Process of deformation of the  
sedimentary rocks, *Proc. 2nd Congress of the Int.  
Soc. Rock Mech.*, Beograd, 1, Paper 2-13, 1970.
39. Hudson, J.A., M.P. Hardy, en C. Fairhurst, The failure of  
rock beams, Part II - Experimental studies, *Int.  
J. Rock Mech. Min. Sci.*, 10, 69-82, 1973.
40. Irwin, G.R., Fracture mechanics, *Structural Mechanics*, Goodier  
and Hoff eds., Pergamon Press, London, 557-592,  
1960.
41. Jackson, R.E., N.H. MacMillan, en A.R.C. Westwood, Chemical  
enhancement of rock drilling, *Proc. Third Cong.  
Int. Soc. Rock Mech.*, IIB, 1487-1493, 1974.
42. Jaeger, J.C., Brittle fracture of rocks, in *Failure and Breakage  
of Rock*, C. Fairhurst, red., Eighth Symp. Rock  
Mech., U. van Minn., AIME, (3-57), 1967.
43. Jaeger, J.C., *Elasticity, Fracture and Flow*, tweede uitgawe  
herdruk, Methuen en Kie, London, 1964, 212 p.
44. Jaeger, J.C., en N.G.W. Cook, *Fundamentals of Rock Mechanics*,  
Methuen en Kie., London, 1969, 513 p.
45. Jeffery, D.G., *Structural discontinuities in the Witwatersrand group  
on the E.R.P.M. mine: their Geology, Geochemistry and  
Rock Mechanics behavior*, Verhandeling, Universiteit  
van die Witwatersrand, 1975, 108 p.

46. Johnson, Arvid M., *Physical Processes in Geology*, Freedman, Cooper en Kie., Calif. 1970, 577 p.
47. Kassir, M.K., G.C. Sih, *Three dimensional crack problems*, volume 2 van *Mechanics of fracture*, red. G.C. Sih, 1975, Noordhoff.
48. Knill, J.L., J.A. Franklin en A.W. Malone, A study of acoustic emission from stressed rock, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 5, 87-121, 1968.
49. Krech, W.W., The energy balance theory and rock fracture energy measurements for uniaxial tension, *Proc. Third Cong. Int. Soc. Rock Mech.*, IIA, 167-173, 1974.
50. McClintock, F.A., en J.B. Walsh, Friction on Griffith cracks in rocks under pressure, *Proc. Fourth U.S. Congress on Applied Mech.*, Am. Soc. Mech. Eng., N.Y., 1015-1021, 1963.
51. Mogi, K., Earthquakes as fractures in the Earth, *Proc. Third Cong. Int. Soc. Rock Mech.*, I, 559-568, 1974.
52. Mogi, K., On the pressure dependence of strength of rocks and the Coulomb fracture criterion, *Tectonophysics*, 21, 273-285, 1974.
53. Mogi, K., Effect of the triaxial stress system on fracture and flow of rocks, *Phys. Earth Planet. Interiors*, 5, 318-324, 1972.
54. Nascimento, U., C.B. Falcao, A. Pinelo en M. Marques, Influence of intermediate stress upon internal friction in block masses, *Proc. Third Cong. Int. Soc. Rock Mech.*, IIA, 288-293, 1974.

55. Obert, L., Brittle fracture of rocks, in *Fracture*, H. Liebowitz red., Academic Press, vol. 7, (94-155), 1972.
56. Orowan, E., Classical and dislocation theories of brittle fracture, *Fracture*, Wiley and Sons, N.Y., 147-160, 1959.
57. Phillips, F.C., *The use of stereographic projection in structural geology*, Edward Arnold, London, 1963, 86 p.
58. Popov, Egor P., *Introduction to Mechanics of solids*, Prentice Hall, London, 1968, 571 p.
59. Price, N.J., Rheology of crustal rocks, *Geodynamics Today*, 150-163, 1975.
60. Price, N.J., *A study of rock properties in conditions of triaxial stress*, in: *Mechanical Properties of Non-Metallic Brittle Materials*, red. W.H. Walton, Butterworth, London, 1958, pp 106-122.
61. Raleigh, C.B., J.H. Healy, en J.D. Bredehoeft, Faulting and Crustal Stress at Rangely, Colorado, in *Flow and Fracture of Rocks*, *AGU Monograph*, 16, 275-284, 1972.
62. Roering, C., en Van der Merwe, P., 'n Moontlike materiaalafhanklike verklaring van die Coulomb-Navier interne wrywings-Koëffisiënt. Ongepubliseerde interne verslag, Randse Afrikaanse Univ., 1975.
63. Scheidegger, Adrian E., The Rheology of the Tectonosphere, *Int. Geol. Congr., twenty-fourth session*, 79-83, Montreal, 1972.
64. Scheidegger, Adrian E., Rheology of soil and rock, Estratto da *Geologia Applicat E Edrogeologia*, V.VIII, deel I, Bari, 1973.

65. Scholz, C.H., Mechanism of creep in brittle rock, *J. Geophys. Res.*, 73, 3295-3302, 1968.
66. Scholz, C.H., Microfracturing and the inelastic deformation of rock in compression, *J. Geoph. Res.*, 73, 1417-1432, 1968.
67. Scholz, C.H., Experimental study of the fracturing process in brittle rock, *J. Geoph. Res.*, 73, 1447-1454, 1968.
68. Scholz, C.H., en R. Kranz, Notes on dilatancy recovery, *J. Geoph. Res.*, 79, 2132-2134, 1974.
69. Seely, F.B., en J.O. Smith, *Advanced Mechanics of Materials*, tweede uitgawe, Wiley, London, 1952, 680 p.
70. Sih, G.C. (Red), Proc. of an int. conf. on *Dynamic crack propagation*, Pennsylvania, 1972, Noordhof, 721 p, 1973.
71. Simmons, G., R.W. Siegfried II en M. Féves, Differential Strain Analysis: A new method for examining cracks in rocks, *J. Geophys. Res.*, 79, 4383-4385, 1974.
72. Timoshenko, S., *Strength of Materials, Vol. II*, derde uitgawe, D. van Nostrand, New York, 1958, 572 p.
73. Timoshenko, S., en D.H. Young, *Elements of Strength of Materials*, vyfde uitgawe, D. van Nostrand, New York, 1968, 377 p.
74. Wawersik, W.R., en C.A. Fairhurst, A study of brittle rock fracture in laboratory compression tests, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 7, 561-575, 1970.

75. Zoback, M.D., en J.D. Byerlee, The effect of microcrack dilatancy on the permeability of Westerly Granite, *J. Geoph. Res.*, 80, 752-755, 1975.
76. Zoback, M.D., en J.D. Byerlee, The effect of cyclic differential stress in Westerly Granite under uniaxial and triaxial conditions, *J. Geophys. Res.*, 80, 1526-1530, 1975.