جامعة النجاح الوطنية
كلية الدراسات العليا

مراحل نمو الفهم الهندسي في موضوع المثلثات باستخدام الجيوجبرا لدى طلاب الصف الثامن الأساسي (دراسة نوعية)

إعداد
رجاء لطفي احمد أبو عره

إشراف
د. وجيه ضاهر

قدمت هذه الأطروحة استكمالاً لمتطلبات الحصول على درجة الماجستير في أساليب تدريس الرياضيات بكلية الدراسات العليا في جامعة النجاح الوطنية في نابلس، فلسطين.
2014م

مراحل نمو الفهم الهندسي في موضوع المثلثات باستخدام الجيوجبرا لدى طلاب الصف الثامن الأساسي (دراسة نوعية)

إعداد

رجاء لطفي احمد أبو عره

نوقشت هذه الأطروحة بتاريخ 2014/5/4م، وأجيزت.

أعضاء لجنة المناقشة	التوقيع
1. د. وجيه ضاهر / مشرفاً ورئيساً	.....
2. د. فطين مسعد / ممتحناً خارجياً	.....
3. د. سهيل صالحة / ممتحناً داخلياً	.....

الإهداء

من القلب النابض بالأمل... من صرخات الحياة... من جروح التحديات... من وقفات الاماكن الجميلة... من ذكريات الماضي... من آمال المستقبل الواعد...

أهدي عملي هذا إلى من كان لهم الفضل عليّ بعد الله تعالى في إعطائي كل الحب والحنان..(أمي وأبي) داعياً الله عز وجل ان يطيل بقاءهما.

الى من سهر على راحتي وتقدمي ونجاحي... الى من مدّ لي يد العون وشاركني أفراحي وأحزاني... الى زوجي الحبيب مجـدي.

الى فلذات أكبادي... ومن كان حبهم فؤادي... ابنائي رؤى وملاك وكريم.

الى من شددت بهم أزري... ورأيت فيهم ذكريات طفولتي... اخوتي واخواتي الاعزاء.

الى من عشت معها اجمل الاوقات... ورسمت على وجهي احلى الابتسامات... صديقتي الغالية هالـة.

الى من علمني حرفا فكنت له عبدا... دكتوري الفاضل وجيه ضاهر.

الى كل من كان له وقفة معي في هذه الحياة... اليهم والى كل من تاه قلمي عن ذكره... اهدي عملي هذا.

الشكر والتقدير

أبدأ بشكري لله عز وجل الذي وفقني في اتمام عملي هذا، وحق ردّ الجميل يأمرني ان أتقدم بجميل الشكر لكل من وقف الى جانبي وأرشدني الى الطريق السويّ، وأخص بالذكر دكتوري الفاضل وجيه ضاهر، لما ارشدني له من خير وصواب في دراستي هذه. كما اتقدم بالشكر الى اعضاء لجنة المناقشة الافاضل، الدكتور سهيل صالحة والدكتور فطين مسعد على ملاحظاتهم التي اثرت الدراسة.

ولا يفوتني تقديم شكري الجزيل الى مديرة مدرسة راهبات مار يوسف الاستاذة عبير كسبري والأستاذ الفاضل ابراهيم على ما قدماه من عون في اتمام دراستي.

وأختم بتقديم الشكر الذي لا ينتهي لزوجي الذي لم يبخل عليّ بنصائحه وبعطائه والذي كان سندا لي في كل خطوة في مسيرتي التعليمية.

إليهم جميعا أقدّم شكري

الباحثة

الإقرار

أنا الموقعة أدناه مقدمة الرسالة التي تحمل العنوان:

مراحل نمو الفهم الهندسي في موضوع المثلثات باستخدام الجيوجبرا لدى طلاب الصف الثامن الأساسي (دراسة نوعية)

أقر بأن ما اشتملت عليه هذه الرسالة إنما هي نتاج جهدي الخاص، باستثناء مـــا تمـــت الإشارة إليه حيثما ورد، وأن هذه الرسالة ككل، أو أي جزء منها لم يقدم من قبل لنيل أية درجة علمية أو بحث علمي أو بحثي لدى أية مؤسسة تعليمية أو بحثية أخرى.

Declaration

The work provided in this thesis, unless otherwise referenced, is the researcher's own work, and has not been submitted elsewhere for any other degree or qualification.

Student's name: **اسم الطالبة:**

Signature: **التوقيع:**

Date: **التاريخ:**

فهرس المحتويات

الموضوع	الصفحة
الإهداء	ج
الشكر والتقدير	د
الإقرار	هـ
فهرس المحتويات	و
فهرس الجداول	ط
فهرس الأشكال	ي
فهرس الملاحق	م
الملخص	ن
الفصل الأول: مقدمة الدراسة ومشكلتها	**1**
مقدمة الدراسة	2
مشكلة الدراسة	3
أهمية الدراسة	4
هدف الدراسة	5
أسئلة الدراسة	5
حدود الدراسة	6
مصطلحات الدراسة	6
الفصل الثاني: الإطار النظري والدراسات السابقة	**8**
الإطار النظري	9
مستويات نمو الفهم الرياضي	9
نموذج النظرية	11
خصائص النظرية	14
لا حاجة إلى حدود بين الحلقات المكونة للنظرية	14
عملية الطي العكسي: الرجوع إلى حلقة سابقة	15
ممارسات الطلاب التعلُّمية خلال كل مستوى من مستويات بناء المعرفة	17
الدراسات السابقة	17
أولا: دراسات حول نموذج النظرية	18

الموضوع	الصفحة
ثانيا: دراسات حول استخدام الحاسوب في تدريس الهندسة	19
ثالثا: دراسات استخدمت جيوجبرا في تدريس الرياضيات	22
تعقيب على الدراسات السابقة	23
موقع الدراسة الحالية من مجمل الدراسات السابقة	24
الفصل الثالث: منهجية الدراسة	**25**
إطار البحث	26
اجراءات البحث	26
طريقة جمع المعطيات	28
طريقة تحليل المعطيات	28
الفصل الرابع: النتائج	**30**
الموضوع الأول: المثلث	31
أولا: تصنيف المثلثات	31
ثانياً: شروط تطابق المثلثات (ض ض ض):	38
ثالثاً: تطبيقات مباشرة على شرط التطابق (ض ض ض)	45
رابعاً: تطبيقات غير مباشرة على شرط التطابق (ض ض ض)	46
خامسا: تطور فهم الطلاب أثناء تعلم شروط التطابق الأخرى (ض ز ض، ض ز ز، ضلع ووتر في مثلث قائم الزاوية)	49
الموضوع الثاني: المثلث متساوي الساقين	54
تطبيقات مباشرة على النظرية الخاصة بالمثلث متساوي الساقين:	61
تطبيقات غير مباشرة على النظرية الخاصة بالمثلث متساوي الساقين:	64
الموضوع الثالث: المثلث متساوي الأضلاع	67
تطبيقات مباشرة على النظرية الخاصة بالمثلث قائم الزاوية	77
تطبيقات غير مباشرة على النظرية الخاصة بالمثلث قائم الزاوية:	83
المقابلات التي أجرتها الباحثة مع الطلاب	91
الأفعال الإدراكية	91
الجانب الوجداني	93
مناقشة النتائج	94
تطور معرفة الطلاب في موضوع تصنيف المثلثات	94

الموضوع	الصفحة
تطور معرفة الطلاب في موضوع شروط التطابق (ض ض ض)	96
التطبيقات المباشرة وغير المباشرة على شرط التطابق (ض ض ض):	97
تطور معرفة الطلاب في موضوع المثلث متساوي الساقين	98
التطبيقات المباشرة على النظرية الخاصة بالمثلث متساوي الساقين	100
التطبيقات غير المباشرة على النظرية الخاصة بالمثلث متساوي الساقين	100
تعلم الطلاب موضوع المثلث متساوي الأضلاع	101
التطبيقات المباشرة على النظرية الخاصة بالمثلث قائم الزاوية	102
التطبيقات غير المباشرة	102
المقابلة التي أجرتها الباحثة مع الطلاب	103
الاستنتاجات والتوصيات	**105**
قائمة المصادر والمراجع	**106**
الملاحق	**112**
Abstract	**b**

فهرس الجداول

الرقم	الشكل	الصفحة
جدول (1)	توزيع الطلاب في المجموعات الثلاث	27
جدول (2)	مستويات تطور فهم مجموعة كريم في موضوع تصنيف المثلثات	37
جدول (3)	تطور فهم مجموعة كريم في موضوع شرط التطابق (ض ض ض)	44
جدول (4)	تطور فهم مجموعة كريم في التطبيقات غير المباشرة لشرط التطابق (ض ض ض)	49
جدول (5)	تطور فهم مجموعة كريم في موضوع النظرية الخاصة بالمثلث متساوي الساقين	59
جدول (6)	تطور فهم مجموعة كريم للتطبيقات المباشرة الخاصة بالنظرية الخاصة بالمثلث متساوي الساقين	64
جدول (7)	تطور فهم مجموعة كريم في التطبيقات غير المباشرة للنظرية الخاصة بالمثلث متساوي الساقين	66
جدول (8)	تطور فهم مجموعة كريم لموضوع النظرية الخاصة بالمثلث قائم الزاوية	75
جدول (9)	تطور فهم مجموعة كريم في التطبيقات المباشرة للنظرية الخاصة بالمثلث قائم الزاوية	82
جدول (10)	تطور فهم مجموعة كريم في التطبيقات غير المباشرة للنظرية الخاصة بالمثلث قائم الزاوية	90

فهرس الأشكال

الرقم	الشكل	الصفحة
شكل (1)	البناء الداخلي ومركبات نظرية الفهم الرياضي حسب بيري وكيرين	13
شكل (2)	الرجوع لمستوى سابق لتطوير الفهم الرياضي	16
شكل (3)	تصنيف المثلثات حسب أطوال الأضلاع كما رسمها الطلاب	33
شكل (4)	المثلث الذي رسمته المعلمة على جيوجبرا	33
شكل (5)	المثلث الذي رسمته المعلمة	34
شكل (6)	المثلث متساوي الساقين على جيوجبرا كما رسمه الطلاب	35
شكل (7)	مخطط تطور فهم الطلاب في موضوع تصنيف المثلثات	36
شكل (8)	مثلثان متطابقان بثلاثة أضلاع كما رسمهما الطلاب	39
شكل (9)	المثلثان كما رسمتهما المعلمة على جيوجبرا	39
شكل (10)	المثلثان كما رسمهما الطلاب	41
شكل (11)	المثلثان كما رسمتهما المعلمة في المثال	42
شكل (12)	مخطط تطور فهم الطلاب في موضوع المثلث	43
شكل (13)	السؤال كما رسمه الطلاب على جيوجبرا	45
شكل (14)	رسمة التمرين كما رسمها الطلاب	46
شكل (15)	رسمة التمرين كما رسمها الطلاب	47
شكل (16)	مخطط تطور فهم الطلاب في التطبيقات غير المباشرة لشرط التطابق (ض ض ض).	48
شكل (17)	مثلثان متطابقان بضلعين وزاوية محصورة بينهما	50
شكل (18)	مخطط تطور فهم مجموعة كريم في شرط التطابق (ض ز ض).	51
شكل (19)	مثلثان متطابقان بضلعين وزاوية.	52
شكل (20)	مخطط تطور فهم مجموعة كريم في شرط التطابق (ض ز ز)	53
شكل (21)	مثلثان متطابقان بضلع ووتر في مثلث قائم الزاوية	53
شكل (22)	مخطط تطور فهم المجموعات في شرط التطابق(ضلع ووتر في مثلث قائم).	54
شكل (23)	المثلث الذي يمثل النظرية كما رسمه الطلاب	56
شكل (24)	المثلث كما رسمته المعلمة على جيوجبرا	56

الرقم	الشكل	الصفحة
شكل (25)	المثلث كما رسمه الطلاب على جيوجبرا	58
شكل (26)	مخطط يوضح تطور فهم الطلاب في النظرية الخاصة بالمثلث متساوي الساقين	59
شكل (27)	التمرين كما رسمه الطلاب على جيوجبرا	61
شكل (28)	مخطط يوضح تطور فهم الطلاب في التطبيقات المباشرة للنظرية الخاصة بالمثلث متساوي الساقين.	63
شكل (29)	المثلث كما رُسم على جيوجبرا	64
شكل (30)	مخطط يوضح تطور فهم الطلاب في التطبيقات غير المباشرة للنظرية الخاصة بالمثلث متساوي الساقين.	66
شكل (31)	المثلث متساوي الأضلاع كما رسمه يوسف	67
شكل (32)	رسمة أحد تمارين الدرس كما رسمها الطلاب	69
شكل (33)	أشكال محور التماثل كما رسمها الطلاب	69
شكل (34)	محاور تماثل المثلث متساوي الأضلاع كما رسمها الطلاب	70
شكل (35)	رسم الطلاب على جيوجبرا	71
شكل (36)	الرسمة بعد إيجاد أطوال الوتر والقاعدة في المثلث القائم	72
شكل (37)	المثلث القائم كما رسمه عمر على جيوجبرا	73
شكل (38)	مخطط يوضح تطور فهم الطلاب في موضوع المثلث متساوي الأضلاع	74
شكل (39)	رسمة التمرين على جيوجبرا	77
شكل (40)	رسمة التمرين على جيوجبرا	78
شكل (41)	الشكل النهائي للمثلث كما رسمه الطلاب على جيوجبرا	79
شكل (42)	رسمة التمرين على جيوجبرا	80
شكل (43)	مخطط يوضح تطور فهم الطلاب في التطبيقات المباشرة للنظرية الخاصة بالمثلث قائم الزاوية.	81
شكل (44)	رسمة التمرين على جيوجبرا	83
شكل (45)	رسمة التمرين على جيوجبرا	84
شكل (46)	رسمة التمرين على جيوجبرا	85
شكل (47)	رسمة التمرين على جيوجبرا	87

الرقم	الشكل	الصفحة
شكل (48)	مخطط يوضح تطور فهم الطلاب في التطبيقات غير المباشرة للنظرية الخاصة	89
شكل (49)	موضوع تصنيف المثلثات كما هو في منهاج الرياضيات للصف الثامن	95

فهرس الملاحق

الرقم	الملحق	الصفحة
ملحق (1)	المادة التدريبية التي اعدتها الباحثة لتعليم الطلاب موضوع المثلثات باستخدام جيوجبرا	112
ملحق (2)	تفريغ فيديو للدرس الاول في موضوع المثلث متساوي الســـاقين – نظرية تنصيف زاوية الراس	117
ملحق (3)	تحليل درس المثلث	119
ملحق (4)	قائمة أعضاء لجنة تحكيم المادة التدريبية	120

مراحل نمو الفهم الهندسي في موضوع المثلثات باستخدام الجيوجبرا لدى طلاب الصف الثامن الأساسي (دراسة نوعية)

إعداد

رجاء لطفي احمد أبو عره

إشراف

د. وجيه ضاهر

الملخص

هدفت هذه الدراسة إلى التعرف على مستويات الفهم الهندسي لدى طلاب الصف الثامن الأساسي في موضوع المثلثات، وذلك بالاعتماد على نظرية الفهم الرياضي التي طوّرها بيري وكيرين (Pirie & Kieren,1991). وبشكل محدد أرادت هذه الدراسة الاجابة عن الأسئلة التالية:

1- ما مستويات فهم طلاب الصف الثامن لموضوع المثلثات في الهندسة بمساعدة جيوجبرا؟

2- ماذا يميز كل مستوى من مستويات فهم الطلاب لموضوع المثلثات في الهندسة بمساعدة جيوجبرا؟

3- ما الذي يؤثر على انتقال الطلاب من مستوى إلى مستوى من مستويات الفهم عندما يتعلمون موضوع المثلثات في الهندسة بمساعدة جيوجبرا؟

وللاجابة عن الاسئلة السابقة قامت الباحثة باختيار عدد من طلاب الصف الثامن الأساسي في إحدى المدارس الخاصة التابعة لمديرية التربية والتعليم في محافظة نابلس والبالغ عددهم ثمانية طلاب من ذوي التحصيل الأعلى من (80)، وقسّمتهم إلى ثلاث مجموعات، مجموعتين مكونة كل واحدة منهما من ثلاث طلاب ومجموعة واحدة مكونة من طالبين.

وقامت الباحثة بمراقبة ومتابعة أفعال وأقوال الطلبة أثناء عملهم في مجموعات، وتوثيق ذلك بالصوت والصورة (الفيديو)، وإجراء مقابلات معهم للاستفسار عن بعض القضايا الخاصة بتعلمهم لموضوع المثلثات، كما قامت الباحثة، بالاعتماد على النظرية المجذّرة لستراوس

وكوربين (Strauss & Corbin, 1998) وآخذة بعين الاعتبار نظرية بيري وكيرين، بتحليل التجربة، وبناء عليه تم التعرّف على مستويات الفهم الهندسي لمجموعات الطلاب.

توصلت الباحثة إلى أنّ الطلاب مرّوا ببعض مستويات الفهم أثناء تعلمهم موضوع المثلثات في وحدة الهندسة، هذه المستويات مختلفة حسب طبيعة الموضوع الذي تعلموه، فقد مرّوا بمستويات التعرُّف البدائي وتكوين الصورة وامتلاكها وملاحظة الصفات والتعميم والملاحظة، لكنهم لم يتمكنوا من الوصول إلى المستويات المتقدمة من الفهم والمتمثلة في مستويي الهيكلة والاستقصاء؛ وقد عزت الباحثة السبب في ذلك إلى طبيعة التطبيقات غير المباشرة التي قدّمتها المعلمة لهم والأنشطة التي نفذوها والتي لم تكن محفزة لهم للوصول إلى مفاهيم جديدة.

نتائج البحث أظهرت أن مستويات الفهم التي مر بها الطلاب في الموضوعات التي تعلموها (المثلث، المثلث متساوي الساقين، المثلث متساوي الاضلاع) تميّزت عن بعضها من حيث حدوث عمليات الطي العكسي أو عدمه، ووجود حدود بين مستويات الفهم أو عدمه، وقيام الطلاب بمهمات تعلُّمية مختلفة في كل مستوى من مستويات الفهم.

وبناء على النتائج التي تم التوصل لها أكّدت الباحثة أهمية إعطاء الطلاب الفرصة لمعالجة نظريات هندسية جديدة بالاعتماد على النظريات الهندسية التي تعلموها وبدون إرشاد كبير من قبل المعلمة.

كذلك أوصت الباحثة بإجراء مزيد من الدراسات الكيفية (النوعية) حول موضوع الفهم الرياضي، وتسليط الضوء عليها بسبب ندرة الدراسات العربية التي تعالج هذا الموضوع مستخدمين النظرية نفسها التي استخدمتها الباحثة في هذا البحث، كما أوصت بضرورة استخدام برنامج جيوجبرا في تعليم الطلاب مادة الرياضيات، إذ أنّ جيوجبرا مكَّنهم من استكشاف مواقف رياضية جديدة، والتّقدم إلى مستويات أعلى من الفهم، وما لذلك من أثر في تحسين أدائهم والارتقاء بمستوى تحصيلهم العلمي في هذه المادة، اقترحت الباحثة أيضا أن يتم عقد دورات تدريبية لمشرفي ومعلمي الرياضيات حول كيفية استخدام برنامج جيوجبرا في تدريس الرياضيات.

الفصل الأول

مقدمة الدراسة ومشكلتها

الفصل الأول

مقدمة الدراسة ومشكلتها

مقدمة الدراسة

عرّف بعض العلماء الرياضيات بأنّها علم القياس. كما عدّها البعض الآخر لغة العلوم إذ أنّ هذه العلوم لا تكتمل إلاّ عندما نحوّل نتائجها إلى معادلات و نحوّل ثوابتها إلى خطوط بيانيّة (مقدادي، 2001).

وتُعرّف الرياضيات كذلك بأنها دراسة القياس و الحساب والهندسة. هذا بالإضافة إلى المفاهيم الحديثة نسبيا و منها البنية، الفضاء أو الفراغ، و التغير و الأبعاد. و بشكل عام قد يعرفها البعض على أنها دراسة البنى المجردة باستخدام المنطق و البراهين الرياضية و التدوين الرياضي (الحربي، 2003).

تُعدّ مفاهيم الفضاء والقياس من المفاهيم الخاصة بعلم الهندسة، كما تمثل الهندسة أحد الفروع المهمة في علم الرياضيات وأحد مكوناتها الأساسية؛ لأنها تزود المتعلمين بالمهارات الأساسية الضرورية للحياة العملية مثل مهارات الحس المكاني والاستكشاف والقدرة على حل المشكلات والتعليل الاستنتاجي والقدرة على التخمين، كما أنها تتضمن جوانب تعلم معرفية لازمة لفهم وتفسير جوانب التعلم المعرفية الأخرى المتضمنة لفروع الرياضيات المختلفة (الحربي، 2003).

وتعدّ الهندسة من أبرز وجوه الحضارة الإنسانية؛ فمنذ بدأ الإنسان يبني البيوت ويُعِدُّ الأراضي للزراعة كان محتاجًا للهندسة والقياس، كما لا يخفى إسهامها الكبير في القدرة على التفكير المنطقي والتفكير المكاني لدى دارسيها، ولعل هذا ما جعلها تلعب دورًا كبيرًا في منهاج الرياضيات، وبرز في الآونة الأخيرة اهتمام كبير في الهندسة فأصبحت مادة حية أكثر من أي وقت مضى، وأخذت تغزو ميدان الرياضيات بأكمله (O'Connor, 2000)، وبلغ هذا الاهتمام أوجَه عندما أوصى المجلس الوطني لمعلمي الرياضيات الأمريكية (National Council of

Teachers of Mathematics- NCTM) في معاييره المنشورة سنة 2000 إلى ضرورة زيادة التركيز على الهندسة في جميع المستويات، واعتبارها من أبرز معايير رياضيات القرن العشرين؛ ذلك لأنّ المعرفة الهندسية وإدراك علاقتها أمران مرتبطان ببيئة المتعلّم وحياته اليومية، علاوة على ارتباطهما الوثيق بمواضيع رياضية وعلمية أخرى، مما يشير إلى اهتمام أكبر بالهندسة وكيفية تدريسها (أبو عميرة، 2002). إذ أن الطلبة على المستوى العالمي يعانون من صعوبات عند تعلمهم للهندسة، أهمها تتمثل في التركيز على الجوانب الاستنتاجية والبرهنة الشكلية، دون الاهتمام بالعمليات الرياضية الجديدة مثل الحس الهندسي واستخدام التكنولوجيا في تدريس الهندسة (الجمعية المصرية لتربويات الرياضيات، 2007).

لذلك حاولت الباحثة استخدام برنامج جيوجبرا بهدف التعرّف على مستويات الفهم التي يمر بها الطلاب اثناء تعلّمهم موضوع المثلثات وما يميز انتقالهم من مستوى فهم الى مستوى اخر واهم خصائص الفهم في كل مستوى مرّوا به.

مشكلة الدراسة

على الرغم من الأهمية المتزايدة للرياضيات في العصر الحالي وما طرأ على مناهجها من تطورات، إلا أن الكثير من الطلبة يعانون من صعوبات في تعلمها وقد ارتبطت بتلك الصعوبات المخاوف والقلق لدى الطلبة، الأمر الذي ولّد لديهم الشعور بأن تعلم الرياضيات أمر صعب ومعقد لا يستطيع تعلمها إلا ذَوو المستويات العليا .

ويجد الطلبة صعوبة بالغة في تعلم الرياضيات وينظرون إليها على أنها مادة جافة ومملة، مما أدّى إلى عزوفهم عن تعلمها، وجعل البعض منهم يكمل دراسته في العلوم الإنسانية بعيدا عن دراسة الرياضيات. فضلا عن ذلك إن ضعف الطلبة في مادة الرياضيات وتدني مستوى تحصيلهم (كثرة الرسوب وقلة النجاح) جعلها مصدر قلق بالنسبة لهم ولأولياء أمورهم وللمعلمين على حد سواء، وذلك لأن البناء الرياضي لهذه المادة هو بناء هرميّ وتراكمي تعتمد فيه الأفكار الجديدة على الأفكار السابقة.

وللتغلّب على صعوبات الطلاب في تعلّم الرياضيات يجب استكشاف كيفية تعلّمهم لها والعمليات التعلُّمية التي يقومون بها لأجل الفهم الرياضي بشكل عام والهندسي بشكل خاص، إذ أنّ من أهداف تدريس الرياضيات هو فهم أساسيات الرياضيات، كالمفاهيم الرياضية، القواعد الرياضية، التركيبات الرياضية، وطبيعة البرهان الرياضي.

والمقصود بفهم أساسيات الرياضيات هو إدراك أو معرفة أو تمييز أو حفظ المعلومات الرياضية الأساسية، وهي في دراستنا هذه معلومات هندسية، كالمفاهيم والعلاقات والقواعد واستعمالها وإجراء الحسابات وبرهنة النظريات والتعريفات والبديهيات، وتكوين هذه الأساسيات في ذهن الطالب يتطلّب معرفة وفهم أساس ما يتعلّمه. إذ يلعب الفهم الدور الأول والأساسي في كل خطوة من خطوات التدريس؛ فإدراك الطالب لمعنى ما يقوم به يسهل عليه القيام بتنفيذه، وقد أثبتت الأبحاث أنّ الفهم هدف أساسي من تدريس الرياضيات، إذ أنّ التدريس الآلي يقتل روح الابتكار والإبداع عند الطالب.

ومن هنا جاءت هذه الدراسة التي تتحدد مشكلتها بالإجابة عن السؤال الرئيس الآتي: ما هي مستويات فهم طلاب الصف الثامن لموضوع المثلثات بمساعدة برنامج جيوجبرا؟

أهمية الدراسة

تعالج الأبحاث العربية عموما تحصيل الطلبة في الرياضيات بشكل عام وفي الهندسة بشكل خاص ولكنها قليلا ما تعالج عمليات فهم الطلاب للمصطلحات الرياضية والعلاقات بين هذه المصطلحات. ما ذكرناه صحيح بشكل عام وهو صحيح بشكل خاص بالنسبة لعمليات فهم الطلاب عندما يستخدمون التكنولوجيا. لذا يأتي البحث الحالي ليحاول الإسهام في هذا الجانب غير الملتفت إليه في الأبحاث في العالم العربي.

ويُعتقد أنّ نتائج هذا البحث ستؤثر إيجابا على عملية تعلّم الرياضيات عامة والهندسة خاصة كونها تسلط الضوء على كيفية تعلم وفهم الطلاب لموضوع رياضي معين، كما قد تفيد هذه الدراسة مجتمع المعلمين والطلاب من خلال تزويد معلمي الرياضيات بإطار لعمليات فهم

الطلاب للمواضيع الهندسية وبذلك يستطيع المعلمون إرشاد الطلبة بشكل أكثر جدوى أثناء تعلّم الهندسة، خصوصا عندما يستخدمون أدوات تكنولوجية، هذا قد يزيد من تحصيل الطلاب في الرياضيات وستجعل من تعلم الرياضيات أمرا ممتعا وشيقا وبالتالي تقليل الفجوة بين الطلاب وتعلُّم مادة الرياضيات.

وفي حدود اطلاع الباحثة فإن الدراسات العربية في هذا المجال قليلة، وبهذا، تأمل الباحثة من هذه الدراسة الإسهام في بناء معرفة جديدة تخص العمليات التعلُّمية التي يقوم بها الطلبة لفهم موضوع المثلثات وذلك باستخدام وسائل تكنولوجية.

هدف الدراسة

هدفت هذه الدراسة إلى التعرف على مستويات الفهم التي يمر بها طلاب الصف الثامن في موضوع المثلثات باستخدام الجيوجبرا، وما يميز كل مستوى عن غيره من مستويات الفهم، وذلك بالاعتماد على نظرية الفهم الرياضي لبيري وكيرين والنظرية المجذّرة والتي تفيد في معرفة مستوى فهم الطلاب في الرياضيات، وذلك بغية الارتقاء بمستوى فهم الطلاب للموضوعات الهندسية التي يدرسونها، وبالتالي زيادة مستوى تحصيلهم الرياضي وتعزيز حبهم لمادة الرياضيات.

أسئلة الدراسة

أجابت الدراسة عن الأسئلة التالية:

- ما مستويات فهم طلاب الصف الثامن لموضوع المثلثات في الهندسة بمساعدة جيوجبرا؟
- ماذا يميز كل مستوى من مستويات فهم الطلبة لموضوع المثلثات في الهندسة بمساعدة جيوجبرا؟
- ما الذي يؤثر على انتقال الطلبة من مستوى إلى مستوى من مستويات الفهم عندما يتعلمون موضوع المثلثات في الهندسة بمساعدة جيوجبرا؟

حدود الدراسة

ركزت هذه الدراسة على معرفة مستويات نمو الفهم الرياضي في موضوع المثلثات في وحدة الهندسة لدى طلاب الصف الثامن، وعليه فإن حدود الدراسة تتحدد فيما يلي:

الحد الموضوعي: اقتصرت الدراسة على موضوع المثلثات في وحدة الهندسة في كتاب الرياضيات للصف الثامن الأساسي.

الحد البشري: اقتصرت الدراسة على ثلاث مجموعات من طلاب الصف الثامن الأساسي في إحدى المدارس الخاصة المختلطة التابعة لمديرية التربية والتعليم في محافظة نابلس.

الحد الزمني: تمّ إجراء الدراسة في الفصل الدراسي الأول لعام 2013-2014.

محدد الأداة: استخدمت الباحثة برنامج جيوجبرا في تدريس موضوع المثلثات في وحدة الهندسة لطلاب الصف الثامن.

محدد منهجي: اقتصرت الدراسة على نظرية الفهم الرياضي لبيري وكيرين، وعلى النظرية المجذرة في التحليل.

مصطلحات الدراسة

ستعرض الباحثة فيما يلي بعض المصطلحات الهامة ذات الصلة بموضوع البحث وهي: الفهم الرياضي، مستوى الفهم الرياضي، عملية الطي العكسي، جيوجبرا، وحدة المثلثات.

الفهم الرياضي: بالنسبة لنا، الفهم الهندسي هو الفهم الذي يصفه بيري وكيرين بمراحله الثماني وهي: التعرف البدائي، تكوين الصورة، امتلاك الصورة، ملاحظة الصفات، التعميم، الملاحظة، وضع القواعد (الهيكلة)، والاستقصاء.

مستوى الفهم الرياضي: أحد مستويات الفهم التي يمر بها الطالب عند تعلمه موضوعا رياضيا معينا والذي لا يمكن له أن ينفصل عن مستويات الفهم الأخرى حسب نظرية الفهم الرياضي لبيري وكيرين (Pirie & Kieren,1994).

عملية الطي العكسي (Folding back): تعني الرجوع من مستوى فهم الى مستوى آخر سابق له. مثلاً عندما يواجه الطالب صعوبة في أي من مستويات الفهم اثناء حله مسألة رياضية فإنه بحاجة لأن يعيد البحث بالرجوع الى مستوى سابق من الفهم كي يوسع فهمه غير الكافي.

جيوجبرا (GeoGebra): البرنامج يحتوي على مجموعة من الأدوات التي تسهم في إكساب الطالب المهارات الرياضيّة، ويشمل كافة المعينات اللازمة لجعل عملية التعلّم سهلة وشيقة حيث يبني الطالب باستمرار على تعلمه السابق، وهذا يتوافق تماماً مع المنحى البنائي للتعلّم(Hohenwarter, 2012).

يمكن اعتبار برنامج جيوجبرا كذلك قاعدة بيانات رياضية ديناميكية، تهدف الى تعليم وتدريس الرياضيات من مستوى المتوسط الى مستوى الكليات، وهو يجمع بين الجبر والهندسة والتفاضل والتكامل. ويتكون من ثلاث نوافذ مختلفة وهي: النافذة الرسومية Graphic View، النافذة الجبرية Algebra View، نافذة ورقة البيانات Spread sheat View.

برنامج جيوجبرا يمكن من تمثيل العناصر الرياضية بطرق مختلفة بيانيا وجبريا او من خلال ورقة البيانات، وتكون هذه النوافذ مرتبطة مع بعضها البعض لنفس العنصر الرياضي بغض النظر عن النافذة التي تم انشاؤه فيها (Ghandoura, 2012).

وحدة المثلثات: أحد المواضيع التي تتناولها وحدة الهندسة في كتاب الرياضيات للصف الثامن الأساسي والذي يحتوي على ثلاثة موضوعات فرعية هي: المثلثات من حيث أنواعها وشروط تطابقها، المثلث متساوي الساقين، وبعض النظريات الخاصة به، والمثلث متساوي الأضلاع (الصف الثامن/ كتاب الرياضيات/ الجزء الأول (الطبعة الثانية 2005).

الفصل الثاني

الإطار النظري والدراسات السابقة

الفصل الثاني

الإطار النظري والدراسات السابقة

في هذا الفصل تناولت الباحثة الحديث عن جانبين: الأول يتضمن استعراضاً لآراء بعض التربويين حول عملية الفهم عامة والفهم الرياضي خاصةً، وبشكل أكثر تحديداً فقد عرضت نموذج بيري وكيرين للفهم الرياضي. أما الجانب الثاني فقد استعرضت فيه الباحثة دراسات سابقة ذات صلة بموضوع البحث.

الإطار النظري

مستويات نمو الفهم الرياضي

هناك نظريات حاولت أن تقدّم تفسيراً لعملية الفهم الرياضي لدى الأشخاص، ومن أشهرها نظرية بياجيه في التطور المعرفي، إذ توصل بياجيه إلى فرضية مفادها " أن التطور المعرفي يحدث في مراحل" وتتضمن هذه الفرضية القول بأن طبيعة التطور المعرفي تتغير بشكل كبير مع الزمن، وأن الفروق ليست في درجة التعلّم دائما وإنما في نوعية وطبيعة تطوّره. بياجيه كذلك لم يستخدم مفهوم التعلّم؛ لأن هذا المفهوم هو مفهوم سلوكي، إذ يقصد بالتعلّم الخبرة التي هي نتاج للتفاعل بين الفرد والموقف، يُطوّر بها أبنيته المعرفية ويدمج الخبرة الجديدة في بنائه، وبذلك تتطوّر الأبنية المعرفية ويتطور مخزونه. كما ويرى بياجيه أنه لفهم العقل بوصفه أداة للتفكير الذي يستخدمه الطفل وفهم ما يُسهّل تطوره، فإنه يجب معرفة مكونات ذلك الجهاز المعرفي، وذلك البناء المعرفي الذي يستخدمه الطفل ليحل مشكلة أو ليطوّر خبرة في فترة زمنية محددة، لذا كان بياجيه يولي الإجابات الخاطئة أهمية كبيرة في دراسة الأطفال، ويعتبرها مفتاحا لفهم التفكير لديهم.

وقد حاول بياجيه ان يوضح منهجه في دراسة الطفل وتطوّر تفكيره من خلال أنظمة أو مراحل تفكير تسير وفق أسس محددة وهي: المرحلة الحس حركية (0–2)، مرحلة ما قبل العمليات (2–7)، مرحلة العمليات المادية (7–11)، مرحلة العمليات الصّورة المجرّدة (11–15).

وحسب نموذج بياجيه فإن تدريس مراحل الطلبة المتقدّمة يتطلب تقديم براهين محسوسة وخبرات عملية للأفكار التي يراد نقلها، ويجب أن تتاح للطلبة فرص القيام بالتجارب باستخدام مواد حسية لتحقيق فهم جديد، ولاكتشاف معلومات عن طريق الخبرات التي يمارسونها بأنفسهم(Sprinthall et. al. 1981).

في هذا البحث اعتمدت الباحثة بالأساس على نظرية نمو الفهم الرياضي لبيري وكيرين (Kieren,1994) & Pirieإذ يتحدث بيري وكيرين أن هناك اهتماما عمليا بالفهم الرياضي، حيث يؤكد المصلحون في المناهج الدراسية في العديد من الدول بالحاجة لتدريس الرياضيات بطريقة الفهم. إن سجلات المؤتمرات والأدب التربوي في علم النفس والذكاء الإصطناعي جميعها تبدي اهتماما بالتعلّم والتعليم المبني على الفهم، لكن عملية تشخيص الفهم بطريقة تؤكد نموه وإيجاد قوانين تربوية ترعاه ما زالت تواجه العديد من المشكلات المتواصلة. وفي هذا المجال تتوافر العديد من المدخلات النظرية التي تحاول تشخيص جوهر ظاهرة الفهم الرياضي.

حاول الباحثون في تربية الرياضيات تقسيم الفهم إلى فئات متنوعة، ذاكرين منها العقلاني والاجرائي، الحسي والرمزي، الحدسي والرسمي (Herscovics & Skemp, 1976; Bergeron,1988; Schroder,1987). وقد تم طرح أفكار بديلة للفهم تتعلق بالمعوقات المعرفية (Serpinska,1990). وقد تساءلت بيري (Pirie, 1988) حول استخدام فئات في تشخيص مستويات النمو في الفهم الرياضي كما يمكن للملاحظ أن يراها، إذ لاحظت أن الفهم عملية ديناميكية كاملة وليس مسألة اكتساب وحيدة أو متعددة القيم، كما أنه ليس عملية جمع للمعلومات المعرفية الخطية.

اقترح بيري وكيرين نظرية تصف مراحل النمو للفهم الرياضي ككل بوصفها عملية ديناميكية متعددة المستويات و ليست عملية خطية (Pirie & Kieren, 1991). هذه النظرية تحاول أن توضح بشكل مفصل التعريف البنائي للفهم كعملية مستمرة في تنظيم البنية المعرفية للفرد (Glasersfeld, 1987).

نموذج النظرية

قام الكاتبان بيري وكيرين باختيار مسميات مستويات الفهم الرياضي بناء على محتوياتها الرئيسية والعلاقات بين المفاهيم في كل مستوى. مثلا مصطلح مثل الصورة صُنِّفَ في مرحلتين أو مستويين، وذلك بناء على ظهوره في مجريات الفهم الرياضي للمتعلم حسب مشاهدات الباحثين(Pirie & Kieren, 1991).

تحدث الباحثان عن ثمانية مستويات غير قابلة للتجزئة لعملية الفهم وهي:

1- التّعرُّف البدائي (Primitive Knowing): لا نقصد بها مستوى متدنيا من الفهم الرياضي، ولكن نعني به البدء في عملية الفهم والنمو في الرياضيات فيكون لدى الطالب خلفية بسيطة عن الموضوع. هذه المعرفة الأولية والتي يستخدمها الطالب في سياق التعلم الجديد تدعى التعرف البدائي. وهي ما يفترض المعلم أنه موجود لدى الطالب بالنسبة لموضوع معين عندما يريد تعليمه. فمثلا عند تعلُّم الطالب لموضوع جديد خاص بالكسور، فمعرفته البدائية هنا قد تتمثل في امتلاك بعض المصطلحات الكسرية مثل بسط، مقام.
2- تكوين الصورة (Image Making): في هذا المستوى يقوم المتعلم بصنع تمييزات بالنسبة لمعرفته البدائية، مثلا إن كان يعرف سابقا الشكل الرباعي، ودرس المستطيل فإنه في هذا المستوى يقوم بصنع تمييزات بين كلا الشكلين، وباستخدام المعرفة البدائية بأساليب وطرق جديدة.
3- امتلاك الصورة (Image Having): في هذا المستوى يمكن للطالب أن يستعمل التراكيب الذهنية حول موضوع معين ويقوم بنشاطات خاصة تدور حول الموضوع دون أن يكون هناك وسائل محسوسة تساعده على ذلك. مثلا إن كان الطالب في مستوى تكوين الصورة يستخدم قطاعات الدائرة لجمع الكسور، فإنه في هذا المستوى يقوم بذلك دون حاجة إلى القطاعات.
4- ملاحظة الصفات (Property Noticing): يحدث عندما يكون باستطاعة الطالب أن يجمع جوانب من الصور الذاتية لبناء صفات رياضية مرتبطة بالسياق. هنا ملاحظة الصفات

تمكن المتعلم من القيام بأفعال رياضية ملائمة للموضوع الذي يتعلمه. فمثلا يمكن للطالب أن يستخدم استراتيجية تحويل مجموع كسرين أو أكثر إلى كسر معلوم وذلك لكي يقوم بعملية جمع الكسور بصورة بسيطة. هذه الملاحظة ذاتية خاصة بكل طالب. أي أن الاستراتيجية المذكورة قد لا يستخدمها كل الطلاب بل بعضهم والذين تمكنوا من ملاحظة هذه الصفة (إن جمع الكسور يصبح أسهل عندما نحول مجموع البعض منها إلى كسر معلوم).

5- التعميم (Formalising): في هذا المستوى يعمم الطالب خاصية معينة من صورة سابقة بالاعتماد على ما لاحظه من صفات. أي أنه في هذا المستوى يستطيع الطالب استخلاص الخاصية المشتركة وتعميمها على مواقف جديدة مشابهة أو فهم أساليب رياضية معينة من خلال أفكار رياضية سابقة. مثلا يمكن للطالب أن يستنتج أن الجمع يمكن إجراؤه باستخدام مفاهيم عددية ورموز ترتبط بالكسور، وهو شيء عرّفه سابقا.

6- الملاحظة (Observing): الشخص الذي يقوم بعملية التعميم هو في موقف يمكنه من خلاله أن يفكر بالموقف بشكل انعكاسي وينظمه، ويعبر عن التفكير والتنظيم للمعرفة الجديدة على شكل نظريات تتعلق بالموقف. هذا التعبير ندعوه بالملاحظة. مثال على مستوى الملاحظة هو البحث عن أنماط في تكافؤ الكسور يمكن أن تساعد في جمع الكسور.

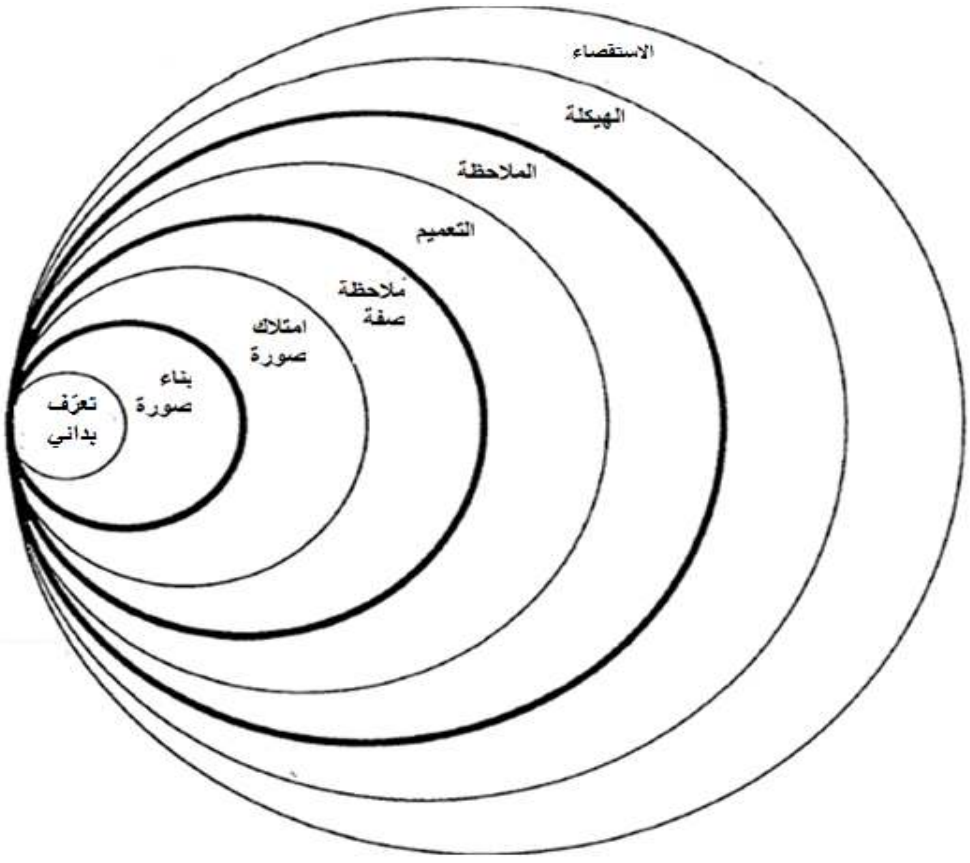
7- وضع القواعد (الهيكلة) (Structuring): يحدث عندما يبدأ الطلاب بالتفكير في ملاحظاتهم الرسمية كنظرية. هذا يعني أن الشخص واع لكيفية ارتباط مجموعة النظريات ببعضها، وهذا يستدعي تعليل الارتباطات من خلال حوار منطقي أو رياضي. لو أن الطلاب تحدثوا عن التقسيم بذكر أدوات محسوسة لكان ذلك امتلاك صورة أو ملاحظة صفات، ولو أنهم تحدثوا عن التقسيم بواسطة الأشكال لكان ذلك تعميما. أما في الهيكلة الحديث عن التقسيم هو حديث عن بنية رياضية لا تعتمد على الأدوات المحسوسة ولا على الأفعال الخوارزمية.

8- الاستقصاء (Inventising): في هذا المستوى يمتلك الطالب معرفة هيكلية كبيرة وبالتالي يستطيع التخلص من أخطاء مفاهيمية سابقة، فبعد اكتساب الطالب الفهم الكامل لمفهوم ما،

تتشكل لديه أسئلة قد تؤدي إلى مفاهيم جديدة. مثلا في مستوى الهيكلة يستطيع الطالب أن يرى الأعداد النسبية بصورة جديدة وهي كون كل عدد نسبي على شكل زوج مرتب من الصورة (أ،ب). يستطيع الطالب الآن أن يخترع أشياء جديدة عن طريق السؤال: أية أعداد يمكن أن تنتج من أربعة أعداد مرتبة من الصورة أ/ب/ج/د؟

هناك، كما رأينا أعلاه، ثمانية مستويات ممكنة أو أنماط مختلفة ضمن عملية نمو الفهم لفرد معين، وحيدا كان أو ضمن مجموعة، وسوف نستخدم هذه المستويات لتحليل عملية فهم الطلاب أو في مجموعات في موضوع المثلثات بالهندسة المستوية؛ وذلك لما تذكره الأبحاث الحديثة من أهمية المجموعة في تكوين المعرفة الرياضية.

الشكل (1) يصف البناء الداخلي ومركبات نظرية الفهم الرياضي حسب بيري وكيرين



شكل (1): البناء الداخلي ومركبات نظرية الفهم الرياضي حسب بيري وكيرين

في محاولة لتوضيح فكرة الفهم الرياضي بصورة مرسومة، قام الكاتبان بيري وكيـــرين (1991) بإعداد النموذج كعملية بناء العش على شكل دائرة مرتبطة مع بعضها البعض وعلـــى شكل طبقات، وبالتالي كل طبقة تحتوي على الطبقات السابقة جميعها وتندمج مع الطبقات التالية. هكذا يرى النمو كعملية ذات حركة أمامية وخلفية بين المستويات وبالتالي يمكن تشخيص عملية الفهم كعملية ديناميكية ومنظمة. هنا لغة النموذج هي لغة المستويات والطبقات وهناك هرمية في هذا النموذج، أيضا لا يوجد توجه لربط المستويات العليا لفهم الرياضيات بمســتويات النمــوذج العليا. كما أن عملية النمو في الفهم ليست عملية ذات اتجاه واحد، فمــثلاً إذا أراد الطالــب أن يجمع الكسرين $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ فإنه لن يستطيع القيام بذلك بناء على استراتيجية مضاعفة الكسور، لــذلك عليه أن يرجع الى مستوى سابق مثل مستوى فهم معنى الكسور المتكافئة.

خصائص النظرية

هناك طرق عديدة ومتنوعة لدراسة وتفسير الفهم الرياضي لدى الطلاب، بعضها يتمثل في الإشارة إلى الخصائص الرئيسية للنظرية وهي: لا حاجة إلى حدود بين الحلقــات المكونــة للنظرية، عملية الطي العكسي، الممارسات التعلّمية التي يقوم بها الطلاب أثناء تعلمهم لموضوع رياضي معين. وهذا ما ستعرضه الباحثة بالتفصيل فيما يلي:

لا حاجة إلى حدود بين الحلقات المكونة للنظرية

إن إحدى نقاط القوة في الرياضيات هي القدرة على العمل مع المستوى الرمــزي دون الرجوع إلى المفاهيم الأساسية، وهذا نراه في العناصر الأساسية للنظرية ويمكن ملاحظته فــي النموذج موضحا عبر الحلقات الواسعة، ومن خلال هذه الحدود فان المتعلم يتمكن مــن العمــل بالأفكار التي لم تعد مربوطة بشكل واضح بأشكال سابقة من الفهم، لكن هذه الأشــكال الســابقة مدموجة في المستوى الجديد من الفهم ويمكن الوصول إليها إذا تم توضيحها.

ونطلق على مثل هذه الحلقات "لا حاجة للحدود" من أجل التعبير عن فكرة حيــث وراء حدود الحلقات لا حاجة للمرء للتعرف على مفاهيم داخلية من اجل عمل مفاهيم خارجية. ويمكن

العمل مع مستوى أو استنتاج معين من غير الحاجة للرجوع بشكل ذهني إلى صورة معينة ومادية. هذا لا يعني الحاجة للرجوع لخلفية الفهم المحددة الخاصة بالمعرفة، كما انه لا حاجة للفرد بان يكون لديه إدراك ثابت بالمستويات الداخلية للفهم. مثلا قد ينتقل الطالب عند تعلمه لموضوع معين من مستوى فهم إلى مستوى لا يليه مباشرة، إذ لا يتطلب ذلك منه المرور في ذلك المستوى الذي تعدّاه.

إن أول الحدود التي قد لا يكون حاجة لها تحدث بين مستويات "تكوين الصورة" و"امتلاك الصورة"، فعندما يزود الإنسان بصورة لفكرة رياضية لا يحتاج إلى نشاطات أو عمليات صنع للصورة من جديد، فمثلا عندما يكون لدى الطالب صورة ذهنية، مثل فكرة جمع الكسور، سوف يتوقف عن استخدام مواد وأدوات بشكل ملموس.

الحد الثاني الذي قد لا يكون حاجة له يوجد بين "ملاحظة الخاصية" و"التعميم"، إذ أن الشخص الذي لديه فكرة رياضية (تعميم) لا يحتاج إلى صورة ذهنية ناتجة عن ملاحظة الخاصية. مثلا الطالب قادر على التفكير في جمع الكسور دون العودة إلى عملية التقسيم الفعلي وملاحظة خاصية الجمع.

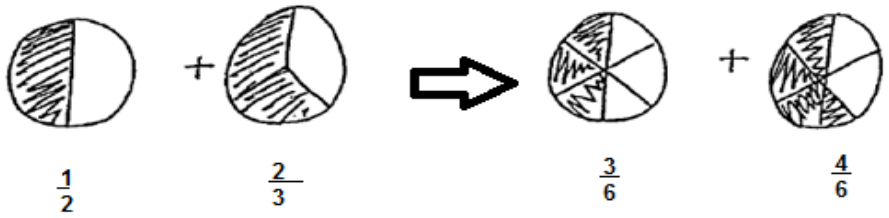
الحد الثالث الذي قد لا يكون حاجة له يوجد بين عملية "الملاحظة" و"الهيكلة"، إذ أن الشخص الذي لديه تراكيب رياضية ناتجة عن الهيكلة لا يحتاج إلى المعنى الموجود لهذا الحد في أي مستوى داخلي، فمثلا الطالب القادر على برهنة النظريات المتعلقة بعملية الجمع والقسمة وغيرها لا يحتاج للرجوع إلى ما يمثله الكسر في الحقيقة.

عملية الطي العكسي: الرجوع إلى حلقة سابقة

الطي العكسي يعدّ ضروريا من اجل عملية نمو الفهم وهو يعكس الطبيعة غير أحادية الاتجاه لعملية فهم الرياضيات. فعندما يواجه الفرد مشكلة أو سؤالا صعبا في أي مستوى فهو يحتاج لأن يعيد البحث في داخل المستوى لكي يوسع فهمه غير الكافي في هذه اللحظة. مع ذلك هذه الإعادة ليست شبيهة تماما بالعمل في المستوى الداخلي الحقيقي للفهم، والذي سبق تكوينه في مستوى سابق.

وبتنفيذ عملية الطي يصبح لدى الفرد فهم أفضل وأقوى في حالة العودة إلى المستوى الداخلي. عمل هذا المستوى الداخلي هو جزء من إعادة البناء المكرّر للمعرفة والضروري لبناء أوسع للمستوى الخارجي المتقدم. الطلاب سوف يتحركون في طرق مختلفة وسرعات مختلفة عبر المستويات، وباستخدام عملية الطي العكسي مرارا وتكرارا يتمكن الطلاب من بناء فهم أوسع وأعمق وأكثر تعقيدا للمشكلات الرياضية.

لنأخذ مثالا: لنفرض أن طالبا يريد أن يجمع الكسرين $\frac{1}{2}$ و $\frac{2}{3}$. لن يستطيع الطالب القيام بذلك بناء على الإستراتيجية التي توصل إليها وهي مضاعفة الكسور ولذلك عليه أن يرجع إلى مستوى سابق مر به مثلا مستوى فهم معنى الكسور المتكافئة، وهذا يؤدي به إلى أن يعبر عن كل من النصف والثلث كأسداس كما في الشكل (2)



شكل(2): الرجوع لمستوى سابق لتطوير الفهم الرياضي

كما ذكر أعلاه، إن الإستراتيجية الخاصة بعملية المضاعفة لا تحقق أي تكافؤ مفيد يدعم عملية جمع الكسور في مثل هذا الموقف. وإحدى الطرق الممكنة سوف تكون عن طريق المعلم والذي سيُقدم هذه القاعدة "أوجد القاسم المشترك ثم اضربه لتوجد المقام ثم اجمع البسط مع البسط " وهذا بدوره سوف يعطي الطالب آلية للقيام بالنشاط الذي سوف يؤديه ولكنه لن يزوده بالفهم المطلوب كما يحدث في عملية الطي العكسي. من خلال مستوى التعميم، يمكن للطالب الذي يريد أن يعمم كيفية جمع الكسور غير المتكافئة أن يتبع طريقة الطي العكسي، عائدا لمستوى امتلاك الصورة حتى يدرك بعض المعاني للعملية المطلوبة في مستوى التعميم، حيث تستخدم ملاحظة الخاصية من اجل خلق معنى لعملية جمع الكسور. إن عملية الطي تسمح بإعادة التركيب من اجل تكوين طرق جديدة لرؤية الأشياء والحصول على مستوى جديد من الفهم.

ممارسات الطلاب التعلُّمية خلال كل مستوى من مستويات بناء المعرفة

بالإضافة إلى مستويات بناء المعرفة التي وصفناها أعلاه، نريد أن نحلل ممارسات الطلاب التعلُّمية خلال كل مستوى من مستويات بناء المعرفة. سوف نعتمد في ذلك على وولتر وجيبونز (Walter & Gibbons, 2010)، واللذين وصفا الممارسات الممكنة التالية:

* بناء الأفكار (Building Ideas)

* شرح الأفكار (Explaining Ideas)

* تقديم الأفكار (Offering Ideas)

* الاستفسار عن الأفكار (Questioning Ideas)

* التحقق من صحة الأفكار (Validating Ideas)

* إعادة تنظيم الأفكار (Reorganizing Ideas)

* بناء تمثيلات متعددة (Building Multiple Representations)

* بناء مفاهيم جديدة (Building New Concepts)

الدراسات السابقة

من خلال اطلاع الباحثة على العديد من الدراسات والأبحاث ذات الصلة بموضوع البحث، فإنها لم تجد دراسات وأبحاث عربية تناولت دراسة عمليات فهم الطلاب لمواضيع هندسية مختلفة بشكل خاص ورياضية بشكل عام، لذا سوف تقوم الباحثة بتقسيم هذه الدراسات إلى ثلاثة محاور رئيسية: (1) دراسات حول نموذج نظرية الفهم الهندسي، (2) دراسات حول استخدام الحاسوب في تدريس الهندسة، (3) دراسات حول استخدام جيوجبرا في تدريس الرياضيات، وفيما يلي عرض توضيحي لكل محور منها.

أولا: دراسات حول نموذج نظرية الفهم الهندسي

قام كل من استدوديللو وبيريز وفالكارس ومارتن (Astudillo, Martín, Pérez & Valcarce, 2012) بدراسة تضمنت نشاطا يتعلق بالتسلسل العددي والمجموعات العددية والتي تم عرضها على ثلاثة طلاب يعملون في بيئة تعاونية. وتشكلت هذه المجموعة من طلبة سنة أولى في هندسة النظم، والذين كانوا يتعلمون مساق "رياضيات أساسية". المهمة كانت تتطلب بناء برج مصنوع من أسطوانات ارتفاعها مساو لنصف قطر القاعدة. خلال القيام بهذا النشاط العلمي اظهر الطلبة تحركا بين مستويات الفهم المختلفة (تكوين الصورة، امتلاك الصورة، ملاحظة الصفات)، وللتعبير عن القيمة الرمزية للمجموعات غالبا ما كانوا يقومون بشكل متكرر بِطَيّ عكسي لمستوى داخلي. ولكن لم يكن من الضروري الرجوع لأكثر المستويات عمقا (التعرّف البدائي)، ولكنهم أوجدوا حدودا غير ضرورية، لذلك فقد احتاجوا أن يتذكروا معرفتهم السابقة بخصوص هذه الإجراءات.

وولتر وجيبونس (Walter & Gibbons,2010) وصفا دور حل المشكلات في المساهمة في نمو الفهم الرياضي الخاص بمتسلسلة تايلور (Tylor series) لأحد طلاب الجامعة، حيث تم جمع البيانات أثناء تدريس التفاضل والتكامل في إحدى الجامعات الخاصة من خلال عينة مكوّنة من (25) طالباً، تم تقسيمهم في مجموعات صغيرة حيث أعطوا مهام رياضية مفتوحة. وتم تصويرهم أثناء قيامهم بهذه المهام. إحدى هذه المهام دعت الطلاب لإيجاد تقريب لكثير الحدود. وقد أظهرت النتائج أن سلوكيات حل المشكلات الخاصة بالطالب الذي ركزت عليه الدراسة هي عوامل مهمة لنمو الفهم الرياضي لديه، كما دلت على تقدمه في مستويات نموذج بيري- كيرين وتطور فهمه الخاص بمتسلسلة تايلور.

وفي دراسة أخرى قام بها سلاتين (Slaten, 2010) هدفت إلى اختبار نمو فهم الطلبة لدى قيامهم بأبحاث متعلقة بمفاهيم رياضية من خلال تطورها التاريخي. وجد ان البحث والكتابة الوصفية حول مفاهيم معينة أعطى الطلاب الفرصة لإعادة اختبار وتعميق مستويات فهمهم لمفاهيم رياضية، إذ أنّ تعليقاتهم المكتوبة تضمنت فهما عميقا لدرايتهم الشخصية لما تعلموه من أبحاثهم ومن محاولاتهم الكتابة وفيما إذا أدت هذه المحاولات لنمو فهمهم في الرياضيات.

ولسون وستين (Wilson & Stein, 2007) قاما بدراسة هدفت إلى معرفة العلاقة بين التمثيلات الخارجية للمفهوم الرياضي والنمو في الفهم، وقد تم التحقق من مستويات المشاركين في الفهم باستخدام نموذج بيري- كيرين وكذلك نوع التمثيل المستخدم في كل مستوى من مستويات هذا النموذج. تطوع (10) طلاب للمشاركة في هذه الدراسة بما في ذلك (8) طلاب كانوا قد سجلوا بمادة مقدمة في علم النفس، وطالبتا دراسات عليا تخصص تعلم رياضيات. وكجزء من متطلبات درجة الدكتوراة، فقد شارك سبعة طلاب بما فيهم الكاتبان لهذه الورقة البحثية، وقاموا بإجراء مقابلات ترتكز على مهام محددة مع المشاركين. أفادت النتائج بأنّ هناك علاقة بين مستويات الفهم عند المشاركين وأنواع التمثيلات المستخدمة، كما أنّ المعلمين استطاعوا تقييم فهم الطلاب لمفهوم رياضي معين من خلال أسئلة أو مهام تظهر تمثيل هذا المفهوم بأشكال أخرى.

ثانياً: دراسات حول استخدام الحاسوب في تدريس الهندسة

أجرت الشريف (2002) دراسة هدفت إلى تقصي أثر استخدام الحاسوب في تدريس الهندسة على تحصيل طالبات الصف الثامن الأساسي، وقد أظهرت التحليلات الإحصائية لنتائج الاختبار الآني وجود فرق ذي دلالة إحصائية يعزى إلى طريقة التدريس لصالح الحاسوب التعليمي؛ مما يدل على فاعلية الحاسوب التعليمي كطريقة تدريس. أما الاختبار المؤجل فقد أظهرت نتائجه وجود فرق ذي دلالة إحصائية يعزى إلى طريقة التدريس لصالح الحاسوب التعليمي؛ مما يدل على أن الطالبات اللاتي درسن باستخدام الحاسوب احتفظن بالمفاهيم الرياضية لمدة أطول من الطالبات اللاتي درسن دون استخدام حاسوب تعليمي. كذلك أظهرت النتائج وجود فرق دال إحصائيا بين المجموعتين على مقياس الاتجاهات لصالح المجوعة التجريبية.

وفي نفس الإطار أجرى ماواتا (Mawata, 2000) دراسة هدفت لمعرفة اثر استخدام الحاسوب على تحصيل طلبة المرحلة الثانوية واتجاهاتهم نحو الرياضيات، ولهذا الغرض قام الباحث بالإشراف على إعداد سلسلة من الدروس في هندسة التحويلات، وقام كذلك بتدريب

المعلمين على تطوير برمجيات الجافا أبلت في صفحات الوب، وتكونت عينة الدراسة من طلاب ثلاث مدارس ثانوية بولاية بلتيمور الأمريكية وأشارت نتائج الدراسة أن تحصيل الطلاب كان عاليا طبقا للاختبار التحصيلي المعد، وأشارت كذلك إلى وجود نمو موجب في الاتجاهات نحو الرياضيات لدى أفراد العينة.

وفي دراسة مشابهة لدراسة ماواتا قام جبر (2006) باستقصاء فاعلية طريقة تدريس قائمة على استراتيجيات التعلم الذاتي الموجه لتدريس الهندسة في التحصيل وحل المسائل الهندسية واتجاهات الطلبة نحوها، طبقت هذه الدراسة على عينة من طلاب الصف التاسع الأساسي، وقد كشفت عن وجود فروق جوهرية بين الوسطين الحسابيين لعلامات طلبة المجموعتين التجريبية والضابطة على اختبار التحصيل في الهندسة ولصالح المجموعة التجريبية، كما أظهرت الدراسة وجود فروق دالة إحصائيا لعلامات طلبة المجموعتين على اختبار التحصيل في حل المسائل الهندسية ولصالح المجموعة التجريبية أيضا.

وهناك بعض الدراسات التي تناولت اثر استخدام الحاسوب في موضوع الهندسة الفضائية ومن هذه الدراسات دراسة العبوشي (2002) التي سعت إلى معرفة اثر استخدام الحاسوب التعليمي على تحصيل طلبة الصف العاشر الأساسي في موضوع الهندسة الفضائية واتجاهاتهم نحوه، وعند تحليل النتائج وجدت فروق دالة إحصائيا في التحصيل بين المجموعات لصالح المجموعة التجريبية (التي درست باستخدام الحاسوب)، كما وجدت فروق دالة إحصائيا في تحصيل الطلبة تعزى للجنس ولصالح الإناث ولكن لم يتبين وجود فروق دالة إحصائيا في التحصيل تعزى للتفاعل بين طريقة التدريس والجنس.

في حين هدفت دراسة العبادلة (2006) لمعرفة فاعلية استخدام الحاسوب في تدريس الهندسة الفراغية على التحصيل والتفكير الهندسي والتصور المكاني للصف الثاني ثانوي العلمي في الإمارات العربية، حيث دلت النتائج على وجود فروق دالة إحصائيا بين متوسط درجات المجموعة الضابطة التي استخدمت الطريقة التقليدية ودرجات المجموعة التجريبية التي تعلمت الهندسة الفراغية باستخدام الحاسوب في التطبيق البعدي للاختبار التحصيلي ولصالح المجموعة التجريبية.

ومن الدراسات الأجنبية دراسة كلارك (Clark, 2005) التي هدفت للتعرف على اثر استخدام الحاسوب في تدريس الهندسة للطلبة المتفوقين تحصيليا في المرحلة الأساسية العليا (التاسع والعاشر الأساسيين)، وبعد جمع البيانات وتحليلها أظهرت النتائج وجود فروق دالة إحصائيا في متوسطات تحصيل الطلبة في المجموعتين التجريبية والضابطة لصالح المجموعة التجريبية.

كما أن هناك العديد من الدراسات التي هدفت لمعرفة اثر استخدام بعض الأدوات التكنولوجية (مثل كابري، جيوكال، سكتش باد جيومتر) في تدريس الطلاب لمادة الرياضيات ونذكر من هذه الدراسات:

دراسة بابادبولوس وداقدليكس (Papadopoulos & Dagdilekis, 2008) والتي فحصت اثر استخدام الطلبة لأدوات تكنولوجية لتفسير المسألة الهندسية، ولتحقيق هدف الدراسة قام الباحثان باستخدام ثلاثة برامج حاسوبية هي الرسام والحاسب الهندسي وكابري في تعليم طلاب الصفين الخامس والسادس في اليونان، وبعد إجراء الإحصاءات المناسبة أظهرت النتائج زيادة قدرة الطلبة على تفسير المسألة الهندسية من حيث تقديم رسم المسألة ومعطياتها وتمثيلها من خلال جداول أو مخططات ونمذجتها من خلال المجسمات.

ودراسة تشينج وسانج ولين (Cheng, Sung & Lin,2007) التي هدفت لتحسين التفكير الهندسي من خلال برمجية وسائط متعددة، ولتحقيق هدف الدراسة استخدم الباحثون برمجية جيوكال والتي تعتمد في بنائها على مستويات فان هيل في التفكير الهندسي، وكان أفراد العينة طلبة الصف الثاني الأساسي، وقد أشارت النتائج إلى تحسن مستويات التفكير الهندسي لدى طلبة المجموعة التجريبية مقارنة بالمجموعة الضابطة ما عدا مستوى الإدراك.

ودراسة إدريس (2009) التي فحصت اثر البرمجية الهندسية سكتش باد جيومتر على التحصيل في الهندسة والتفكير الهندسي وفق مستويات فان هيل، واستخدم الباحث تصميما شبه تجريبي طبقه على طلاب مدرستين في ماليزيا، وتوصلت النتائج الى اثر البرمجية الهندسية في التحصيل الهندسي وفي تنمية التفكير الهندسي.

ثالثا: دراسات استخدمت جيوجبرا في تدريس الرياضيات

برنامج جيوجبرا هو برنامج حاسوبي حديث نسبيا لتعلم وتعليم الرياضيات، وقد اخذ استعماله في صف الرياضيات ينتشر بشكل كبير وذلك لسهولة الوصول إليه، هذا الانتشار يعود أيضا إلى كون البرنامج أداة مساعدة للطلاب ليستكشفوا العلاقات الرياضية.

يهدف جيوجبرا إلى مساعدة الطلاب ومعلميهم في صف الرياضيات من خلال تقديم إمكانيات جبرية، سهولة الربط بين الهندسة والجبر من خلال جيوجبرا يجعل منه منصة ملائمة للربط بين هذين الموضوعين الرياضيين المهمين.

من الدراسات العربية في هذا المجال دراسة عنبوسي، ضاهر وبياعة (2012) حيث عرضوا إمكانيات استخدام برنامج جيوجبرا في صف الرياضيات، وبشكل محدد قاموا بعرض خلفية نظرية عن برنامج جيوجبرا كأداة تربوية في صف الرياضيات، عارضين إمكانيات البرنامج، مبناه، المصادر التكنولوجية التي يعتمد عليها، بدايات هذا البرنامج وتاريخه، فوائده، وأخيراً وصفوا فعاليات رياضية لمراحل مدرسية مختلفة يمكن للطالب من خلالها أن يستكشف علاقات رياضية مهمة وذلك عن طريق استخدام برنامج جيوجبرا.

اهتم الباحثون اهتماما خاصا بإسهام جيوجبرا في فهم الطلاب الرياضي وتعميق هذا الفهم. آدمز وميلينبورغ (Adams & Muilenburg ،2012) يصفان التكنولوجيا بأنها تدعم تعلم الطلاب بسبب إمكانياتها البصرية وأدواتها التي تساعد الطلاب على اكتشاف العلاقات الرياضية. ويضيف الكاتبان أن برنامج جيوجبرا يمكن أن يكون أداة في صفوف الرياضيات الثانوية كوسيلة لدعم تعلم الطلاب وتحسين تعلمهم.

بشكل محدد أكثر، بايازيت واكسوي (Bayazit & Aksoy ،2010) يقولان إن استخدام برنامج جيوجبرا يدعم المفاهيم البنيوية والإجرائية للاقترانات، وبهذا فهو يساعد على توضيح المعرفة الفعلية التي لها علاقة بأنظمة المعادلات، وكذلك يساعد على بناء نماذج بيانية لحل مشاكل جبرية.

جونكاجا وماجهيروفا (Guncaga & Majherova ،2012) يجادلان أن الطلاب يطورون خيالهم الهندسي من خلال العمل مع جيوجبرا، مما يساعدهم على تطوير قدراتهم لاستكشاف الأشكال الهندسية وصفاتها، وكذلك لاستكشاف الصفات الهندسية المجردة من العناصر الخاصة، وكذلك تساعد جيوجبرا الطلاب على تعميق إدراكهم للأشكال الهندسية والعلاقات بينها (ص. 46).

تعقيب على الدراسات السابقة

بالنسبة للدراسات التي تناولت نموذج الفهم الهندسي، وهي دراسات استوديللو وبيريز وفالكارس ومارتن (2012)، وولتر وجيبونز (2010)، سلاتين (2010)، ولسون وستين (2007)، اختلفت هذه الدراسات عن الدراسة الحالية في أنها ركّزت على طلبة الجامعة والدراسات العليا، في حين لم تركّز على المرحلة الأساسية كما هو الحال في الدراسة الحالية. لكنها اتّفقت مع الدراسة الحالية في استخدام نموذج بيري وكيرين للفهم الرياضي في دراسة تطور فهم الطلبة لموضوعات رياضية، ما عدا دراسة سلاتين. اتّفقت بعض هذه الدراسات كذلك في استخدام تصوير الطلبة أثناء عملهم في مجموعات تعاونية كأداة لتحليل تفاعلهم فيما بعد.

بالنسبة للدراسات التي استخدمت الحاسوب في تدريس الهندسة، وهي دراسات الشريف (2002)، جبر (2006)، العبوشي (2002)، العبادلة (2006)، كلارك (2005)، بابادبولوس وداقدليكس (2008)، تشينج وسانج ولين (2007)، إدريس (2009)، ركّزت هذه الدراسات جميعها على طلبة المرحلة الأساسية الدنيا والعليا، والمرحلة الثانوية، إذ اتّفقت الدراسة الحالية مع الدراسات التي تناولت المرحلة الأساسية خاصة دراسة الشريف التي تناولت الصف الثامن الأساسي، كما اتّفقت الدراسة الحالية مع الدراسات في تناول موضوع الهندسة، لكنها اختلفت مع هذه الدراسات في أنها استخدمت نظرية جديدة في الفهم وهي نظرية بيري وكيرين.

بالنسبة للدراسات التي استخدمت جيوجبرا في تدريس الرياضيات، وهي دراسات عنبوسي، ضاهر وبياعة (2012)، آدمز وميلينبورغ (2012)، بايازيت واكسوي (2010)، (2012)، ركّزت هذه الدراسات على استخدام برنامج جيوجبرا في تدريس موضوعات رياضية

مختلفة، وهي بذلك تتفق مع الدراسة الحالية، كما اتّفقت الدراسة الحالية مع دراسة جونكاجا وماجهيروفا في استخدام جيوجبرا في تدريس وحدة الهندسة، لكنها تختلف عنها في الفئة المستهدفة إذ ركّزت هذه الدراسات على طلبة المرحلة الثانوية، عدا دراسة عنبوسي، ضاهر وبياعة التي طبقت دراستها على فئات طلابية مختلفة بما فيها المرحلة الأساسية.

موقع الدراسة الحالية من مجمل الدراسات السابقة

- تميّزت هذه الدراسة باستخدامها نموذج بيري وكيرين للفهم الرياضي لتحليل أحداث تعلّم الطلاب لموضوع المثلثات في وحدة الهندسة.

- تميّزت هذه الدراسة بتناولها موضوع استخدام برنامج جيوجبرا في تدريس وحدة الهندسة بما يتلاءم مع المحتوى الرياضي المستخدم وهو موضوع المثلثات في وحدة الهندسة.

- تميّزت هذه الدراسة بموضوعها من خلال تناولها لموضوع المثلثات في وحدة الهنسة للصف الثامن الأساسي في المنهاج الفلسطيني، من خلال المادة التدريبية التي أعدّتها الباحثة.

الفصل الثالث

منهجية الدراسة

الفصل الثالث

منهجية الدراسة

هدفت هذه الدراسة إلى تسليط الضوء على مستويات الفهم الهندسي التي يمر بها طلاب الصف الثامن عند دراستهم لموضوع المثلثات، ويوضح هذا الفصل بعض الجوانب الهامة وهي: إطار البحث والمشتركون فيه والطريقة التي تم اختيارهم بها وكيفية تقسيمهم ضمن مجموعات تعاونية، كما يوضح هذا الفصل اجراءات البحث والطريقة التي تمّ بها جمع المعطيات والية تحليل هذه المعطيات.

إطار الدراسة

جرى هذا البحث في صف ثامن في مدرسة من المدارس الخاصة المختلطة التابعة لمديرية التربية والتعليم في محافظة نابلس، وذلك في الفصل الدراسي الأول 2013-2014.

المشتركون في الدراسة

اختارت الباحثة مجموعات الطلبة المشتركين في الدراسة والتي تكونت من ثلاث مجموعات تعاونية بحيث كان عدد الطلبة في كل مجموعة 2-3 طلاب من ذوي التحصيل الأعلى من (80) من طلاب الصف الثامن الأساسي.

إجراءات الدراسة

قامت الباحثة باختيار ثمانية طلاب من طلاب الصف الثامن: خمسة طلاب وثلاث طالبات، حيث قسمتهم الى ثلاث مجموعات تعاونية، الأولى مجموعة كريم وتكونت من ثلاثة طلاب، والثانية مجموعة خالد وتكونت من طالبين، أما المجموعة الثالثة فهي مجموعة نادين وتكونت من ثلاث طالبات. الجدول التالي يبين توزيع الطلاب في المجموعات الثلاث:

جدول (1): توزيع الطلاب في المجموعات الثلاث

اسم المجموعة	جنس المجموعة	عدد الطلاب واسماؤهم
مجموعة كريم	ذكور	3 طلاب (كريم، يوسف، عمر)
مجموعة خالد	ذكور	طالبين (خالد ، سمير)
مجموعة نادين	اناث	3 طالبات (نادين، نورا، هيا)

وصف المادة التدريبية (ملحق1):

في المادة التدريبية قامت الباحثة بوصف آلية استخدام جيوجبرا من قبل المعلمة في شرح وحدة الهندسة للصف الثامن في كتاب الرياضيات الجزء الأول، وذلك من خلال وصف التمارين والأنشطة التي ستقدمها للطلاب والتي هدفت لتحقيق الأهداف الخاصة بمواضيع الوحدة (المثلث، المثلث متساوي الساقين، المثلث متساوي الأضلاع)، وذلك وفق عدة خطوات: مخطط لوحدة الهندسة، عدد الحصص المقترحة والبالغ عددها 15 حصة، وآلية استخدام برنامج جيوجبرا أثناء الحصص الصفية، ووصف مرحلة التفاعل مع البرنامج.

ثم قامت الباحثة بتوزيع المادة التدريبية على مجموعة من المحكمين (ملحق4)، إذ قاموا بتحكيم المادة التدريبية وإضافة بعض التعديلات كلٌّ حسب وجهة نظره، وبناء عليه قامت الباحثة بالتعديل على المادة التدريبية. ولكي تقوم الباحثة بتطبيق دراستها، قامت بالحصول على كتاب تسهيل مهمة من مديرية التربية والتعليم في محافظة نابلس، إذ اختارت إحدى المدارس الخاصة المختلطة والتابعة لمديرية التربية في محافظة نابلس، وبالإتفاق مع مديرة المدرسة قامت الباحثة باختيار مجموعات الطلاب الثلاث التي سبق ذكرها من طلاب الصف الثامن، ثم بدأت بالتنفيذ إذ قامت الباحثة باستخدام الفيديو لتصوير الطلاب أثناء عملهم في مجموعات خلال تعلمهم لموضوع المثلثات باستخدام الجيوجبرا، كما قامت بإجراء مقابلات معهم للاستفسار عن بعض القضايا الخاصة بتعلمهم، أثناء ذلك راقبت الباحثة أقوالهم وأفعالهم من أجل متابعة عمليات فهمهم الخاصة بموضوع المثلثات.

طريقة جمع المعطيات

قامت الباحثة بجمع المعطيات من خلال الوسائل التالية:

التسجيل باستخدام الفيديو: قامت الباحثة بتصوير الطلاب أثناء عملهم في مجموعات لتعلم موضوع المثلثات في الهندسة، وذلك من أجل متابعة عمليات فهمهم للمصطلحات والعلاقات المختلفة في موضوع المثلثات، مثلا أية عمليات فهم وإدراك انخرطوا بها من أجل التمكن من العلاقات المختلفة في المثلث متساوي الساقين.

المقابلة: الباحثة قامت بإجراء مقابلات للطلاب للاستفسار عن قضايا لاحظتها أثناء تعلم المجموعات المختلفة لموضوع المثلثات في الهندسة، مثلا الاستفسار عن سبب قيام طالب معين بطي عكسي.

طريقة تحليل المعطيات

حلّلت الباحثة أحداث تعلم الطلاب لموضوع المثلثات في الهندسة حسب نظرية الفهم الرياضي لبيري وكيرين (Pirie & Kieren, 1991)، وبشكل محدد أكثر قامت الباحثة بتعيين الأحداث الرياضية وعمليات تعلم الطلاب التي تدل على كل واحدة من مستويات الفهم الرياضي في النظرية السابقة، مثل مستوى التعرّف البدائي وملاحظة الصورة وتكوين الصورة والتعميم وملاحظة الصفات والملاحظة والهيكلة والاستقصاء.

وحتى تتعرف الباحثة على المستويات المذكورة أعلاه استخدمت النظرية المجذرة لستراوس وكوربين (Strauss & Corbin, 1998)، هذه النظرية تعني بناء نظرية من خلال تحليل البيانات ومن خلال الترقي بالبناء على الأنماط التي يكشف عنها التحليل. فمن خلال التصنيف الأولي للبيانات تتشكل الأنساق وتتضح بشكل أكثر تجريداً، ومع تعدد تلك الأنساق ووضوحها يمكن أن تكون نظرية تمتد جذورها للبيانات الأولية؛ بمعنى أن الباحث يسلك يتبع منهجا استقرائيا بحتا inductive method بحيث ينتقل من البيانات الى النظرية وليس من النظرية الى تحليل البيانات.

وفي النظرية المجذّرة تبدأ عملية جمع البيانات من خلال استراتيجية البدء من الصفر بدون إطار نظري أولي، إذ أن النظرية تتطور من خلال مجموعة من البيانات المتولدة عن سلسلة من الملاحظات، هذه البيانات تشير إلى تطور التنبؤات التي سيتم فحصها فيما بعد من خلال مجموعة ملاحظات إضافية والتي قد تؤكد أو تنفي صحة هذه التنبؤات (Glaser & Strauss, 1967). وتتكون النظرية من المراحل التالية والتي اتبعتها الباحثة في التحليل:

- الترميز المفتوح (Open coding): في هذه المرحلة راقبت الباحثة أفعال الطلاب ومناقشاتهم أثناء اشتراكهم في النشاط وذلك بهدف البحث عن كلمات وجمل تظهر وتتكرر في أقوالهم بشكل مستمر وتدل على حدوث واحدة من مراحل الفهم السابقة، أو تدل على قيامهم بطي عكسي لمرحلة سابقة.

- الترميز المحوري (Axial coding): بعد تصنيف الأفعال والأقوال في ثِيَم (Theme)، نضع المتشابه منها معاً، حيث قسّمت الباحثة الأفعال والأقوال التي جمعتها في مجموعات واختبرت أوجه التشابه والاختلاف فيما بينها، ثم وضعت الأفعال والأقوال التي تشير إلى مرحلة معينة معاً (في فئة واحدة). كذلك قامت الباحثة باختبار الانتقال بين المراحل حسب السياق الذي تظهر فيه، وظروف الانتقال.

- الترميز المختار (Selective coding): بعد ترتيب التصنيفات والتصنيفات الفرعية المنبثقة منها (التصنيفات الفرعية) والانتقال بينها، حاولت الباحثة معرفة ترتيب تقدم كل مجموعة من الطلاب من مرحلة إلى أخرى، وذلك في محاولة لبناء تصور حول الظاهرة قيد الدراسة (عمليات فهم الطلاب لمصطلحات وعلاقات رياضية تتعلق بالمثلثات في الهندسة).

الفصل الرابع

النتائج

الفصل الرابع

النتائج

عرضت الباحثة في هذا الفصل مستويات الفهم المختلفة التي مرّ بها الطلاب أثناء تعلمهم لموضوع المثلثات في وحدة الهندسة، كما حلّلت الباحثة هذه المستويات بناء على نظرية بيري- كيرين للفهم الرياضي، إذ يتكون الفهم وفق هذه النظرية من ثمانية مستويات غير قابلة للتجزئة وهي: التعرّف البدائي، تكوين الصورة، امتلاك الصورة، ملاحظة الصفات، التعميم، الملاحظة، وضع القواعد(الهيكلة)، الاستقصاء. كما ستوضح أهم الأقوال والأحداث التي قام بها الطلاب أثناء ذلك، وعرضت أمثلة مختلفة لتفاعل الطلاب ضمن مجموعة كريم والمكونة من كريم ويوسف وعمر، ورسومات توضح عملهم على برنامج جيوجبرا. بعدها قارنت الباحثة بشكل مختصر تفاعل الطلاب في مجموعة كريم مع الطلاب في المجموعتين الأخريين (مجموعتي خالد ونادين).

الموضوع الأول: المثلث

يتكون موضوع المثلث من قسمين: الأول تصنيف المثلثات حسب أطوال أضلاعها وحسب قياسات زواياها، أما القسم الثاني فهو شروط تطابق مثلثين؛ وهي أربعة شروط (ض ض ض)، (ض ز ض)، (ض ز ز)، (قائمة وتر احد ضلعي القائمة). وفيما يلي عرض لمستويات الفهم التي مرت بها مجموعة "كريم" أثناء تعلمها لموضوع المثلث بقسميه باستخدام جيوجبرا:

أولا: تصنيف المثلثات

يُصنّف المثلث حسب أطوال أضلاعه إلى ثلاثة أنواع: مختلف الأضلاع، متساوي الساقين، متساوي الأضلاع، كما يصنف حسب قياسات زواياه الداخلية إلى: حاد الزوايا، قائم الزاوية، منفرج الزاوية، وفيما يلي عرض لمستويات الفهم التي مرت بها مجموعة كريم أثناء تعلمها لموضوع تصنيف المثلثات باستخدام جيوجبرا:

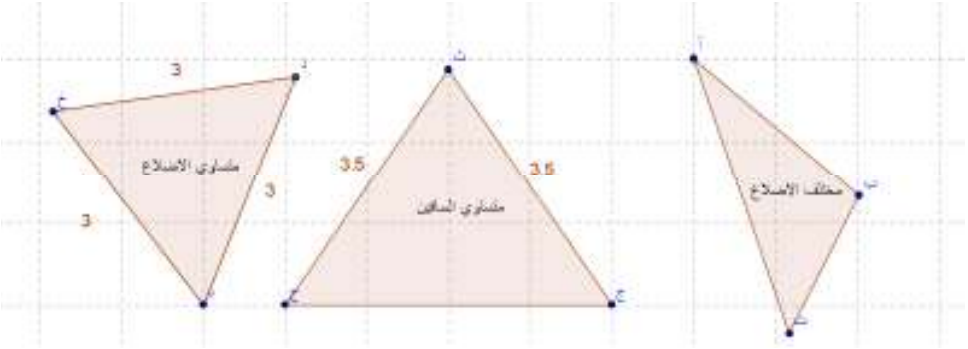
التعرُّف البدائي

في هذا المستوى كان مهما بالنسبة للمعلمة أن تحتوي معرفة الطلاب البدائية على مفهوم المثلث (سطر 1)، لكن اتضح لها أن بعض الطلاب لم يكونوا يمتلكون المعرفة الكافية التي تمكنهم من تقديم تعريف دقيق لمفهوم المثلث.عمر مثلا عرفه على انه مجسم له ثلاثة أضلاع (سطر 2). حاولت المعلمة أن تحسن من معرفته البدائية عن طريق رسم مثلث على ورقة (تقديم أفكار)، ثم طرحت عددا من الأسئلة التي قادت عمر للتمييز بين المجسم والسطح المستوي الذي تمثله الورقة (استفسار عن أفكار)، (الأسطر 3–8).

المعلمة: مين يحكيلي شو تعريف المثلث؟	1
عمر: هو مجسم مغلق له ثلاثة أضلاع.	2
المعلمة: احنا لما رسمنا المثلث وين رسمناه؟ عالورقة..الورقة مجسم ولا سطح مستوي	3
عمر: سطح مستوي	4
المعلمة: طيب شو معنى مجسم يا عمر؟	5
عمر: إشارات في وجهه على عدم المعرفة	6
المعلمة: المجسم هو الشكل إلي بكون الو ثلاثة أبعاد طول وعرض وارتفاع مثل شكل الهرم أو المكعب	7
عمر: اااااه فهمت (ابتسامة على الوجه).	8

تكوين الصورة: هناك عدة أفعال تعليم ساعدت الطلاب على تكوين معرفتهم المتعلقة بتصنيف المثلثات ومنها:

استخدام التكنولوجيا (the use of technology): قامت المعلمة باستخدام برنامج جيوجبرا في تدريس الطلاب موضوع تصنيف المثلثات، وهذه بعض رسوم الطلاب على جيوجبرا لتصنيف المثلثات حسب أطوال أضلاعها، شكل(3):

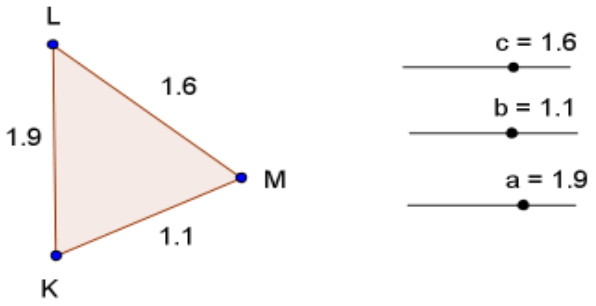


شكل (3): تصنيف المثلثات حسب أطوال الأضلاع كما رسمها الطلاب

تصريح القصد (intention statement)**:** المقصود هنا أنّ المعلمة قامت قاصدةً بالتصريح بالشيء الذي تريد تقديمه للطلاب وذلك بهدف تكوين فكرة لديهم حول ما سيتعلمونه من أنواع المثلثات (سطر 9):

المعلمة: إذن في تصنيفات ممكن نصنف المثلثات على أساسها، على أي أساس ممكن نصنف المثلثات؟	9

طرح أسئلة (asking questions)**:** كانت هذه الأسئلة من نوع واحد وهو أسئلة المعلمة للطلاب عن قضايا تساعدهم في تكوين المعرفة لديهم. حدث هذا عندما قامت المعلمة برسم مثلث على جيوجبرا (شكل4):

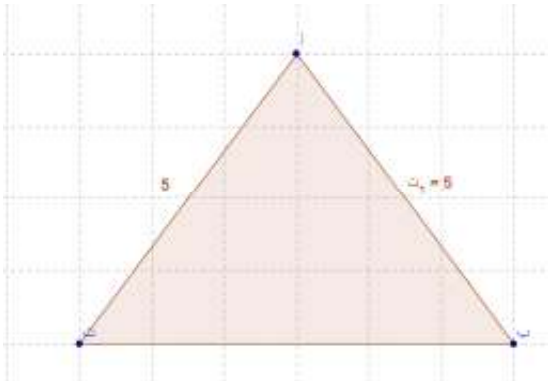


شكل (4): المثلث الذي رسمته المعلمة على جيوجبرا

سألت المعلمة الطلاب عمّا يلاحظوه على أضلاع المثلث المرسوم (استفسار عن أفكار) (سطر11) فأجاب يوسف أن الأضلاع غير متساوية (بناء أفكار)(سطر12)، فطرحت سؤالاً آخر وهو ماذا نسمي هذا المثلث (استفسار عن أفكار)(سطر 13) فأجاب كريم بأنه مثلث مختلف الأضلاع (بناء أفكار) (سطر14). ويتبين ذلك في الحوار التالي:

10	المعلمة: ممكن نصنف المثلثات حسب طول الأضلاع، خلينا نشوف جيوجبرا
11	المعلمة: شوفوا هادا المثلث، شو بتلاحظوا على أطوال أضلاعه؟
12	يوسف: الأضلاع غير متساوية.
13	المعلمة: يعني شو ممكن نسمي هذا المثلث؟
14	كريم: مثلث مختلف الأضلاع.

تحسين الطلاب للغتهم الرياضية (mathematics language improvement): في بعض الأحيان كان الطلاب يستخدمون تعابير رياضية غير دقيقة للتعبير عن الحالة الرياضية التي أمامهم، ولكن عند التعمق في دراستهم للموضوع أصبحوا أكثر حرصا على انتقاء المصطلحات الرياضية التي تعبر فعلا وبشكل أكثر دقة عما يتعلمونه، فمثلاً قامت المعلمة برسم مثلث كما في شكل (5)(سطر 15):



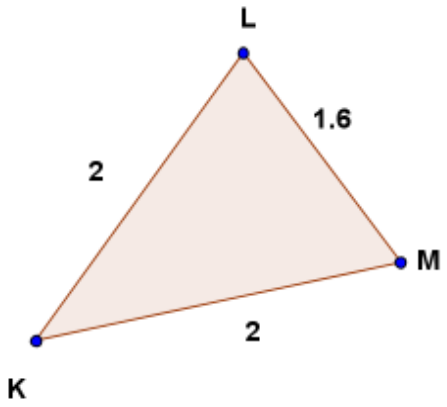
شكل (5): المثلث الذي رسمته المعلمة

هنا سألت المعلمة الطلاب عما يلاحظونه على أضلاع المثلث المرسوم (استفسار عن أفكار)(سطر16)، فذكر يوسف أنّ هناك ضلعين "قد بعض" (سطر17)، فقامت المعلمة بتصحيح ما قاله يوسف وقالت: إحنا بنحكي أنّ الضلعين متساويان يا يوسف (سطر18)، ووافق كل من كريم وعمر المعلمة فيما قالت (سطر19).الحوار التالي يوضح ذلك:

15	المعلمة: انتبهوا معي على هذا المثلث
16	المعلمة: شو بتلاحظوا على أضلاع المثلث؟
17	يوسف: في عنا ضلعين "قد بعض".
18	المعلمة: هيك احنا بنحكي؟... بنحكي انو الضلعين "متساويين".
19	كريم وعمر: صح

امتلاك الصورة: في هذا المستوى امتلك الطلاب صوراً ذهنية حول تصنيفات المثلثات، فمـــثلا أصبح بإمكان الطلاب أن يحددوا نوع المثلث المرسوم دون الحاجة لتدخل المعلمة.

مثلاً في مستوى تكوين الصورة رسمت المعلمة مثلثاً على جيوجبرا وكلّفت الطلاب أن يحرّكوا أزرار المنزلقات (a,b) حتى يصبح طول كل منهما يساوي 2 (سطر20) (شكل6):



شكل (6): المثلث متساوي الساقين على جيوجبرا كما رسمه الطلاب

لاحظ الطلاب أنه أصبح في المثلث ضلعان متساويان في الطول (تقديم أفكار)(سطر22) وسألتهم عن نوع المثلث الناتج (استفسار عن أفكار)(سطر23) فأجاب عمر انه متساوي الساقين (بناء أفكار)(سطر24).الحوار التالي يبين ذلك:

المعلمة: انتبهوا لو حركنا الزر(اي) والزر (بي) حتى نوصلهم للطول 2 شو بصير للمثلث؟	20
عمر: يحرك الأزرار	21
كريم: صار فيه ضلعين متساويين(يشير بإصبعه على المثلث)	22
المعلمة: إذن شو ممكن نسمي هاذ المثلث يا عمر؟	23
عمر: متساوي الساقين	24

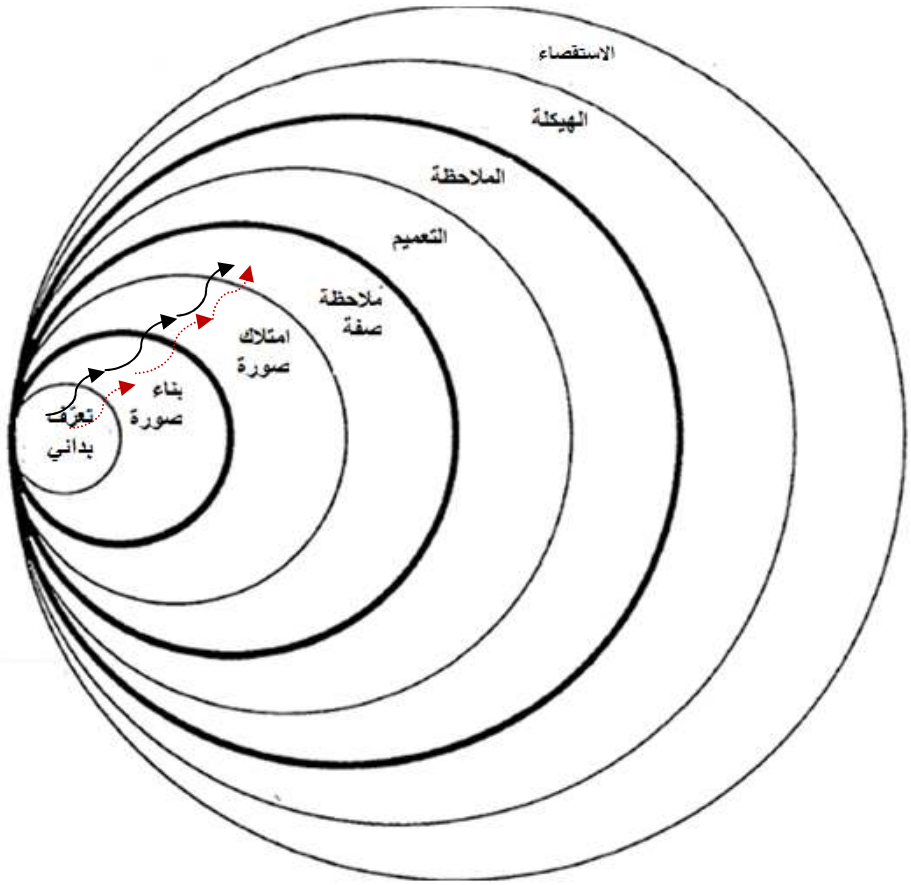
إذاً نجد هنا أن المعلمة ساعدت الطلاب في تكوين معرفتهم الخاصة بنوع المثلث، لكـــن نرى فيما بعد أن صورة المثلث المتساوي الساقين قد تكونت في أذهان الطلاب وأصبح بإمكانهم أن يتعرفوا إلى هذا المثلث بمجرد مشاهدته. ويتضح ذلك عندما سألت المعلمة الطلاب هل كـــل

مثلث متساوي الساقين يكون متساوي الأضلاع؟ (استفسار عن أفكار)(سطر25–26)، فأجـــاب عمر بلا (بناء أفكار)(سطر27).

الحوار التالي يبين ذلك:

المعلمة: طيب هالسؤال للعبقري الفهمان...هل كل مثلث متساوي الساقين	25
بكون متساوي الأضلاع؟	26
عمر: لا ما بكون لأنه الضلع الثالث في المثلث المتساوي الساقين مش قـــد هـــدول الضلعين (يشير بإصبعه على المثلث)	27

المخطط التالي يوضح تطور فهم الطلاب في موضوع تصنيف المثلثات:



شكل (7): مخطط تطور فهم الطلاب في موضوع تصنيف المثلثات من مستوى التعرف البدائي وحتى امـــتلاك الصورة.

الجدول التالي يبين مستويات تطور فهم الطلاب في موضوع تصنيف المثلثات:

جدول(2): مستويات تطور فهم مجموعة كريم في موضوع تصنيف المثلثات.

التطور	مثال
التعرّف البدائي	**التعرف البدائي لمفهوم المثلث** المعلمة: شو تعريف المثلث؟ عمر: هو مجسم مغلق له ثلاثة أضلاع المعلمة: إحنا لما رسمنا المثلث وين رسمناه؟ عالورقة.. الورقة مجسم ولا سطح مستوي؟ عمر: سطح مستوي المعلمة: اذن المجسم هو الشكل اللي بكون له ثلاثة ابعاد طول وعرض وارتفاع مثل شكل الهرم او المكعب.
تكوين الصورة	**تكوين صورة ذهنية للمثلث متساوي الساقين** المعلمة: هناك تصنيفات ممكن نصنف المثلثات على اساسها. ما هذه التصنيفات؟ (تصريح قصد) المعلمة: انتبهوا معي على هذا المثلث.. شو بتلاحظوا على اضلاعه؟ يوسف: في عنا ضلعين "قد بعض" المعلمة: هيك احنا بنحكي؟ بنحكي انه في ضلعين متساويين. (تحسين اللغة الرياضية)
امتلاك الصورة	**امتلاك صورة للمثلث متساوي الساقين** المعلمة: لو حركنا الزر أي والزر بي حتى نوصلهم للطول 2 شو بصير للمثلث؟ عمر يحرك الازرار كريم: صار في ضلعين متساويين المعلمة: اذن شو ممكن نسمي المثلث؟ عمر: متساوي الساقين.

أما المجموعتان الأخريان (مجموعة خالد، مجموعة نادين) فقد مرّتا بنفس مستويات الفهم التي مرّت بها مجموعة كريم وهي التعرّف البدائي، تكوين الصورة وامتلاكها، كما أنهما لم تقوما بعمليات طي عكسي لأي مستويات سابقة من الفهم، وقامتا أثناء تعلمهما بممارسات

تعلّمية كالاستفسار عن الأفكار وبنائها، لكن وجه الاختلاف يكمن في أنّ مجموعة نادين لم تحتج لتدخل كبير من قبل المعلمة كما هو الحال في مجموعتي كريم وخالد.

ثانياً: شروط تطابق المثلثات (تطابق مثلثين بثلاثة أضلاع (ض ض ض))

مرت مجموعة "كريم" بمستويات مختلفة من الفهم أثناء تعلمها للشرط الأول من شروط تطابق المثلثات وهو تطابق المثلثين بثلاثة أضلاع (ض ض ض)، وفيما يلي عرض لهذه المستويات:

التعرُّف البدائي: تتمثل معرفة الطلاب البدائية هنا في امتلاكهم مفهوم التطابق، حيث اتضح للمعلمة أن الطلاب امتلكوا فعلا هذا المفهوم، بدا هذا جلياً عندما وجّهت المعلمة لهم سؤالا وهو ماذا نقصد بتطابق شكلين؟ (استفسار عن أفكار)(سطر1)، فأجاب عمر بأن الشكلين المتطابقين بكونوا قد بعض بالزبط (تقديم أفكار)(سطر2)، وعبّر كريم عن التطابق بقوله أن احد الشكلين يكون نسخة للشكل الآخر(تقديم أفكار)(سطر3). يتضح ذلك من الحوار التالي:

المعلمة: مين يحكيلي يا طلاب شو بنعني بتطابق شكلين؟	1
عمر: يعني بكونو الشكلين قد بعض بالزبط.. مس.	2
كريم: اوكأنه بنعمل نسخ من الشكل الاول فبطلع عنا الشكل التاني	3
المعلمة: برافو عليكم يا طلاب صح.	4

تكوين الصورة: هناك عدة أفعال تعليم ساعدت الطلاب على تكوين معرفتهم المتعلقة بالتطابق ومنها:

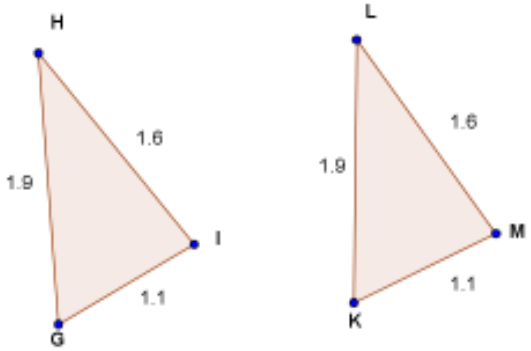
تصريح القصد: المقصود هنا أن المعلمة قامت قاصدةً بالتصريح بالشيء الذي تريد تقديمه للطلاب؛ وذلك بهدف تكوين فكرة لديهم حول ما سيتعلمونه في موضوع تطابق المثلثات (سطر 5-6):

المعلمة: اليوم درسنا عن تطابق المثلثات...خلينا نشوف جيوجبرا مع بعض.	5
المعلمة: بناء على التعريف السابق للتطابق بدنا نعرف شو يعني تطابق مثلثات؟	6

استخدام التكنولوجيا: استخدمت المعلمة برنامج جيوجبرا في تدريس الطلاب الشرط الأول من شروط تطابق مثلثين وهو (ض ض ض)، وهذه إحدى الرسوم التي رسمها الطلاب على جيوجبرا والتي تعبر عن الشرط السابق للتطابق (شكل 8):

شكل (8): مثلثان متطابقان بثلاثة أضلاع كما رسمهما الطلاب

تحسين الطلاب للمفهوم الرياضية: استخدم الطلاب في البداية تعابير رياضية غير دقيقة للتعبير عن شرط التطابق ولكن مع التعمق في دراسة الموضوع أصبح الطلاب يستخدمون تعابير رياضية أكثر دقة من تلك السابقة، نجد ذلك عندما رسمت المعلمة مثلثين على جيوجبرا (شكل9):



شكل(9): المثلثان كما رسمتهما المعلمة على جيوجبرا

عبّر عمر عن المثلثين بأنهما "قد بعض" (سطر8)، فأرادت المعلمة أن يعبر الطلاب عن ذلك بعبارة أكثر دقة (سطر9)، فصحح كريم ما ذكره عمر بقوله أن الأضلاع في المثلث الأول تساوي الأضلاع في المثلث الثاني (سطر10)، الحوار التالي يوضح ذلك:

7	المعلمة: انتبهوا على جيوجبرا وشوفوا هالمثلثين... مالهم؟
8	عمر: المثلثين" قد بعض"
9	المعلمة: كيف يعني قد بعض؟
10	كريم: يعني قصدو.. انه الأضلاع اللي في المثلث الأول بتساوي الأضلاع اللي في المثلث الثاني.. يعني الأضلاع متساوية

امتلاك الصورة: في هذا المستوى امتلك الطلاب صوراً ذهنية حول تطابق مثلثين بثلاثة أضلاع، فمثلا أصبح بإمكان الطلاب أن يحددوا شرط تطابق مثلثين دون الحاجة لتدخل المعلمة.

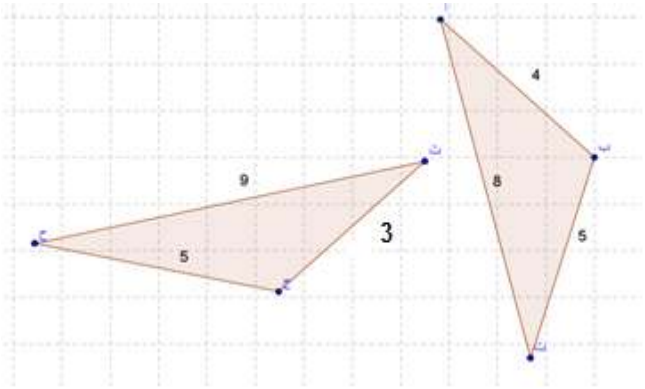
نجد هذا عندما قامت المعلمة برسم مثلثين (شكل 9 السابق)، وكلّفت المعلمة الطلاب بملاحظة تطابق المثلثين من عدمه (استفسار عن أفكار)(سطر11)، فأجاب يوسف أنهما يجب أن يتطابقا (سطر12)، فطلبت المعلمة من الطلاب التحقق من ذلك (سطر13)، فقام كريم بتحريك أحد المثلثين ووضعه على المثلث الثاني (التحقق من صحة أفكار)(سطر14)، وتوصل الطلاب إلى أن المثلثين متطابقان بثلاثة أضلاع (سطر16). الحوار التالي يبين ذلك:

11	المعلمة: طيب يا طلاب بما انه الأضلاع في المثلث الأول بساووا الأضلاع في المثلث الثاني فهل المثلثين يتطابقان؟
12	يوسف: اه.. لازم ينطبقوا
13	المعلمة: بدنا نتأكد.. كيف؟
14	كريم: بنحرك المثلث الأول وبنطبقوا عالثاني (كريم يحرك المثلث) هيهم انطبقوا
15	المعلمة: طيب ما هو شرط التطابق هنا؟
16	عمر: انطبقوا المثلثين بثلاثة أضلاع.

إذن نلاحظ هنا أن الطلاب امتلكوا صورة حول شرط التطابق في هذه الحالة وهو تطابق المثلثين بثلاثة أضلاع (ض ض ض).

ملاحظة الصفات: هنا يستطيع الطالب بعد أن امتلك صوراً ذهنيةً حول تطابق مثلثين بثلاثة أضلاع، يستطيع أن يجمع بين هذه الصور ليبني صفاتاً رياضية تتعلق به.

حدث هذا عندما كلفت المعلمة الطلاب برسم مثلثين بأطوال معينة على جيوجبرا واختبار إمكانية تطابقهما (استفسار عن أفكار)(سطر17)، فقام الطلاب فعلا برسم المثلثين (شكل10):



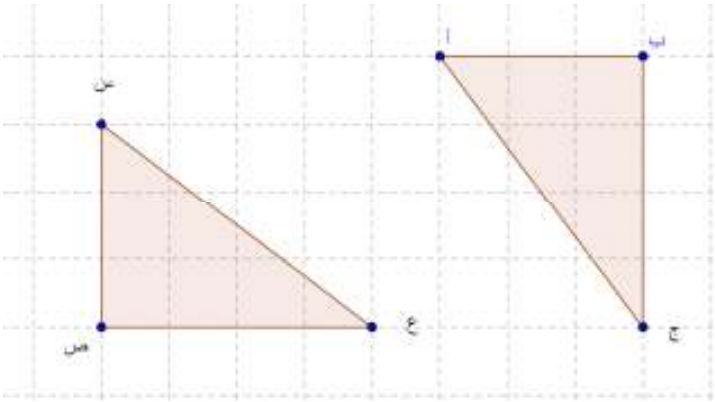
شكل (10): المثلثان كما رسمهما الطلاب

هنا حاول الطلاب الاستفادة من الصورة التي امتلكوها حول تطابق مثلثين بثلاثة أضلاع، فحاولوا البحث عن صفات مشتركة بين كلا المثلثين، لاحظ يوسف أن هناك ضلعين غير متساويين في كلا المثلثين أطوالهما 3، 4 (سطر19)، كذلك لاحظ عمر أن هناك ضلعين متساويين طول كل منهما 5 (سطر20)، لكن كريم قاطع زملاءه اثناء حديثم بقوله انّ المثلثين غير متطابقين، وبالتالي توصل الطلاب إلى أن المثلثين غير متطابقين لأنّ شرط التطابق لم يتحقق (سطر21).الحوار التالي يوضح ذلك:

المعلمة: ارسمولي على جيوجبرا مثلثين الأول أطوال أضلاعه 4، 8،5 والثاني 6، 5، 9. وشوفوا هل يتطابق المثلثان أم لا.	17
يرسم الطلاب المثلثين على جيوجبرا	18
يوسف: خلونا نقارن أطوال الأضلاع هاد الضلع 6، وهاد الضلع 4 في المثلث الثاني	19
عمر: وبرضو عنا 5 بالأول و5 بالثاني	20
كريم: يعني بدون ما نكمل.. المثلثين لا يتطابقان	21
يوسف : صح المثلثين ما بنطبقوا.	22

التعميم: هنا انتقل الطالب من مستوى ملاحظته لصفات معينة تتعلق بشرط تطابق مثلثين بثلاثة أضلاع إلى مستوى تعميم هذه الصفات، بمعنى أن الطالب يستطيع هنا أن يستخلص الخـــواص والعلاقات المشتركة وتعميمها في مواقف تعليمية جديدة او مشابهة لتلك التي مرّ بها سابقاً.

حدث هذا عندما كلفت المعلمة الطلاب بحل احد الأمثلة، حيث طلبت منهم اختبار إمكانية تطابق المثلثين أ ب جـــ، س ص ع (استفسار عن أفكار)(سطر23) كما في شكل(11):



شكل (11): المثلثان كما رسمتهما المعلمة في المثال

لاحظ يوسف أنّ المثلثين متساويان في أطوال أضلاعهما الثلاثة وبالتالي فبإمكانه تعميم ما تعلمه سابقا من أن المثلثين يتطابقان بثلاثة أضلاع، فذكر أنّ المثلثين متطابقان بثلاثة أضلاع (سطر25)، وهذا ما أكّده زميلاه عمر وكريم (سطر 26). الحوار التالي يبين ذلك:

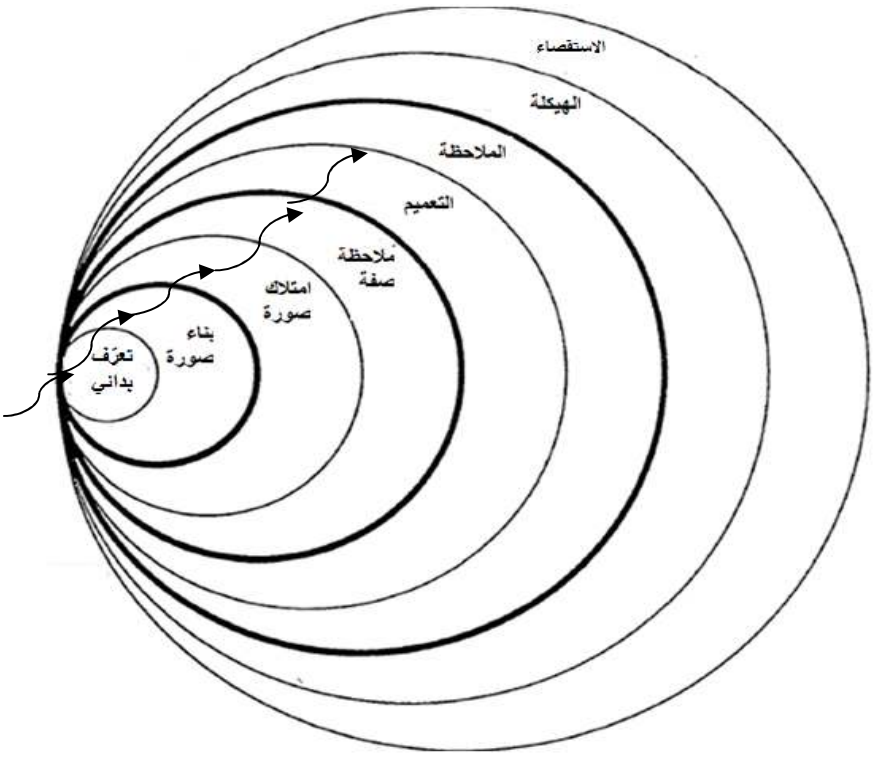
المعلمة: شوفولي هالمثلثين... هل هما متطابقان أم لا؟	23
يوسف: بما انو أضلاع المثلثين متساوية إذاً المثلثين متطابقين.	24
يوسف: بتطابقوا بثلاثة أضلاع.	25
عمر وكريم: صح 100%.	26

الملاحظة: الطالب في هذا المستوى يستطيع أن يفكر بالموقف بشكل منظم، بمعنى أن الطالـــب يستطيع أن يعبّر عن المعرفة المتعلقة بتطابق المثلثات على شكل نظريات. إذ أن الطلاب لـــدى تعلمهم لشرط تطابق المثلثين بثلاثة أضلاع كانوا يرمزون لحالة التطابق برموز بدلا من كتابتها بالكلمات، فمثلاً:

عندما رسمت المعلمة مثلثين (شكل 9 السابق)، كلفت الطلاب بمعرفة هل يتطابق المثلثان أم لا، توصل الطلاب في النهاية إلى أنّ المثلثين متطابقان، فلاحظ كريم أن بإمكانه التعبير عن حالة التطابق هذه بثلاثة رموز وهي (ض ض ض) بدلا من كتابتها بالكلمات في كل مرة (سطر28). الحوار التالي يبين ذلك وهو متمم للحوار الذي ذُكر في مستوى امتلاك الصورة. الحوار التالي يوضح ذلك:

عمر: انطبقوا المثلثين بثلاثة أضلاع	27
كريم: ممكن.. مس.. نستبدل الكلمات برموز	28
المعلمة: كيف يعني يا كريم؟	29
كريم: يعني بنقدر نكتب شرط التطابق هدا بـ (ض ض ض)	30
المعلمة: طبعا بصير	31

الرسم التالي هو تخطيط لتطور فهم الطلاب في موضوع شرط تطابق المثلثات (ض ض ض).



شكل (12): مخطط تطور فهم الطلاب في موضوع شرط تطابق المثلثات بثلاثة أضلاع

الجدول التالي يوضح تطور فهم مجموعة كريم لشرط تطابق المثلثات (ض ض ض):

جدول(3): تطور فهم مجموعة كريم في موضوع شرط التطابق (ض ض ض)

التطور	مثال
تعرّف بدائي	**تعرّف بدائي لمفهوم التطابق** المعلمة: ماذا نعني بتطابق شكلين؟ عمر: يعني بكونو الشكلين قد بعض بالزبط كريم: او كإنّا بنعمل نسخ للشكل الاول بطلع عنا الشكل الثاني
تكوين صورة	**تكوين صورة لشرط تطابق المثلثين بثلاثة أضلاع** المعلمة: اليوم درسنا عن تطابق المثلثات.. خلينا نشوف جيوجبرا مع بعض. (تصريح قصد) المعلمة: انتبهوا على جيوجبرا وشوفوا هالمثلثين.. مالهم؟ عمر: المثلثين قد بعض كريم: لأ.. قصدو يحكي انهم متساويين (تحسين اللغة الرياضية)
امتلاك الصورة	**امتلاك صورة المثلثين المتطابقين بثلاثة أضلاع** المعلمة: بما انه الأضلاع في المثلث الأول بساوا الاضلاع في المثلث الثاني.. فهل المثلثين بتطابقوا؟ يوسف: لازم ينطبقوا المعلمة: كيف بدنا نتأكد؟ كريم: بنحرك المثلث الاول ونضعه على الثاني.. هيهم انطبقوا
ملاحظة صفة	**ملاحظة صفة عدم تساوي ضلعين في مثلثين وبالتالي عدم التطابق** المعلمة: ارسموا على جيوجبرا مثلثين الأول اطوال اضلاعه 4،5،8 والثاني 3،5،9 وشوفوا هل يتطابق المثلثان ام لا. يوسف: خلونا نقارن اطوال الاضلاع، هاد الضلع 5 وهاد 5 عمر: وكمان عنا هاد 8 وهاد 9 كريم: يعني بدون ما نكمل المثلثان لا يتطابقان
التعميم	**تعميم شرط تطابق مثلثين بثلاثة أضلاع** المعلمة: شوفوا هالمثلثين هل هما متطابقان؟ يوسف: بما إنه اضلاع المثلثين متساوية اذن المثلثين متطابقين بثلاثة اضلاع
الملاحظة	**ملاحظة إمكانية استبدال شرط التطابق بالرموز بدل الكلمات** عمر: انطبق المثلثين بثلاثة اضلاع كريم: ممكن نستبدل الكلمات برموز؟ المعلمة: كيف يعني؟ كريم: يعني بنقدر نكتب شرط التطابق هادا ب (ض ض ض)

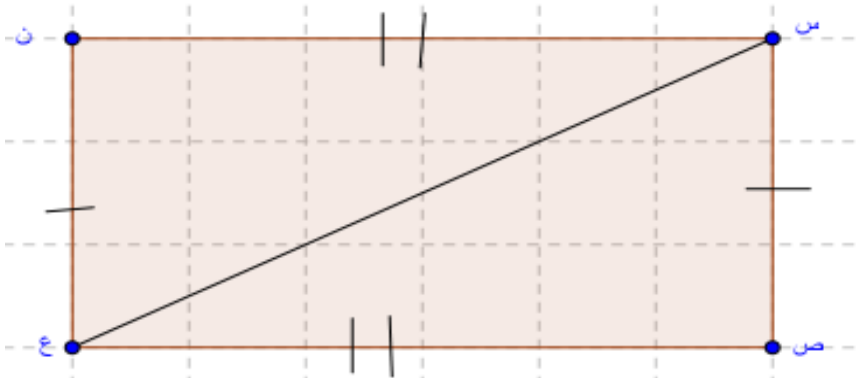
بالنسبة لمجموعتي خالد ونادين، فمجموعة خالد مرّت بنفس مستويات الفهم التي مـــرّت بها مجموعة كريم ابتداء بالتعرّف البدائي ووصولا إلى مستوى الملاحظـــة، ودون أن تحـــدث عمليات طي عكسي لمستويات سابقة، أما مجموعة نادين فثمّة اختلاف بينها وبـــين مجمـــوعتي كريم وخالد؛ إذ أنها مرّت بداية بمستوى التعرّف البدائي ومنها انتقلت مباشـــرة إلـــى مســـتوى امتلاك الصورة؛ حيث استطاعت أن تمتلك صورة ذهنية لشرط التطـــابق (ض ز ض) دون أن تقوم بممارسات تعلّمية تساعدها في ذلك، ثم انتقلت إلى مستوى التعميم دون أن يكون مرورهـــا بمستوى ملاحظة الصفات ظاهرا، وبالتالي فقد ظهرت هنا خاصية لا حاجة إلى حدود، ثم انتقلت إلى مستوى الملاحظة.

من الملاحظ أنّ انتقال المجموعات الثلاث بين مستويات الفهم كان ذاتيا؛ بمعنى انه لـــم يكن هناك تدخل يذكر للمعلمة. أيضا تنوعت ممارسات الطلاب التعلّمية في المجموعات الثلاث حيث قدّموا أفكارا واستفسروا عنها وبناء عليها بنوا أفكارا أخرى قاموا بشرحها.

ثالثاً: تطبيقات مباشرة على شرط التطابق (ض ض ض)

في هذا التمرين مرّ الطلاب بالمستوى السادس من مستويات الفهم وهـــي الملاحظـــة، فالطالب هنا يلاحظ مجموعة من الخصائص ويحاول الربط بينها في محاولة لحل التمرين.

فمثلاً عندما قام الطلاب بحل هذا التمرين والمطلوب فيه معرفة إمكانية تطابق المثلثين (س ص ع)، (س ن ع) أم لا (شكل13):



شكل (13): السؤال كما رسمه الطلاب على جيوجبرا

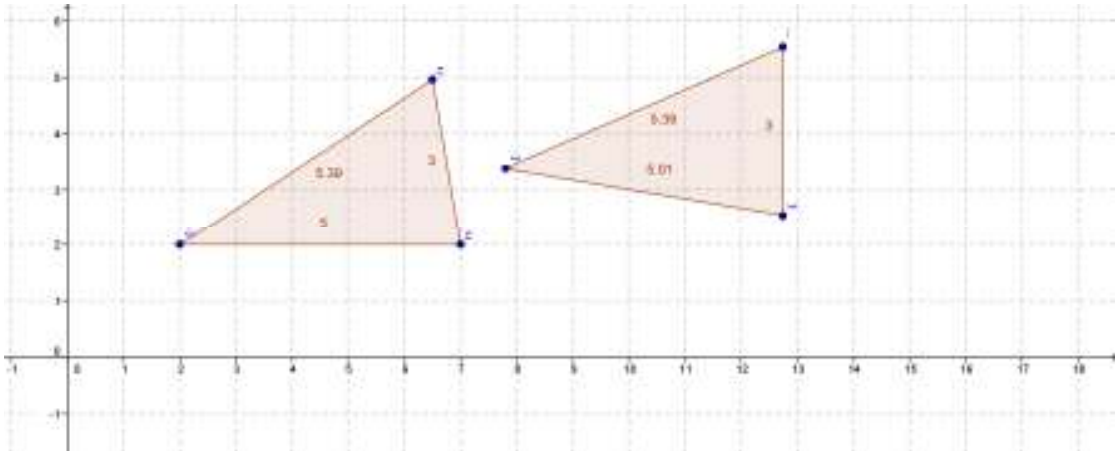
هنا أدرك عمر مباشرة أن المثلثين متطابقان لأنه استطاع الربط بين كــون الأضــلاع المتقابلة في المستطيل متساوية وما امتلكه من معرفة حول شروط تطابق المثلثات، فعلّق قــائلا أن السؤال "حالّ حالو من حالو" (سطر33)، وقام بعد ذلك بذكر الأضلاع المتساوية في المثلثين المذكورين (تقديم أفكار)(سطر35)، ثم أكمل يوسف وذكر الضلع الثالث والذي يكتمل به شــرط التطابق (تقديم أفكار) (سطر36) والحوار التالي يوضح ذلك:

يوسف: طيب بدو نشوف إذا المثلثين متطابقين اللي همي س ص ع، س ن ع	32
عمر:السؤال حالل حالو من حالو.. بما انو مستطيل إذن كل ضــلعين متقــابلين متساويين.	33
كريم: طيب كمل وورجينا شطارتك	34
عمر: س ص= ن ع، وكمان ص ع= س ن يلا أنت طلّع الضلع الثالث	35
يوسف: هههه س ع مشترك بينهم، يعني انطبقوا بثلاث أضلاع	36

رابعاً: تطبيقات غير مباشرة على شرط التطابق (ض ض ض)

يضم هذا القسم مجموعة من التمارين الإضافية التي قدمتها المعلمة للطــلاب ليقومــوا بحلها بعد إنهائهم تعلم شرط التطابق (ض ض ض)، وقد مرّ الطلاب بمستويات فهم مختلفة أثناء حلهم لهذه التمارين، وفيما يلي بيان ذلك:

تمرين (1): أ ب جــ، س ص ع مثلثان، بين فيما إذا كان المثلثان متطابقان أم لا.

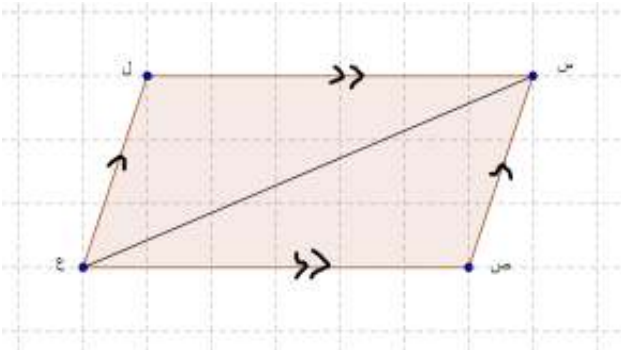


شكل (14): رسمة التمرين كما رسمها الطلاب

مرّ الطلاب هنا بالمستوى الخامس من الفهم وهو التعميم فقد تمكن الطلاب مباشرة من معرفة أنّ المثلثين متطابقان (سطر38)؛ ذلك لأنهم امتلكوا صورة ذهنية حول المثلثين اللذين يتطابقان بثلاثة أضلاع، وبالتالي عمّم الطلاب ما لاحظوه من أن أطوال أضلاع المثلثين متساوية، ومنه يمكن الحكم على المثلثين بأنهما متطابقان (سطر40). الحوار التالي يبين ذلك:

المعلمة: يلا يا طلاب حلولي هذا السؤال	37
يوسف: المثلثين متطابقين	38
عمر: صح لأنه أضلاع المثلثين متساوية.. صح يا كريم؟	39
كريم: اه صح الأضلاع متساوية يعني المثلثين بتطابقوا بثلاث أضلاع.	40

تمرين (2): س ص ع ل متوازي أضلاع، هل المثلثان س ص ع، س ل ع متطابقان؟ علّل.



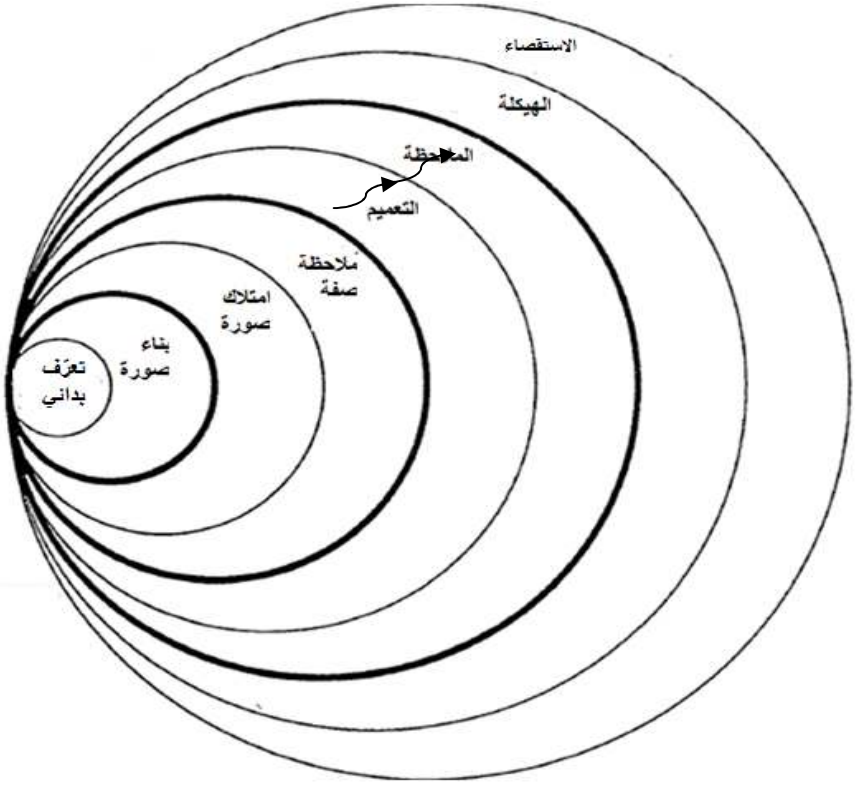
شكل (15): رسمة التمرين كما رسمها الطلاب

فكّر الطلاب بطريقة لحل هذا التمرين، فذكر عمر أن التمرين لم يحتوِ أطوال أضلاع الشكل (سطر42) وبالتالي فهناك صعوبة في حل التمرين، لكن كريم ذكر أن هناك معطيات أخرى يمكن الاستفادة منها في حل التمرين، فالشكل متوازي أضلاع وبالتالي يمكن الاستفادة من خصائصه في الحل (الاسطر43،45). ومما ذكره كريم تذكر عمر خصائص متوازي الأضلاع وهو أن الأضلاع المتقابلة تكون متساوية (بناء أفكار)(سطر46)، وبالتالي فإنّ س ل= ص ع، وذكر يوسف أن س ص= ع ل (بناء أفكار)(سطر47)، وذكر كريم أن س ع ضلع مشترك (سطر48) وبذلك فإنّ المثلثين متطابقان بثلاثة أضلاع.

نلاحظ هنا أن كريم استطاع أن يربط بين ما تعلمه من شروط التطابق مـــع نظريـــات أخرى خاصة بمتوازي الأضلاع تعلمها في السابق ليتمكن من حل التمرين وبالتالي فـــالطلاب مروا بمستوى الملاحظة أثناء حل التمرين. الحوار التالي يبين ذلك:

رسم الطلاب الشكل على جيوجبرا	41
عمر: بس مش معطينا بالسؤال أطوال أضلاع (تبدو عليه علامات التعجب)	42
كريم: مزبوط بس معطينا انه الشكل متوازي أضلاع	43
يوسف: طيب شو يعني؟	44
كريم: بدنا نستفيد من خصائص متوازي الأضلاع في الحل.	45
عمر: اااه قصدك الأضلاع المتقابلة متوازية ومتساوية.. معناتو س ل= ص ع	46
يوسف: صح والله! وعنا كمان س ص= ع ل	47
كريم: وآخر شي س ع مشترك.. يعني بنطبقوا المثلثين بثلاث أضلاع	48

الرسم التالي يوضح تطور فهم الطلاب في التطبيقات غير المباشرة لشرط التطابق (ض ض ض):



شكل (16): مخطط تطور فهم الطلاب في التطبيقات غير المباشرة لشرط التطابق (ض ض ض).

الجدول التالي يوضح تطور فهم مجموعة كريم في التطبيقات غير المباشرة لشرط التطابق (ض ض ض):

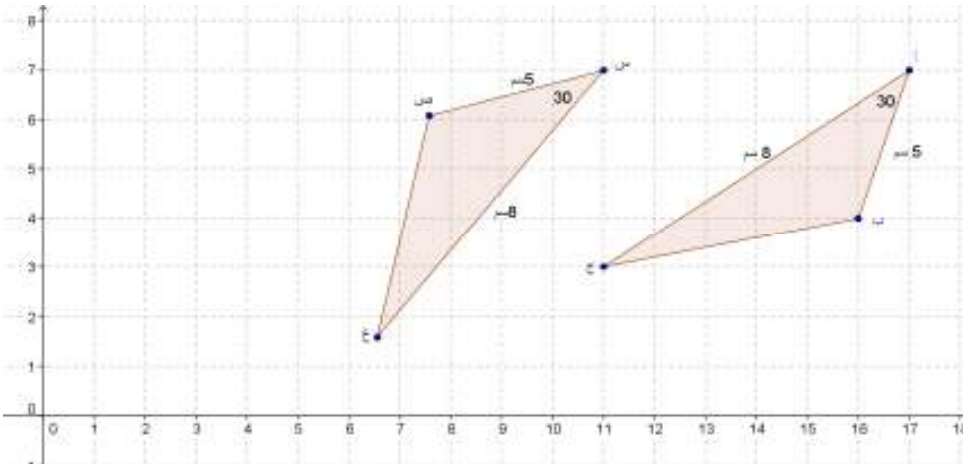
جدول(4): تطور فهم مجموعة كريم في التطبيقات غير المباشرة لشرط التطابق (ض ض ض)

التطور	مثال
التعميم	**تعميم شرط تطابق مثلثين بثلاثة أضلاع** المعلمة: يلا يا طلاب حلولي هذا السؤال يوسف: المثلثين متطابقين عمر: صح لأنه أضلاع المثلثين متساوية.. صح يا كريم؟ كريم: صح الأضلاع متساوية يعني المثلثين بتطابقوا بثلاث أضلاع
الملاحظة	**ملاحظة خصائص متوازي الأضلاع في حل السؤال** عمر: مش معطينا بالسؤال اطوال الاضلاع كريم: مزبوط بس معطينا انه الشكل متوازي اضلاع يوسف: شو يعني؟ كريم: بدنا نستفيد من خصائص متوازي الاضلاع في الحل عمر: قصدك الأضلاع المتقابلة متوازية ومتساوية معناتو س ل = ص ع يوسف: وعنا كمان س ص = ع ل كريم: وآخر شي عنا س ع مشترك يعني المثلثين بتطابقوا بثلاث أضلاع

خامسا: تطور فهم الطلاب أثناء تعلم شروط التطابق الأخرى (ض ز ض، ض ز ز، ضلع ووتر في مثلث قائم الزاوية)

ضلعين وزاوية محصورة بينهما: مرّت مجموعة كريم أثناء تعلّم شرط تطابق مثلثين بضلعين وزاوية محصورة بمستويات الفهم التالية: التعرّف البدائي، إذ تمثّلت معرفة الطلاب البدائية في معرفة الشرط الأول من شروط التطابق وهو تطابق مثلثين بثلاثة أضلاع، ثم مرّوا بمستوى تكوين الصورة حيث استخدمت المعلمة جيوجبرا في عرض أبلِت لمثلثين متساويين في طولي ضلعين وقياس زاوية محصورة بينهما، وطرحت بعض الأسئلة التي من خلالها تمكّن الطلاب من استنتاج شرط التطابق هنا وهو تطابق المثلثين بضلعين وزاوية محصورة بينهما بعد قيامهم بتحريك أحد المثلثين ووضعه على المثلث الآخر. المستوى الثالث هو امتلاك الصورة؛

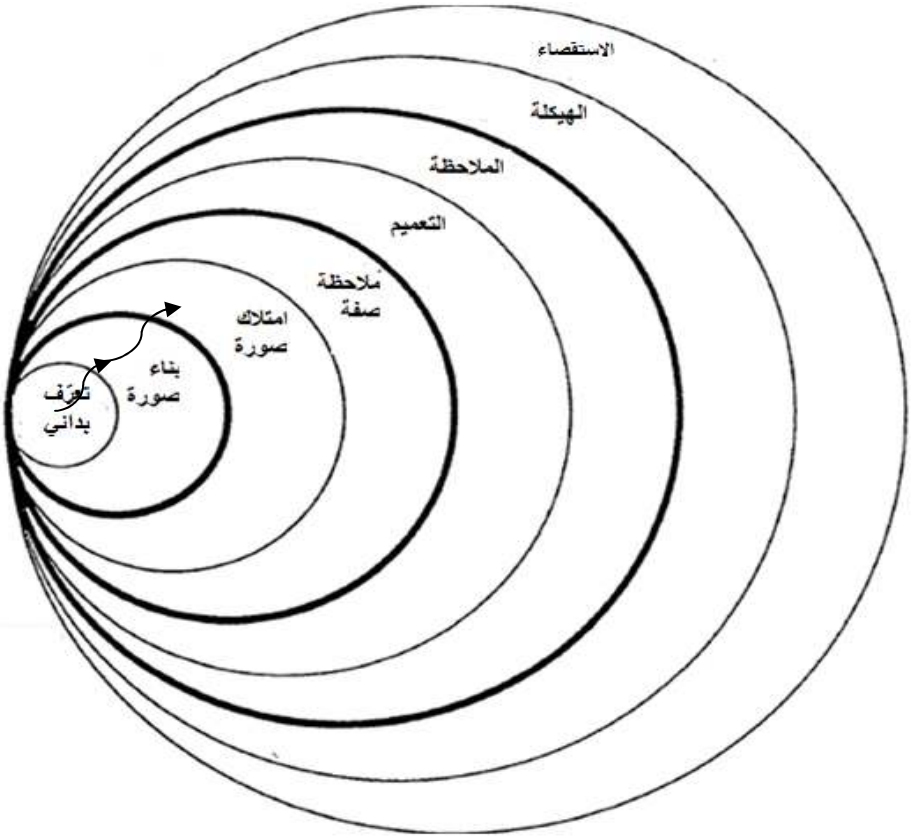
فالطالب امتلك صورة خاصة بالشرط الثاني من شروط التطابق (ض ز ض)، إذ أصبح بإمكانه تمييز هذا الشرط من غيره بمجرد رؤيته للمثلثات المطلوب استكشاف إمكانية تطابقهـــا. انظـــر شكل(17):



شكل (17): مثلثان متطابقان بضلعين وزاوية محصورة بينهما

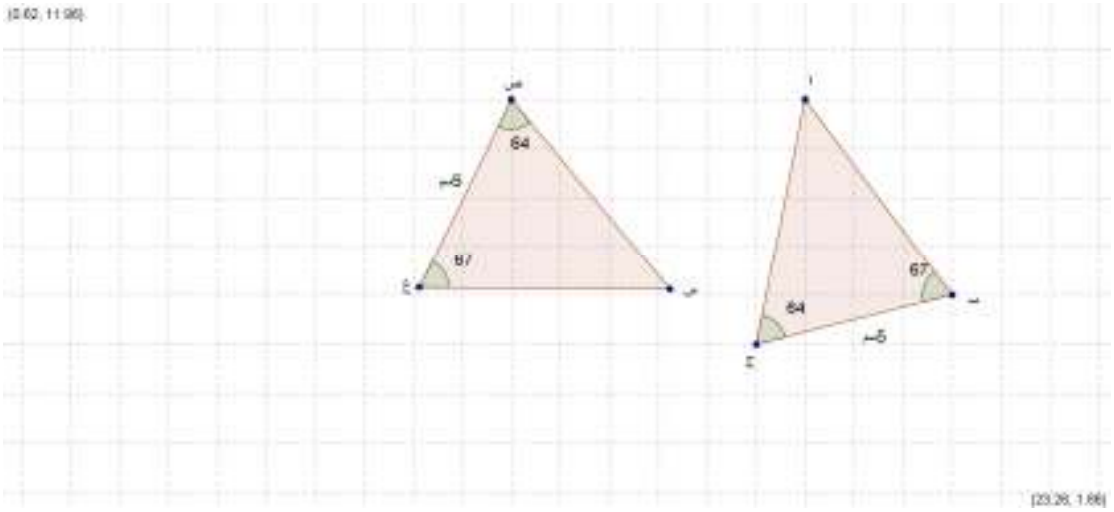
بالنسبة لمجموعتي خالد ونادين فقد مرّتا بنفس مستويات الفهم التي مرّت بها مجموعـــة كريم، ومن الملاحظ أنّ المجموعات الثلاث لم تقم بأي عمليات طي عكسي، وكان انتقالها بـــين مستويات الفهم خطيا، كما قامت المجموعات أثناء تعلُّمها بممارسات تعلُّمية تنوّعت بـــين بنـــاء الأفكار وشرحها والاستفسار عنها.

الرسم التالي يوضح تطور فهم الطلاب في الشرط الثاني للتطابق (ض ز ض):



شكل (18): مخطط تطور فهم مجموعة كريم في شرط التطابق (ض ز ض).

زاويتين وضلع: مرّت مجموعة كريم هنا بمستويات الفهم التالية: التعرّف البدائي والذي تمثّل في معرفة شرطي التطابق السابقين (ض ض ض)(ض ز ض)، يليها مستوى تكوين الصورة؛ إذ استطاع الطلاب تكوين صورة ذهنية خاصة بشرط التطابق هذا من خلال طرح العديد من الأسئلة التي قادت الطلاب في النهاية إلى استنتاج شرط التطابق مثل: انظر الى الضلع أب في المثلث أ ب جـ والضلع س ص في المثلث س ص ع هل هما متساويان؟ انظر كذلك الى الزاويتين في المثلثين هل هما متساويتان؟ حرّك المثلث الاول وطبقه على المثلث الثاني هل تطابق المثلثان؟ تلاه مستوى امتلاك الصورة، إذ امتلك الطلاب الصورة الخاصة بهذا الشرط، ثم مرّوا بمستويي ملاحظة الصفات والتعميم، لكن مرور الطلاب بمستوى ملاحظة الصفات كان ضمنيا بمعنى انه لم يكن هناك حد بين مستويي ملاحظة الصفات والتعميم. اتّضح هذا عندما كلّفت المعلمة الطلاب بحل مثال المطلوب فيه إيجاد المثلثين المتطابقين من بين مجموعة من المثلثات، وفعلا تمكن الطلاب من تحديد المثلثين المتطابقين بعد تمكُّنهم من تمييزهما من خلال الأضلاع والزوايا المتناظرة المتساوية. انظر شكل (19):

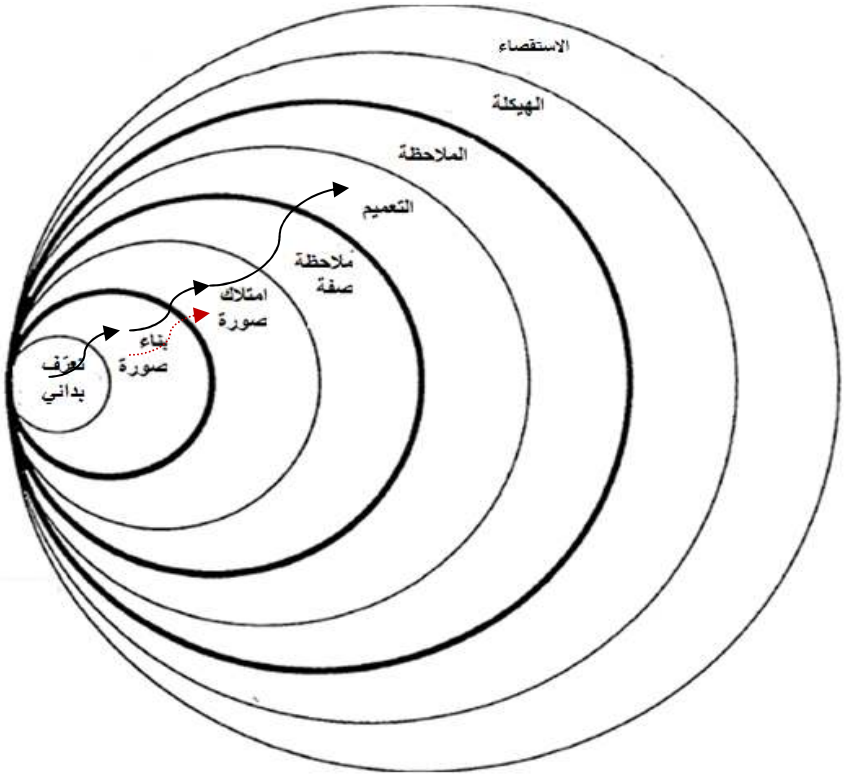


شكل (19): مثلثان متطابقان بزاويتين وضلع.

بالنسبة للمجموعتين الأخريين، فمجموعة نادين تشبه مجموعة كريم؛ إذ مـــرّت بـــنفس مستويات الفهم التي مرّت بها مجموعة كريم، تشابهتا أيضا في عدم حدوث عمليات طي عكسي مع أي منهما، إلّا أنّ الاختلاف كان في مرور مجموعة نادين بمستوى ملاحظة الصفات فهو لم يكن ضمنيا كما هو الحال في مجموعة كريم وإنما كان ظاهرا، فقد حاولت الطالبات البحث عن مثلثين متطابقين من خلال ملاحظة صفات تجمع بينهما من بين عدد من المثلثات المرسومة.

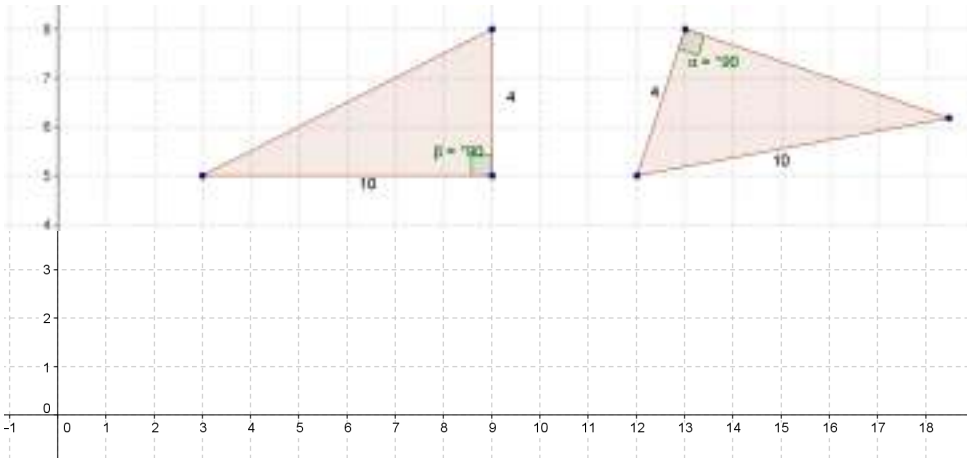
لكن مجموعة خالد اختلفت قليلا عن مجموعتي كريم ونادين؛ إذ أنها مرّت بمســـتويات: التعرّف البدائي وتكوين الصورة وامتلاكها وملاحظة الصفات، ثم قامت بعملية طـــي عكســـي لمستوى امتلاك الصورة ثم انتقلت إلى مستوى التعميم؛ قامت بطي عكسي لأنها حاولت البحـــث عن صفات بين المثلثين المتطابقين المطلوب إيجادهما، إلّا أنها فشلت في ذلك فعادت لمســـتوى امتلاك الصورة لتتذكر الصورة الصحيحة التي يبدو عليها شرط التطابق هذا.

الرسم التالي يوضح تطور فهم الطلاب في الشرط الثالث للتطابق (ض ز ز):



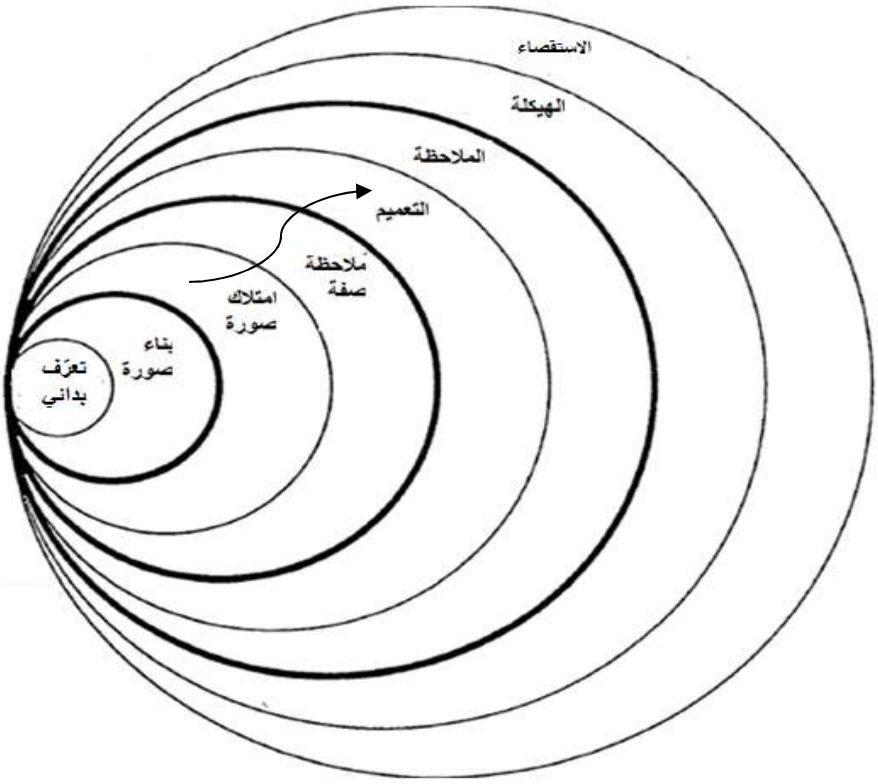
شكل (20): مخطط تطور فهم مجموعة كريم في شرط التطابق (ض ز ز)

(ضلع ووتر في مثلث قائم الزاوية): مرّت المجموعات الثلاث بمستوى امتلاك الصورة ومنها انتقلت إلى مستوى التعميم، إلّا أنّ مرورها بمستوى ملاحظة الصفات كان ضمنيا، وبالتالي تظهر هنا خاصية لا حاجة إلى حدود بين مستويي ملاحظة الصفات والتعميم. كما أنّ المجموعات لم تقم بعمليات طي عكسي، وتنوعت الممارسات التعلّمية التي قاموا بها أثناء تعلم هذا الشرط مثل تقديم الأفكار وبنائها وشرحها. انظر شكل (21):



شكل(21): مثلثان متطابقان بضلع ووتر في مثلث قائم الزاوية

الرسم التالي يوضح تطور فهم الطلاب في شرط التطابق (ضلع ووتر في مثلث قائم):



شكل (22): مخطط تطور فهم المجموعات في شرط التطابق(ضلع ووتر في مثلث قائم).

الموضوع الثاني: المثلث متساوي الساقين

يتكون هذا الموضوع من مجموعة من النظريات الخاصة بالمثلث متساوي الساقين، وطريقة إثبات كل نظرية باستخدام ما سبق تعلمه من شروط تطابق المثلثات.

وفيما يلي عرض لمستويات الفهم التي مرت بها مجموعة كريم أثناء تعلمها لإحدى هذه النظريات باستخدام جيوجبرا والتي تنص على أنّ العمود النازل من رأس المثلث متساوي الساقين على القاعدة ينصف زاوية الرأس:

التعرُّف البدائي

من الضروري في هذا المستوى أن تحتوي معرفة الطلاب البدائية على أنواع المثلث حسب أطوال أضلاعه(مختلف الأضلاع، متساوي الساقين، متساوي الأضلاع)، وخصائص

المثلث المتساوي الساقين بالتحديد، إضافة إلى شروط تطابق المثلثـــات ((ض ض ض)، (ض ز ض)، (ض ز ز)، (قائمة ووتر واحد ضلعي القائمة)). وقد اتضح للمعلمة أنّ الطلاب امتلكـــوا المعرفة التي ستمكنهم من تعلم النظرية السابقة الخاصة بالمثلث المتساوي الساقين.الحوار التالي يوضح ذلك:

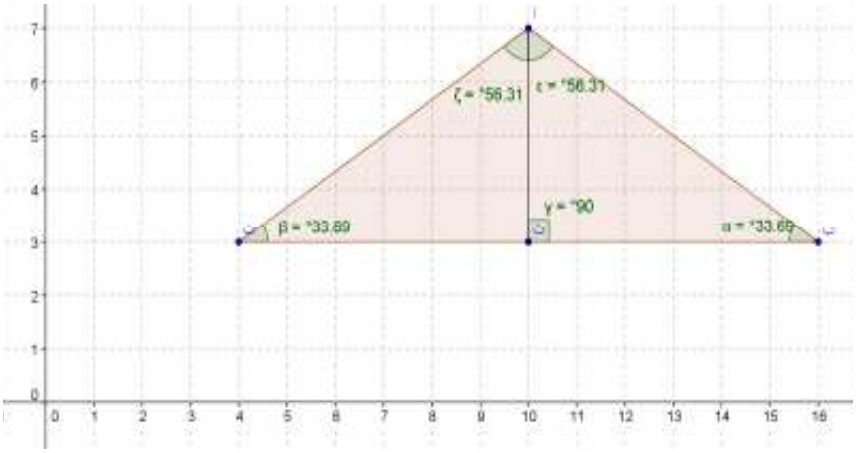
المعلمة: شو رأيكم يا طلاب نراجع مع بعض شروط التطابق اللي اخدناها..	1
كريم: آه.. أول شرط هو ثلاث أضلاع والتاني ضلعين وزاوية محصورة	2
عمر يقاطع كريم: وكمان زاويتين وضلع	3
يوسف: وآخر شي وتر وقائمة واحد ضلعي القائمة	4
المعلمة: ممتازين	5

تكوين الصورة: في هذا المستوى بدأ الطالب بتكوين معرفة جديدة خاصـــة بالنظريـــة الســـابقة اعتمادا على ما امتلكه من معرفة بدائية، وحتى يكوِّن الطالب هذه المعرفة الجديدة قام بعدة أفعال منها:

تصريح القصد: حيث صرّحت المعلمة بالمعرفة التي سيتعلمها الطلاب في الدرس والمتمثلة في نظرية تنصيف زاوية الرأس (سطر6). الحوار التالي يبين ذلك:

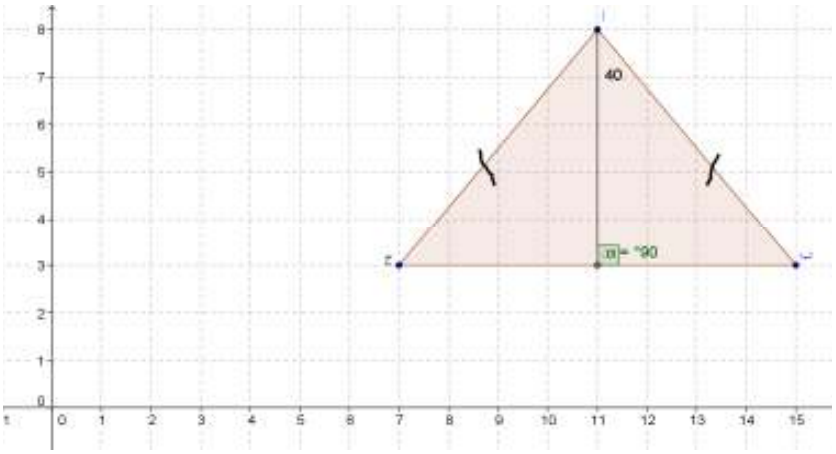
المعلمة: درسنا اليوم عن إحدى نظريات المثلث المتساوي الساقين واللي بتحكي إنو العمود النازل من رأس المثلث المتساوي الساقين على القاعدة ينصف زاوية الرأس.	6
عمر: شكلها صعبة	7
المعلمة: لأ بالعكس كتير سهلة خاصة إنّا راح نتعلمها على جيوجبرا	8

استخدام التكنولوجيا: استخدمت المعلمة برنامج جيوجبرا في تدريس الطلاب هذه النظرية، فمثلا كلَّفت المعلمة الطلاب بعد إنهائهم تعلم النظرية برسم شكل على جيوجبرا يمثّل النظرية السابقة، فقام الطلاب برسم الشكل التالي (شكل23):



شكل (23): المثلث الذي يمثل النظرية كما رسمه الطلاب

امتلاك الصورة: الطالب في هذا المستوى امتلك صورا ذهنية حول النظرية السابقة الخاصة بالمثلث المتساوي الساقين، حدث هذا عندما قامت المعلمة برسم شكل (24) وكلّفت الطلاب بإيجاد قياس زاوية جـ أ د (استفسار عن أفكار)(سطر9):



شكل (24): المثلث كما رسمته المعلمة على جيوجبرا

اتضح للمعلمة في هذا المثال أنّ الطلاب امتلكوا صورة ذهنية لنظرية تنصيف زاوية الرأس، وهذا ما نلاحظه عندما ذكر يوسف انه معطى نصف زاوية الرأس (بناء أفكار) (سطر10)، وبرهن كريم صدق ما قاله يوسف حيث ذكر كريم أنّ بإمكانهم تطبيق النظرية لان شروط تطبيقها متوافرة وهي أنّ المثلث متساوي الساقين وهناك أيضا العمود أ د الذي نصّف زاوية الرأس (التحقق من صحة أفكار)(سطر11)، ومنه اوجد عمر قياس الزاوية المطلوبة فكانت 40 درجة (بناء أفكار)(سطر12). الحوار التالي يوضح ذلك:

المعلمة: شوفوا يا طلاب هدا المثلث وبدي منكم تطلعوا قياس زاوية جـــ أ د	9
يوسف يؤشر على زاوية أ: هاي زاوية الرأس ومعطينا نصها	10
كريم: آه والدليل انه المثلث متساوي الساقين أول أشي وكمان عنا عمود هيو	11
عمر: مباشرة بنطبق النظرية وبنحكي انو زاوية جـــ أ د بتساوي 40 درجة	12
كريم: يعني زاوية أ كلها بتطلع 80.	13

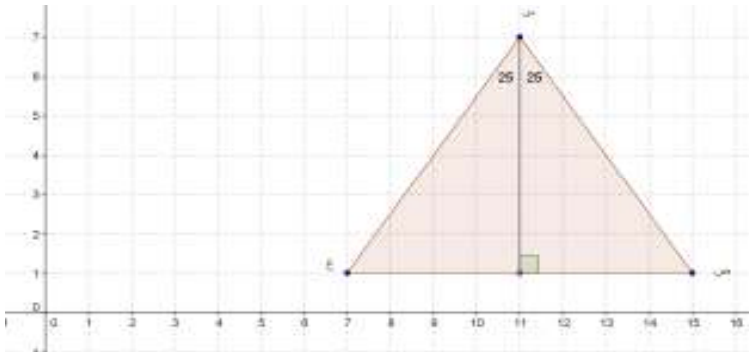
ملاحظة الصفات: الطالب هنا انتقل من مستوى امتلاكه صوراً ذهنية حول نظرية تنصيف زاوية الرأس إلى مستوى أكثر تقدما وهو الجمع بين هذه الصور لتكوين صفات رياضية جديدة تتعلق بهذه النظرية.

بالعودة إلى المثال السابق في مستوى امتلاك الصورة (شكل 24)، بعد إنهاء الطـــلاب حل المثال لاحظ كريم أمرا وأراد التحقق مما لاحظه فوجّه للمعلمة سؤالاً وهو إذا كـــان الخـــط الذي ينصف زاوية الرأس عموديا على القاعدة فهل المثلث يكون متساوي الساقين؟ (استفســـار عن أفكار) (سطر14)، هنا اعتقد كريم انه إذا تم عكس النظرية فستبقى صحيحة، وقـــد أكّـــدت المعلمة ما لاحظه كريم وذكرت أنّ ما قاله يقود إلى نتيجة مهمة تنبثق عن النظرية وهي إذا كان منصف زاوية الرأس في مثلث عموديا على القاعدة فـــإن المثلـــث متســـاوي الســـاقين (بنـــاء أفكار)(سطر17). الحوار التالي يبين ذلك:

كريم: لو عكسنا النظرية بتظل صحيحة؟	14
المعلمة: كيف يعني مش فاهمة عليك!	15
كريم: يعني لو كان الخط اللي بنصف زاوية الرأس عمود على القاعـــدة... هـــل المثلث بكون متساوي الساقين؟	16
المعلمة: شكرا إلك يا كريم انت ممتاز.. انت بتقودنا لنتيجة مهمة.. فعلا لما يكون منصف زاوية الرأس في مثلث عموديا على القاعدة فإن المثلث متساوي الساقين.	17

التعميم: يستطيع الطالب هنا أن يعمم ما تعلمه من صفات وخصائص تتعلق بنظريـــة تنصـــيف زاوية الرأس في مواقف مشابهة.

حدث هذا عندما أعطت المعلمة الطلاب مثالا خارجيا كتطبيق على النتيجة السابقة التي توصل الطلاب لها، وكلفتهم بمعرفة نوع المثلث المرسوم (استفسار عن أفكار)(سطر18)، كما في الشكل (25) التالي:

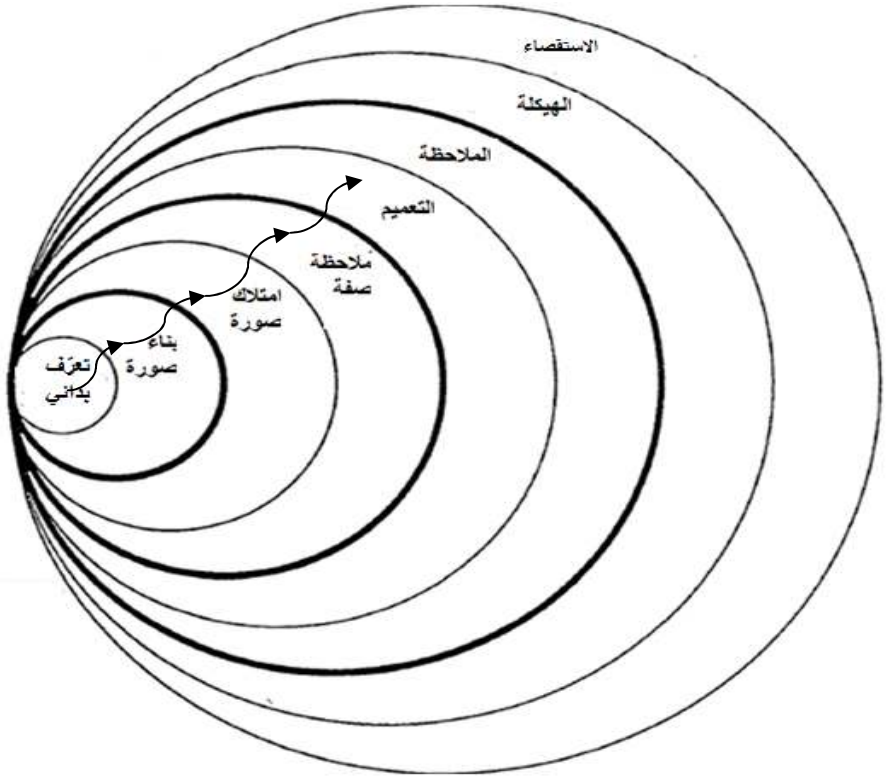


شكل (25): المثلث كما رسمه الطلاب على جيوجبرا

قام الطلاب بداية برسم المثلث على جيوجبرا، ثم حاول الطلاب تعميم النتيجة السابقة وذلك بفحص مدى توافر شروطها في هذا المثال، فذكر عمر أنّ س ل عمود (بناء أفكار) ودليل ذلك وجود إشارة التعامد (التحقق من صحة أفكار)(سطر24)، أيضا ذكر يوسف أنّ زاوية الرأس نُصِّفت من قبل هذا العمود (بناء أفكار)(سطر20)، وتابع كريم بقوله أن شروط النتيجة قد توافرت إذا المثلث يكون متساوي الساقين (سطر22). الحوار التالي يبين ذلك:

المعلمة: ارسمولي المثلث هدا على جيوجبرا وشوفولي شو نوع المثلث؟	18
الطلاب يرسمون المثلث على جيوجبرا	19
عمر: أول شي هادا الخط عمود لأنو حاطلنا إشارة انو عمود	20
يوسف: مزبوط وزاوية الرأس منصفة لأنو هادا العمود نصفها يعني...	21
كريم يقاطع يوسف: يعني حسب النتيجة بطلع المثلث متساوي الساقين س ص= س ع	22

الرسم التالي هو تخطيط لتطور فهم الطلاب في نظرية تنصيف زاوية الرأس:



شكل (26): مخطط يوضح تطور فهم الطلاب في النظرية الخاصة بالمثلث متساوي الساقين

الجدول التالي يبين تطور فهم مجموعة كريم في النظرية الخاصة بالمثلث متساوي الساقين:

جدول(5): تطور فهم مجموعة كريم في موضوع النظرية الخاصة بالمثلث متساوي الساقين

التطور	مثال
تعرّف بدائي	**تعرّف بدائي لشروط التطابق التي سبق تعلّمها** المعلمة: شو رأيكم نراجع مع بعض شروط التطابق اللي اخدناها؟ كريم: اه.. أول شرط هو ثلاث اضلاع والثاني ضلعين وزاوية محصورة عمر يقاطع كريم: وكمان زاويتين وضلع يوسف: وآخر شي وتر وقائمة وأحد ضلعي القائمة
تكوين صورة	**تكوين صورة للنظرية الخاصة بالمثلث متساوي الساقين** المعلمة: درسنا اليوم عن احدى نظريات المثلث المتساوي الساقين واللي بتحكي انه العمود النازل من رأس المثلث المتساوي الساقين على القاعدة ينصف زاوية الرأس. (تصريح قصد)
امتلاك الصورة	**امتلاك الطلاب صورة ذهنية خاصة بالمثلث متساوي الساقين** المعلمة: شوفوا هذا المثلث وبدي منكم تطلعوا قياس زاوية جـ أ د يوسف يؤشر على زاوية أ: هاي زاوية الرأس ومعطينا نصها كريم: اه والدليل انه المثلث متساوي الساقين وكمان عنا عمود هيو عمر: مباشرة بنطبق النظرية وبنحكي انه زاوية جـ أ د بتساوي 40 كريم: يعني زاوية أ كلها بتساوي 80
ملاحظة الصفات	**ملاحظة الطلاب أن عكس النظرية صحيح** كريم: مس.. لو عكسنا النظرية بتظل صحيحة؟ المعلمة: كيف يعني مش فاهمة عليك؟ كريم: يعني لو كان الخط اللي بنصف زاوية الرأس عمود على القاعدة هل المثلث بكون متساوي الساقين؟ المعلمة: شكرا لك يا كريم انت بتقودنا لنتيجة مهمة.. فعلا لما يكون منصف زاوية الرأس في مثلث عموديا على القاعدة فإن المثلث متساوي الساقين.
التعميم	**تعميم النظرية الخاصة بالمثلث متساوي الساقين** المعلمة: ارسموا هذا المثلث على جيوجبرا.. شو نوع المثلث؟ عمر: أول شي هذا الخط عمود لأنه حاطلنا إشارة انه عمود يوسف: مزبوط وزاوية الرأس منصفة لأنه هذا العمود نصّفها يعني.. كريم يقاطع يوسف: يعني حسب النتيجة بطلع المثلث متساوي الساقين س ص = س ع

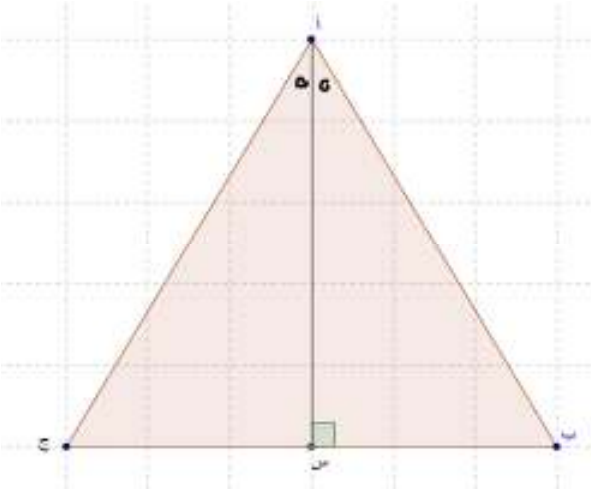
مستويات الفهم التي ذكرت سابقا مرّت بها مجموعة كريم، أما مجموعتي خالد ونـــادين فقد مرّتا بنفس المستويات التي مرّت بها مجموعة كريم، ابتداء بالتعرّف البدائي وحتى التعميم، كما أنّ المجموعات الثلاث لم تقم بعمليات طي عكسي لمستويات سابقة من الفهم، ولـــم تظهـــر خاصية لا حاجة إلى حدود، فقد كان انتقالهم من مستوى إلى الذي يليه ظاهرا، إلا أنّ مجموعتي خالد ونادين اختلفتا عن مجموعة كريم في أنهما احتاجتا إلى تدخل من قبل المعلمة خاصة فـــي مستوى تكوين الصورة.

تطبيقات مباشرة على النظرية الخاصة بالمثلث متساوي الساقين

تمرين: نُصِّفت زاوية الرأس في المثلث أ ب جـــ المجاور فكان المنصف عموديا على القاعدة

أولا: أُبَيِّن أنّ أ ب س، أ جـــ س متطابقان

ثانياً: ما نوع المثلث أ ب جـــ من حيث الأضلاع؟ ولماذا؟



شكل (27): التمرين كما رسمه الطلاب على جيوجبرا

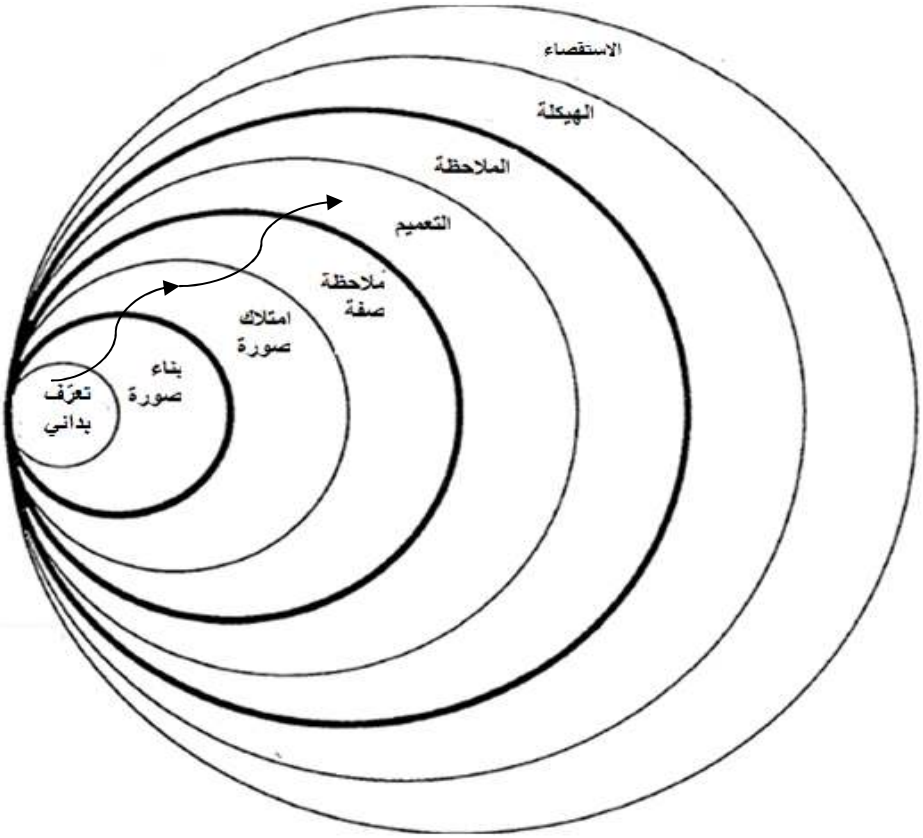
يتضح من خلال حوار الطلاب أثناء حل التمرين أنهم امتلكوا معرفة بدائية تتمثل فـــي معرفة شروط تطابق مثلثين، وامتلكوا صورة ذهنية لكل شرط مـــن هـــذه الشـــروط (امـــتلاك صورة)، الأمر الذي ساعدهم في تعميم هذه الشروط للتوصل إلى الحالـــة الصـــحيحة للتطـــابق (التعميم)، حيث ذكر كريم أنّ زاوية ب أ س تساوي زاوية جـــ أ س (تقديم أفكار)، وعلل ذلـــك

بان زاوية الرأس قد نُصِّفت (شرح أفكار)(سطر26)، وأضاف عمر بأن زاوية ب س أ تساوي زاوية جـ س أ (تقديم أفكار) وعلل ذلك بأن أ س عمود على القاعدة (شرح أفكار)(سطر27)، وأخيرا ذكر يوسف بأن الضلع أ س مشترك (بناء أفكار) وبالتالي ينطبق المثلثان بزاويتين وضلع.

ولإيجاد نوع المثلث أ ب جـ فقد لاحظ كريم أنّ من نواتج التطابق تطابق الضلعين أ ب، أ جـ (ملاحظة صفات) وبالتالي فهما متساويان ومنه فالمثلث أ ب جـ متساوي الساقين (شرح أفكار)(سطر29)، لكن اقترح يوسف طريقة أخرى لمعرفة نوع المثلث وهي الاستفادة من معطيات السؤال حيث أ س منصف لزاوية الرأس وعمود على القاعدة، وبالتالي فالنظرية قد تحققت. إذاً المثلث يكون متساوي الساقين (التعميم)(سطر32). الحوار التالي يبين ذلك:

يرسم الطلاب المثلث أ ب جـ على جيوجبرا	23
عمر: هلأ المثلث متساوي الساقين...	24
يوسف: بس انتبه هو مش حاكيلنا انه متساوي الساقين	25
كريم: خلونا نبحث في شروط التطابق.. زاوية ب أ س= زاوية جـ أ س لأنو حاكي انو زاوية الرأس نصفت	26
عمر: صح وكمان زاوية ب س أ= زاوية جـ س أ قوائم لأنه أ س عمود عالقاعدة	27
يوسف: وكمان أ س مشترك.. يعني بنطبق المثلثين بزاويتين وضلع	28
عمر: طيب هلا بدو نوع المثلث أ ب جـ.. بطلع متساوي الساقين	29
كريم: صح لأنه من التطابق أ ب بنطبق على أ جـ يعني بكونوا متساويين	30
يوسف: أو لأنه منصف زاوية الرأس عمود عالقاعدة إذن مباشرة من النظرية.	31

الرسم التالي هو تخطيط لتطور فهم الطلاب في التمرين السابق:



شكل (28): مخطط يوضح تطور فهم الطلاب في التطبيقات المباشرة للنظريـــة الخاصـــة بالمثلـــث متســـاوي الساقين.

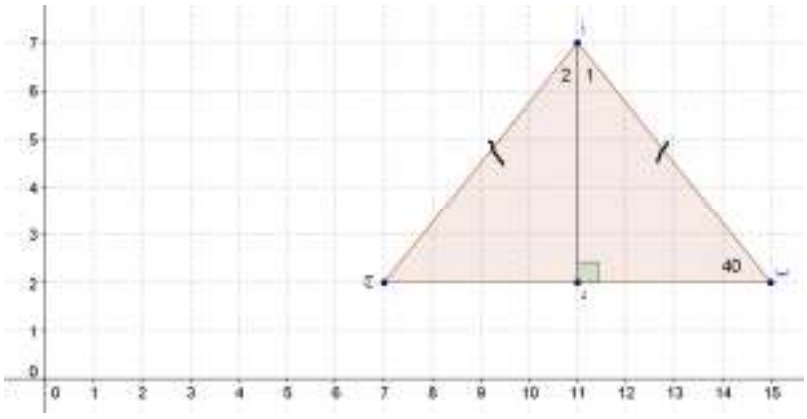
الجدول التالي يبين تطور فهم مجموعة كريم في التطبيقات المباشرة للنظرية الخاصة بالمثلـــث متساوي الساقين:

جدول (6): تطور فهم مجموعة كريم للتطبيقات المباشرة الخاصة بالنظرية الخاصة بالمثلث متساوي الساقين.

التطور	مثال
التعرف البدائي	**معرفة الطلاب شروط تطابق المثلثات التي سبق لهم تعلّمها**
امتلاك الصورة	**امتلاك الطلاب صورة ذهنية لكل شرط من شروط التطابق**
ملاحظة الصفات	**ملاحظة أن الزوايا متساوية بسبب العمود المنصّف** كريم: زاوية ب أ س = زاوية جـ أ س لإنه حاكي إنه زاوية الرأس نصّفت عمر: زاوية ب س أ = زاوية جـ س أ قوائم لإنه أ س عمود عالقاعدة يوسف: أ س كمان مشترك
التعميم	**تعميم أحد شروط التطابق للتوصل الى تساوي الضلعين** يوسف: يعني بنطبق المثلثين بزاويتين وضلع عمر: نوع المثلث أ ب جـ متساوي الساقين كريم: صح لإنه من التطابق أ ب بنطبق على أ جـ يعني بكونو متساويين

تطبيقات غير مباشرة على النظرية الخاصة بالمثلث متساوي الساقين

تمرين: أ ب جـ مثلث متساوي الساقين، أ د عمود على القاعدة ب جـ إذا علمت أنّ قياس زاوية ب يساوي 40 درجة فجد الزوايا المشار إليها بالرموز 1،2 كما في الشكل المجاور.



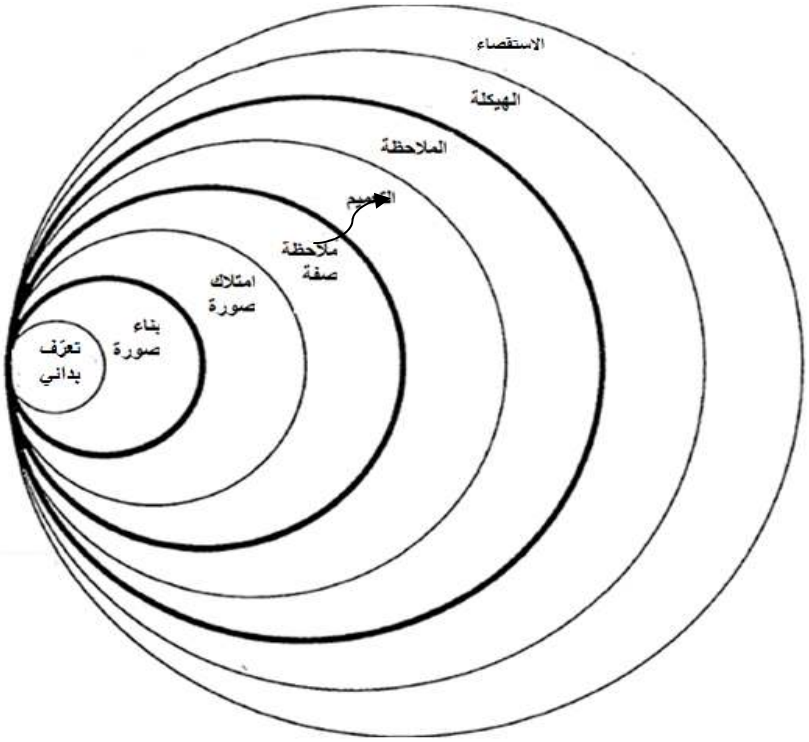
شكل (29): المثلث كما رُسم على جيوجبرا

قام الطلاب بداية برسم المثلث على جيوجبرا، بعد ذلك بدء الطلاب التفكير في حل السؤال، فقرر كريم أولاً أن يجد زاوية جـ كي يتمكن من إيجاد باقي المجاهيل (بناء أفكار)

(سطر34)، فعمّم كريم إحدى النظريات الخاصة بالمثلث المتساوي الساقين هنا ليجد قياس زاوية جـ حيث تساوي 40 درجة لأن زوايا القاعدة متساوية (مرحلة التعميم) (شرح أفكار) (سطر35)، ولإيجاد زاوية 1 لاحظ عمر أنّ بإمكانه الاستفادة من خصائص أي مثلث حيث مجموع زوايا المثلث يساوي 180 درجة فاخذ المثلث أ ب د القائم ومنه زاوية 1 تساوي 50 درجة (الملاحظة)(شرح أفكار)(سطر38)، عندها ذكر يوسف انه يمكن إيجاد زاوية 2 بنفس الطريقة (سطر39)، لكن كريم قدم طريقة أفضل لإيجاد زاوية 2 وهي تعميم نظرية تنصيف زاوية الرأس فبما أنّ المثلث متساوي الساقين، و أد عمود على القاعدة إذاً فزاوية 2 تساوي زاوية 1، ومنه زاوية 2 تساوي 50 درجة (شرح أفكار)(سطر40). الحوار التالي يوضح ذلك:

المعلمة: حلوا السؤال التالي بعد ما ترسموه على جيوجبرا.	32
الطلاب يرسمون الشكل على جيوجبرا.	33
كريم: طالب نوجد الزوايا 1،2.	34
كريم: هلأ المثلث متساوي الساقين يعني زاوية جـ =40 زوايا القاعدة متساوية	35
يوسف: هو ما بدو زاوية جـ	36
كريم: يا زلمة بعرف بس خلينا نفك السؤال شوي شوي.	37
عمر: لو اخذنا المثلث ا ب د القائم... مجموع زوايا المثلث 180 درجة هلأ 90 + 40=130، 180−130 = 50 بضل لزاوية 1	38
يوسف: والله فكرة.. صح وبنفس الطريقة بنطلع زاوية 2 وبتطلع 50 درجة	39
كريم: أو من النظرية.. ا د عمود عالقاعدة والمثلث متساوي الساقين إذاً أ د بنصف الزاوية أ وبما انه زاوية 1 طلعت 50 إذاً مباشرة زاوية 2 بتطلع 50	40

الرسم التالي هو تخطيط لتطور فهم الطلاب في التمرين السابق:



شكل (30): مخطط يوضح تطور فهم الطلاب في التطبيقات غير المباشرة للنظرية الخاصة بالمثلث متساوي الساقين.

الجدول التالي يوضح تطور فهم مجموعة كريم في التطبيقات غير المباشرة للنظرية الخاصة بالمثلث متساوي الساقين:

جدول(7): تطور فهم مجموعة كريم في التطبيقات غير المباشرة للنظرية الخاصة بالمثلث متساوي الساقين

التطور	مثال
التعميم	**تعميم أحد النظريات الخاصة بالمثلث متساوي الساقين** كريم: طالب منا نوجد الزوايا 1، 2 كريم: المثلث متساوي الساقين يعني زاوية جـ = 40 لأنه في المثلث المتساوي الساقين زوايا القاعدة متساوية
الملاحظة	**ملاحظة أن مجموع زوايا المثلث يساوي 180 لحل السؤال** عمر: لو اخذنا المثلث أ ب د القائم.. مجموع زوايا المثلث 180 هلأ 90 + 40 = 130، 180 – 130 = 50 بضل لزاوية 1 يوسف: وبنفس الطريقة بنطلع زاوية 2 بتطلع 50 درجة

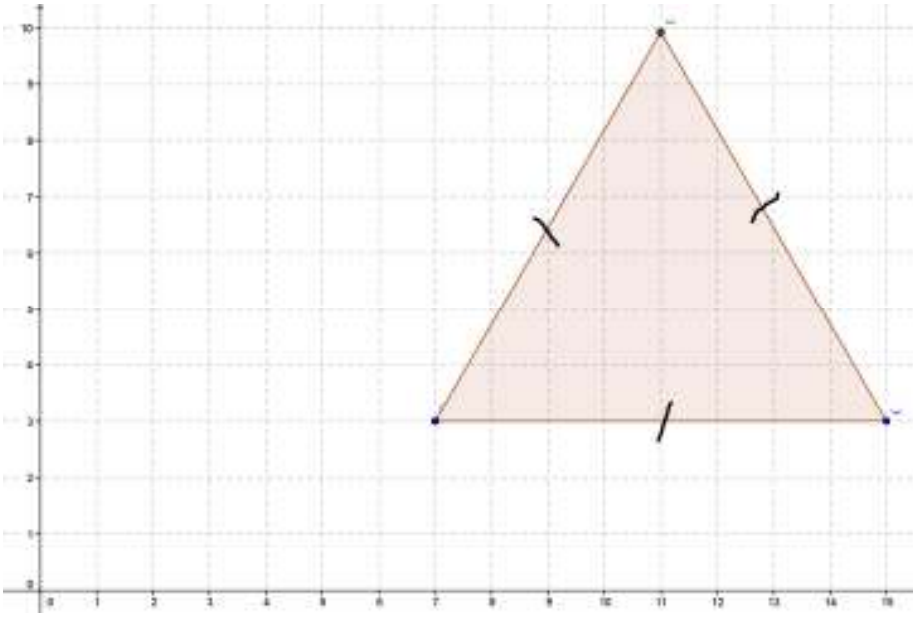
الموضوع الثالث: المثلث متساوي الأضلاع

احتوى هذا الموضوع على مفهوم محور التماثل حيث تم التوصل إليه عن طريق مجموعة من الأسئلة التي تدور حول مثلث متساوي الأضلاع تم رسمه، وعدد محاور التماثل في ذلك المثلث، احتوى أيضا على إحدى النظريات المتعلقة بالمثلث القائم الزاوية باعتبار أنّ المثلث القائم الزاوية هو نصف مثلث متساوي الأضلاع، والتي تنص على أنّ الضلع الذي يقابل زاوية 30 في مثلث قائم الزاوية يساوي نصف الوتر.

وفيما يلي عرض لمستويات الفهم التي مرت بها مجموعة كريم أثناء تعلمها لهذه النظرية باستخدام جيوجبرا:

التعرُّف البدائي

في هذا المستوى كان مهما بالنسبة للمعلمة أن تحتوي معرفة الطلاب البدائية على مفهوم المثلث المتساوي الأضلاع، فطلبت منهم بداية أن يرسموا مثلثاً متساوي الأضلاع (سطر1) فقام يوسف برسم المثلث شكل(31):



شكل (31): المثلث متساوي الأضلاع كما رسمه يوسف

بعد ذلك أرادت المعلمة أن تختبر مدى امتلاك الطلاب للمعرفة المتعلقة بهذا النوع من المثلثات، فسألتهم عن تعريف المثلث المتساوي الأضلاع (استفسار عن أفكار)(سطر3). فاتضح لها أنّ الطلاب امتلكوا فعلا معرفة خاصة بهذا المثلث حيث عرّفه عمر على انه مثلث جميع أضلاعه متساوية (تقديم أفكار)(سطر4)، ذكر كريم كذلك تعريفاً آخر له حيث عرفه على انه مضلع منتظم يتكون من ثلاثة أضلاع (تقديم أفكار)(سطر5)، وقدّم يوسف معلومة أخرى وهو أنّ قياس كل زاوية في هذا المثلث يساوي 60 درجة (تقديم أفكار)(سطر6).الحوار التالي يوضح ذلك:

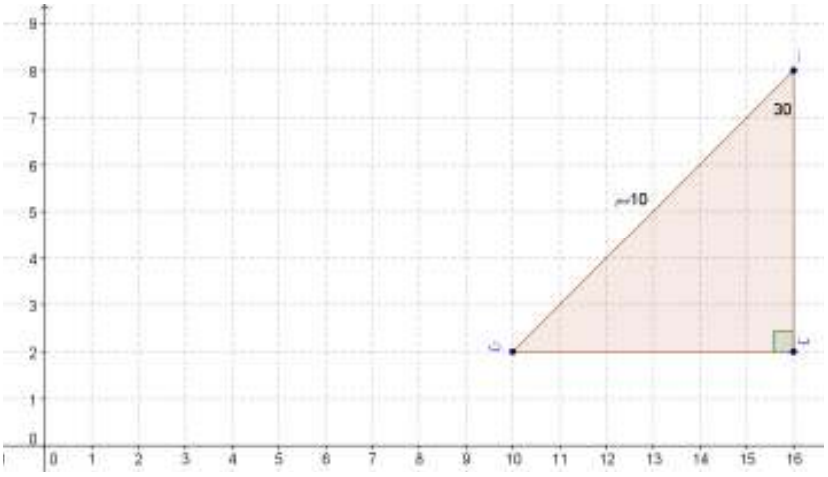
المعلمة: اليوم درسنا عن المثلث المتساوي الأضلاع، شو رأيكم ترسموه...	1
يرسم يوسف المثلث على جيوجبرا	2
المعلمة: طيب مين يحكيلي شو تعريف المثلث المتساوي الأضلاع؟	3
عمر: هو مثلث جميع أضلاعه متساوية	4
كريم: أو.. مس ممكن نْعَرفوا انو مضلع منتظم يتكون من ثلاث أضلاع	5
يوسف: مس.. كمان كل زاوية فيه قياسها 60 درجة	6
المعلمة: ممتازين	7

تكوين الصورة: بدأ الطلاب في هذا المستوى بتكوين معرفة خاصة بالنظرية السابقة المتعلقة بالمثلث القائم الزاوية، وهناك عدة أفعال ساعدت الطلاب على تكوين هذه المعرفة منها:

تصريح القصد: هذا يعني أنّ المعلمة صرحت بالمعرفة الذي تريد تقديمها للطلاب، حدث هذا عندما ذكرت المعلمة للطلاب أنها تريد شرح موضوع محاور التماثل في المثلث المتساوي الأضلاع كتمهيد يمكن من خلاله التوصل إلى النظرية(تقديم أفكار)(سطر8):

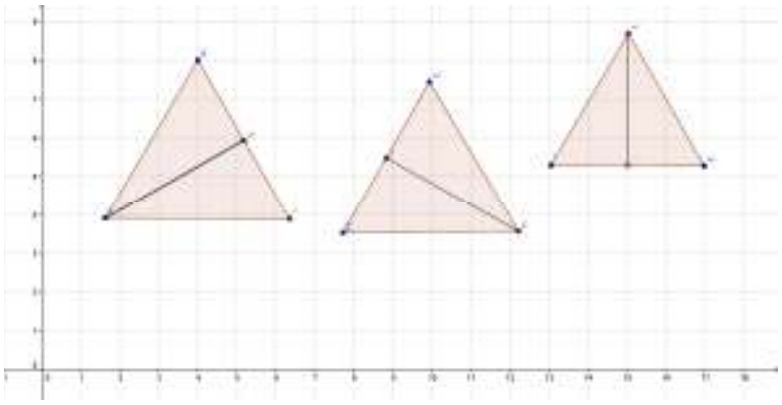
المعلمة: طيب يا ولاد بعد ما عرّفتوا المثلث المتساوي الأضلاع... هلأ بدنا نوخذ عن محاور التماثل في المثلث المتساوي الأضلاع لأنو من خلالها رح نتوصل للنظرية.	8

استخدام التكنولوجيا: استخدمت المعلمة جيوجبرا في تدريس الطلاب النظرية الخاصة بالمثلث قائم الزاوية، وهذه إحدى رسوم الطلاب على جيوجبرا شكل(32):



شكل (32): رسمة أحد تمارين الدرس كما رسمها الطلاب

طرح الأسئلة: كانت هذه الأسئلة من جهة واحدة وهي أسئلة المعلمة للطلاب لتساعدهم في تكوين المعرفة الخاصة بمحاور التماثل، حدث هذا عندما سألت المعلمة الطلاب عن المقصود بمحور التماثل (استفسار عن أفكار)(سطر9)، فهز الطلاب رؤوسهم لعدم معرفتهم الإجابة (سطر10)، فوضحت المعلمة معنى محور التماثل (شرح أفكار)(سطر11)، وحتى تتأكد من وصول المفهوم إلى أذهان الطلاب طلبت منهم رسم أشكال محور التماثل في المثلث المتساوي الأضلاع (التحقق من صحة أفكار)(سطر12) فكانت رسوم الطلاب كما في شكل(33):

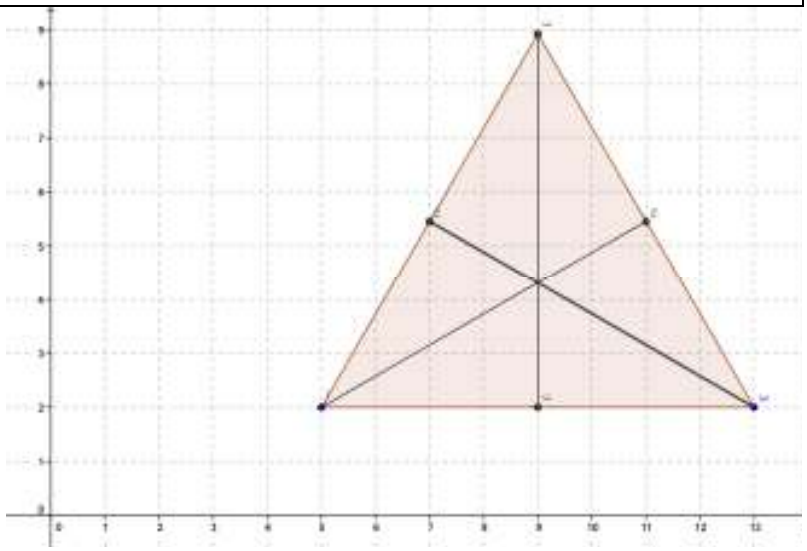


شكل (33): أشكال محور التماثل كما رسمها الطلاب

بعدما رسم الطلاب أشكال محاور التماثل سألتهم عن إمكانية رسم المحاور الثلاثة على مثلث واحد (سطر14)، فحاول الطلاب ذلك وبالفعل تمكنوا من رسم المحاور الثلاثة على نفس

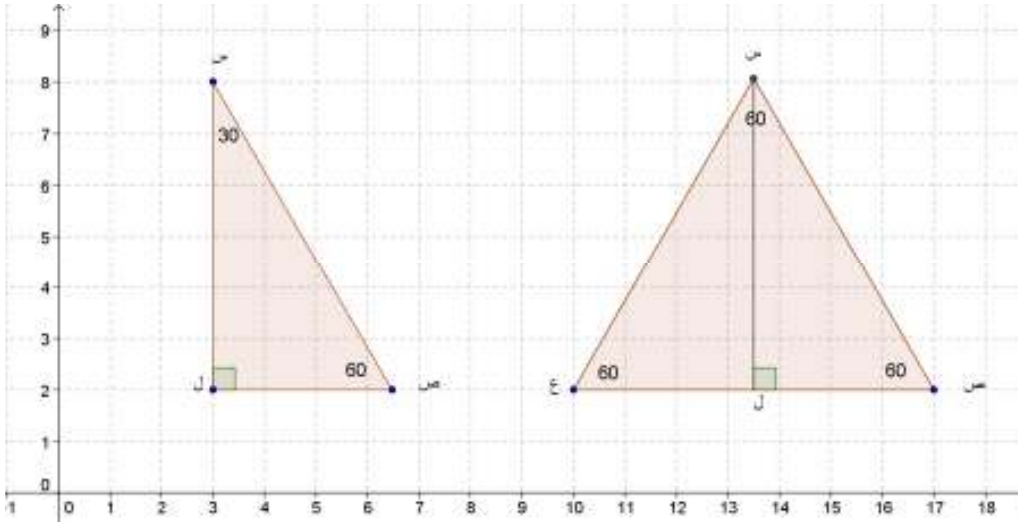
المثلث، وبذلك توصلوا إلى أنّ عدد محاور التماثل في المثلث المتساوي الأضلاع يساوي ثلاثة محاور(تقديم أفكار)(سطر15) شكل (34)، الحوار التالي يوضح ذلك.

المعلمة: سمعتوا عن محور التماثل؟ شو تعريفه؟	9
يهز الطلاب رؤوسهم مشيرين إلى عدم معرفتهم	10
المعلمة: طيب.. محور التماثل هو خط مستقيم يقسم الشكل إلى قسمين متطابقين	11
المعلمة: بناء على التعريف شو رأيكم تحاولوا ترسموا محاور التماثل للمثلث المتساوي الأضلاع على جيوجبرا..	12
يرسم كل طالب شكلا لمحور التماثل	13
المعلمة: رسمكم صح بس ممكن نرسم التلات محاور عنفس المثلث ولا لأ؟	14
كريم: بنجرب.. اه زبط .. يعني له 3 محاور تماثل.	15



شكل (34): محاور تماثل المثلث متساوي الأضلاع كما رسمها الطلاب

امتلاك الصورة: الطلاب هنا امتلكوا صورة ذهنية لمحاور التماثل في المثلث متساوي الأضلاع، يتضح ذلك عندما كلفت المعلمة الطلاب برسم محور التماثل الرأسي في المثلث متساوي الأضلاع، ورسم المثلثين الناتجين من رسم محور التماثل هذا، وبالفعل رسم الطلاب ما كلفتهم به المعلمة والشكل التالي يوضح رسم الطلاب على جيوجبرا:



شكل (35): رسم الطلاب على جيوجبرا

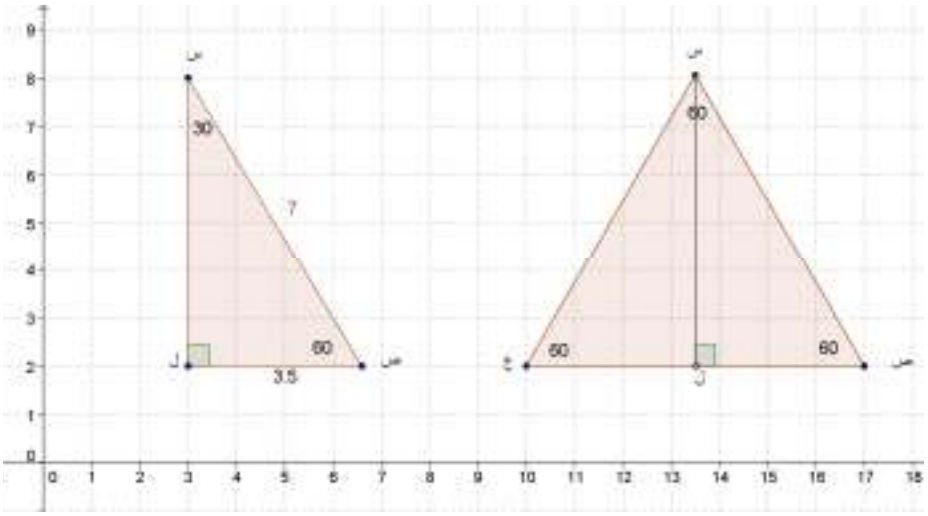
من الرسم يتبين أنّ الطلاب رسموا محور التماثل الراسي س ل بشكل صحيح؛ وذلك لأنهم امتلكوا صورة لهذا المحور وامتلكوا أيضاً صورة ذهنية لما ينتج عن رسم محور التماثل، فهو يقسم المثلث إلى مثلثين متطابقين، فقام الطلاب برسم احد هذين المثلثين س ص ل والذي يمثل أيضاً نصف المثلث متساوي الأضلاع س ص ع. الحوار التالي يوضح ما سبق:

المعلمة: مطلوب منكم هلا ترسمولي محور التماثل الرأسي في المثلث المتساوي الأضلاع وترسموا كمان ع جنب احد المثلثين اللي بنتجوا من محور التماثل.	16
الطلاب يرسمون المطلوب على جيوجبرا	17
يوسف: مس.. مزبوط الرسم هيك؟	18
المعلمة: آه.. شطورين.	19

ملاحظة الصفات: الطالب هنا يستطيع أن يجمع بين مجموعة من الصور الذهنية التي امتلكها سابقا ليكوّن صفاتا رياضية جديدة خاصة بالنظرية المتعلقة بالمثلث قائم الزاوية.

فعند العودة إلى المستوى السابق (امتلاك الصورة)، وبالتحديد للرسم الذي رسمه الطلاب على جيوجبرا، عندها وجّهت المعلمة سؤالا للطلاب وهو ما يلاحظونه على محور التماثل س ل (استفسار عن أفكار) (سطر20)، هنا الطلاب لاحظوا مجموعة من الصفات الخاصة بمحور التماثل فذكر عمر انه عمودي على القاعدة (بناء أفكار)(سطر21)، وذكر كريم انه نصّف زاوية

الرأس فأصبح مقدار زاويتي الرأس 30 لكل منهما (بناء أفكار)(سطر22)، وحتى يتوصل الطلاب إلى النظرية كلفتهم المعلمة بإيجاد أطوال كل من الوتر س ص والقاعدة ص ل (سطر25) فقام كريم بإيجادهما فكان طول الوتر 7 سم والقاعدة 3.5 سم (بناء أفكار) (سطر26)، كما في الشكل (36):



شكل (36): الرسمة بعد إيجاد أطوال الوتر والقاعدة في المثلث القائم

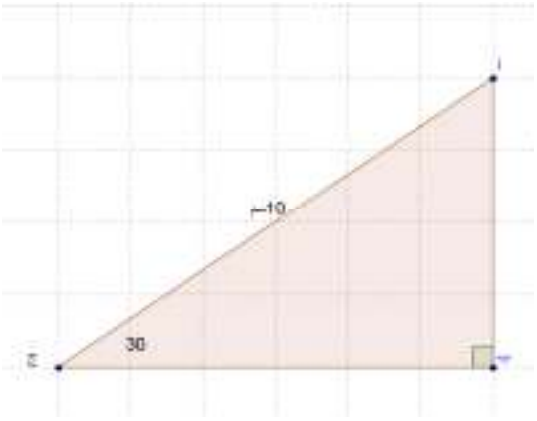
عندها سألت المعلمة عن الزاوية التي يقابلها الضلع 3.5 (استفسار عن أفكار)(سطر27)، فأجاب يوسف أنها الزاوية 30 درجة (بناء أفكار)، عندها كلفت المعلمة الطلاب باستنتاج النظرية (استفسار عن أفكار)(سطر29)، وبالفعل استطاع عمر التوصل إلى النظرية إذ أنّ الضلع الذي يقابل الزاوية 30 يساوي نصف الوتر(سطر30)، لكن كريم كان أكثر دقة فلفت انتباههم إلى أنّ هذه النظرية خاصة بالمثلث القائم الزاوية التي زواياه 30، 60، 90 (إعادة تنظيم أفكار) (سطر31). الحوار التالي يبين ذلك:

المعلمة: طيب يا طلاب بعد ما رسمتوا.. شو بتلاحظوا على محور التماثل س ل؟	20
عمر: عمودي عالقاعدة	21
كريم: وكمان.. مس.. نصّف زاوية الرأس يعني صاروا 30، 30	22
المعلمة: ممتازين	23
يوسف: يعني.. مس.. المثلث اللي رسمناه عجنب هو مثلث قائم الزاوية اللي فوق قياسها 30 والزاوية اللي تحت قياسها 60	24

25	المعلمة: رائع. طيب بدي منكم على جيوجبرا تقيسولي طول الوتر س ص وكمان القاعدة ص ل في المثلث القائم.
26	كريم: الوتر بطلع 7 سم والقاعدة س ل 3.5 سم
27	المعلمة: طيب ال3.5 بقابل أي زاوية.
28	يوسف: الزاوية 30 درجة
29	المعلمة: طيب استنتجولي النظرية من كل اللي عملناه وحكيناه
30	عمر: الضلع اللي بقابل الزاوية 30 يساوي نصف الوتر
31	كريم: بس مش في أي مثلث في المثلث القائم اللي زواياه 30، 60،90

التعميم: الطالب في هذا المستوى يستطيع تعميم ما لاحظه من صفات خاصة بالنظرية السابقة في مواقف مشابهة لتلك التي مرّ بها.

حدث هذا عندما أراد الطلاب حل احد الأمثلة الخارجية التي كلّفتهم المعلمة بحلها، حيث رسم عمر السؤال على جيوجبرا شكل(37):

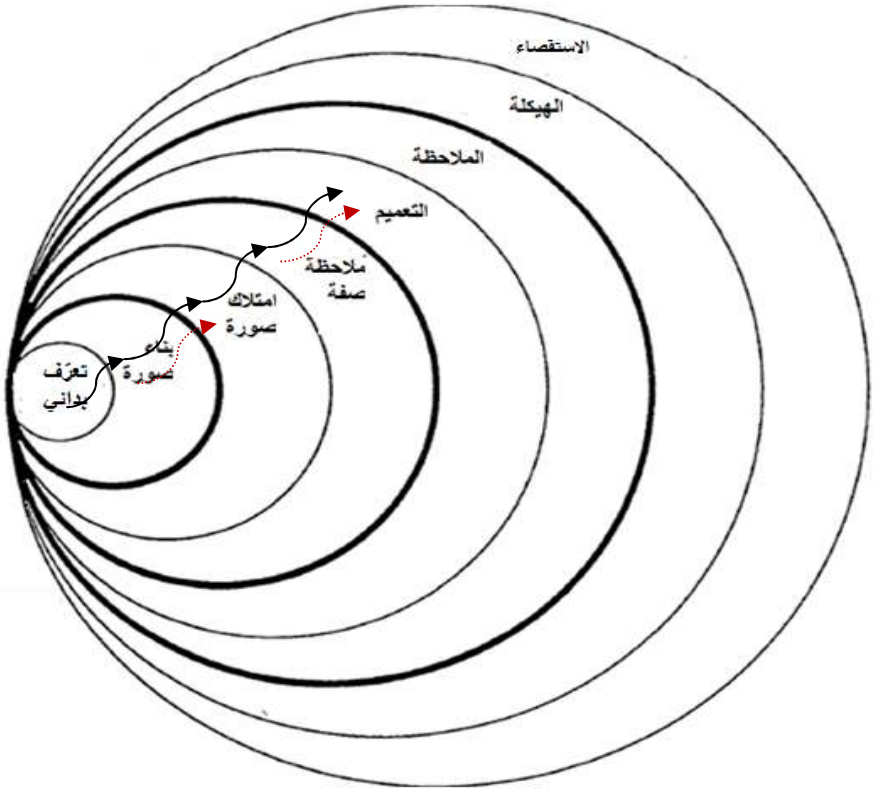


شكل (37): المثلث القائم كما رسمه عمر على جيوجبرا

كلَّفت المعلمة الطلاب برسم السؤال على جيوجبرا ثم حله (استفسار عن أفكار) (سطر32)، فقام عمر برسمه فعلا، بعدها عمَّم يوسف النظرية التي تعلمها في هذا السؤال الجديد، فذكر أنّ المثلث قائم وان هناك زاوية مقدارها 30 درجة (تقديم أفكار)(سطر35)، وبالتالي قام بتعميم النظرية لإيجاد طول الضلع أ ب فكان طوله يساوي نصف طول الوتر أ جـ ويساوي 5 سم (سطر35). الحوار التالي يبين ذلك:

32	المعلمة: بدي أعطيكم هالسؤال ترسموه على جيوجبرا وتحلوه..
33	المعلمة: أ ب جـ مثلث قائم في ب، قياس زاوية جـ=30 درجة، طول الوتر=10سم، جد طول الضلع أ ب؟
34	عمر يرسم السؤال على جيوجبرا
35	يوسف: بما انو المثلث قائم وفي عنا زاوية 30 إذن مباشرة بنطبق عالنظرية أ ب بقابل زاوية 30 إذن بساوي نص الوتر يعني أ ب= 2/1 × 10 = 5سم
36	المعلمة: ممتاز يا يوسف

الرسم التالي يوضح تطور فهم الطلاب في موضوع المثلث المتساوي الأضلاع:



شكل (38): مخطط يوضح تطور فهم الطلاب في موضوع المثلث متساوي الأضلاع

الجدول التالي يوضح تطور فهم مجموعة كريم في موضوع النظرية الخاصة بالمثلث قائم الزاوية:

جدول(8): تطور فهم مجموعة كريم لموضوع النظرية الخاصة بالمثلث قائم الزاوية

التطور	مثال
التعرّف البدائي	**التعرّف البدائي لمفهوم المثلث متساوي الاضلاع** المعلمة: مين يحكيلي شو تعريف المثلث متساوي الاضلاع؟ عمر: هو مثلث جميع اضلاعه متساوية كريم: او ممكن نعرفه انه مضلع منتظم يتكون من ثلاث اضلاع يوسف: كمان كل زاوية فيه قياسها 60 درجة
تكوين الصورة (طرح اسئلة) (استخدام التكنولوجيا)	**تكوين صورة لمحاور التماثل** المعلمة: سمعتوا عن محور التماثل؟ شو تعريفه؟ يهز الطلاب رؤوسهم مشيرين الى عدم معرفتهم المعلمة: طيب..محور التماثل هو خط مستقيم يقسم الشكل الى قسمين متطابقين... بناء على التعريف حاولوا ترسموا محاور التماثل في المثلث متساوي الاضلاع على جيوجبرا يرسم كل طالب شكلا لمحور التماثل المعلمة: صح ولكن هل ممكن نرسم الثلاث محاور عنفس المثلث؟ كريم: بنجرب.. اه زبط يعني اله ثلاث محاور تماثل.
امتلاك الصورة	**امتلاك صورة لمحاور التماثل في المثلث متساوي الأضلاع** المعلمة: مطلوب منكم ترسموا محور التماثل الرأسي في المثلث متساوي الاضلاع وترسموا كمان عجنب احد المثلثين اللي بنتجوا من رسم محور التماثل الطلاب يرسمون المطلوب على جيوجبرا يوسف: مزبوط الرسم هيك؟ المعلمة: اه شطورين
ملاحظة الصفات	**ملاحظة صفات محور التماثل في المثلث** المعلمة: شو بتلاحظوا على محور التماثل س ل؟ عمر: عمودي عالقاعدة كريم: وكمان نصّف زاوية الرأس يعني صاروا 30، 30 يوسف: يعني المثلث اللي رسمناه عجنب هو مثلث قائم الزاوية الزاوية اللي فوق قياسها 30 واللي تحت 60

	المعلمة: طيب بدي منكم تقيسولي على جيوجبرا طـــول الـــوتر س ص وكمان القاعدة ص ل في المثلث القائم كريم: الوتر بطلع 7 سم والقاعدة 3 ونص المعلمة: طيب ال3 ونص بقابل أي زاوية؟ يوسف: الزاوية 30 المعلمة: طيب استنتجولي النظرية من كل اللي تعلمناه عمر: الضلع اللي بقابل الزاوية 30 يساوي نصف الوتر كريم: بس مش في أي مثلث.. فقط في المثلث القائم اللـــي زوايـــاه 30، 60، 90.
التعميم	**تعميم النظرية الخاصة بالمثلث قائم الزاوية** المعلمة: بدي اعطيكم هالسؤال ترسموه على جيوجبرا وتحلوه المعلمة: أ ب جـــ مثلث قائم في ب قياس زاوية جـــ 30 درجة وطـــول الوتر 10 سم جد طول الضلع أ ب عمر يرسم السؤال على جيوجبرا يوسف: بما انه المثلث قائم وفي عنا زاويـــة 30 اذن مباشـــرة بنطبـــق عالنظرية أ ب بقابل زاوية 30 اذن بساوي نص الوتر يعني 5سم

بالنسبة لمجموعتي خالد ونادين، فقد مرّتا بنفس مستويات الفهم التي مرّت بها مجموعة كريم وهي: التعرّف البدائي وتكوين الصورة وامتلاكها وملاحظة الصفات وأخيرا التعميم، كمـــا أنّ المجموعات الثلاث احتاجت إلى تدخل من قبل المعلمة في مستوى تكوين الصـــورة؛ وذلـــك لتساعدهم في تكوين صورة ذهنية حول محاور التماثل في المثلث متســـاوي الأضـــلاع، كمـــا احتاجوا لتدخل المعلمة أيضا في مستوى ملاحظة الصفات؛ وذلك للوصول إلى النظرية الخاصة بالمثلث قائم الزاوية. تشابهت المجموعات كذلك في عدم حدوث طي عكســـي، والانتقـــال مـــن مستوى فهم إلى المستوى الذي يليه كان ظاهرا ولم يكن ضمنيا، وقـــاموا بممارســـات تعلّميـــة متنوعة مثل تقديم الأفكار والاستفسار عنها وبنائها، وفي بعض الأحيان كـــانوا يتحققـــون مـــن صحتها ويعيدون تنظيمها.

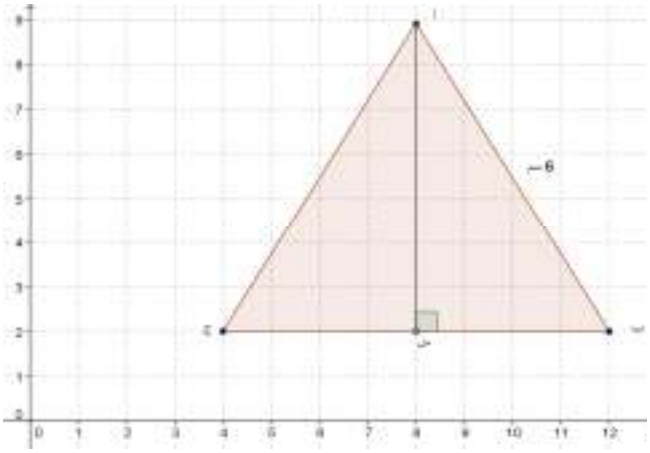
تطبيقات مباشرة على النظرية الخاصة بالمثلث قائم الزاوية

تمرين 1: في المثلث متساوي الأضلاع أ ب جـــ المجاور، طول أ ب = 6 وحدات

أجد ما يلي مع ذكر السبب:

ا – طول ب د، طول أ جـــ

الزواية ب أ د، الزاوية جـــ أ د.



شكل (39): رسمة التمرين على جيوجبرا

مرّ الطلاب هنا بمستويي التعميم وملاحظة الصفات؛ حيث عمموا النظرية التي تعلموها لحل هذا التمرين، فنجد أنّ كريم أوجد طول الضلع أ جـــ بكل سهولة وذلك لان المثلث متساوي الأضلاع وبالتالي فطول كل ضلع يساوي 6 سم (بناء أفكار)(سطر36)، أيضا يوسف اســـتطاع أن يعمِّم النظرية الخاصة بالمثلث المتساوي الساقين على المثلث المتساوي الأضلاع وهـــي أنّ العمود النازل على القاعدة في المثلث المتساوي الساقين ينصفها (تعميم)؛ وذلك بعد أن لاحـــظ صفة مشتركة بينهما وهي أنّ كل مثلث متساوي الأضلاع هو مثلث متساوي الساقين (ملاحظـــة صفات) (سطر48–49).

ثم تابع عمر واوجد قياس زاويتي الرأس ب أ س، جـــ أ س، فعمّم النظريـــة الخاصـــة بالمثلث المتساوي الساقين والتي تنطبق أيضا على المثلث المتساوي الأضلاع وهي أنّ العمـــود

في المثلث المتساوي الساقين ينصف زاوية الرأس (تعميم) (بناء أفكار) (سطر38) وبالتالي فإن كل زاوية منها تساوي 30 درجة لان قياس زاوية أ يساوي 60 درجة (شرح أفكار) (سطر38). الحوار التالي يوضح ذلك:

كريم: بما انه المثلث متساوي الأضلاع يعني كل الأضلاع طولها 6 سم يعني أ جـ= 6سم	36
يوسف: هلأ أنا.. بدو ب س، هلأ ممكن نعتبر انو كل مثلث متساوي الأضلاع هو متساوي الساقين يعني أ س نصف القاعدة، إذن ب س= 3سم، س جـ = 3سم.	37
عمر: أجا دوري بدو زوايا الرأس.. حكينا انو أ س عمود والعمود بنصف زاوية الرأس زي ما أخدنا بالنظرية أذن زاوية ب أ س= 30 وزاوية جـ أ س=30	38
لأنو زاوية أ كلها بتساوي 60 درجة.	39
يوسف: ما أشطرك هههههه	40

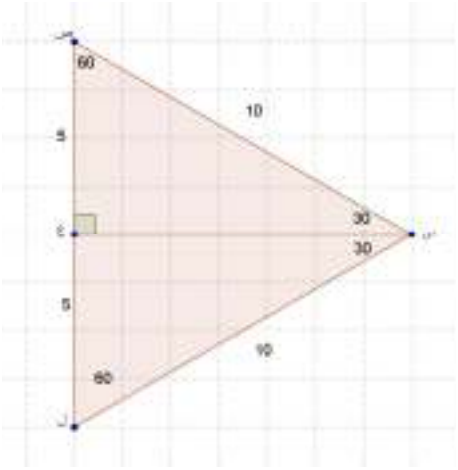
تمرين2: ارسم المثلث المجاور في دفتري وأضف له مثلثا اخر حتى ينتج مثلث متساوي الأضلاع...ما طول الضلع في المثلث متساوي الأضلاع؟

شكل (40): رسمة تمرين 2 على جيوجبرا

مرّ الطلاب أثناء حل هذا التمرين بمستويي التعميم وامتلاك الصورة، فقد عمّم الطلاب النظرية الخاصة بالمثلث القائم في إيجاد طول الوتر والذي يمثل ضلع المثلث المتساوي الأضلاع بعد رسم المثلث المجاور، فتبين لهم أنّ طول الوتر يساوي 10 سم بعد تعميم النظرية (بناء أفكار) (سطر42)، وبناء على ذلك قام كريم برسم المثلث المجاور للمثلث المرسوم ليتكون

في النهاية مثلث متساو الأضلاع؛ لأنه كان قد امتلك صورة ذهنية للمثلث المتساوي الأضـــلاع.

الشكل التالي يمثل الشكل النهائي للمثلث المطلوب:



شكل (41): الشكل النهائي للمثلث كما رسمه الطلاب على جيوجبرا

الحوار التالي يوضح ذلك:

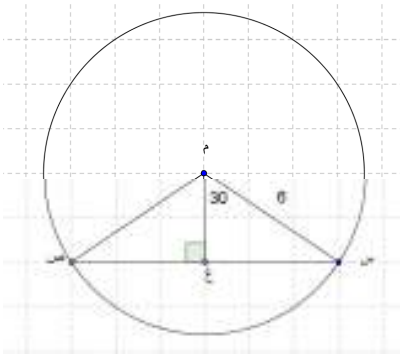
يوسف: حسب النظرية طول الضلع المقابل للزاوية 30 بكون نصف الوتر...	41
عمر: يعني طول الضلع ب د بكـــون ضـــعف أ ب...يعنـــي 10 ســـم (يشـــير عالبرنامج)	42
يوسف: يعني طول الضلع في المثلث المتساوي الأضلاع 10 سم	43
المعلمة: ما تنسوا إنكم بدكم ترسموا المثلث المجاور بس مش عالدفتر ع جيوجبرا	44
كريم: أنا رح أرسمه حسب الأطوال اللي طلعت معنا	45
كريم يرسم الشكل	46

تمرين 3: في الدائرة المجاورة م س، م ص نصفا قطرين، س ص وتر في الدائرة، م ع عمود على الوتر، إذا كان نصف قطر الدائرة 6 وحدات:

1) أجد طول س ع

2) أجد طول الوتر س ص

3) أجد قياس الزاوية م ص س.



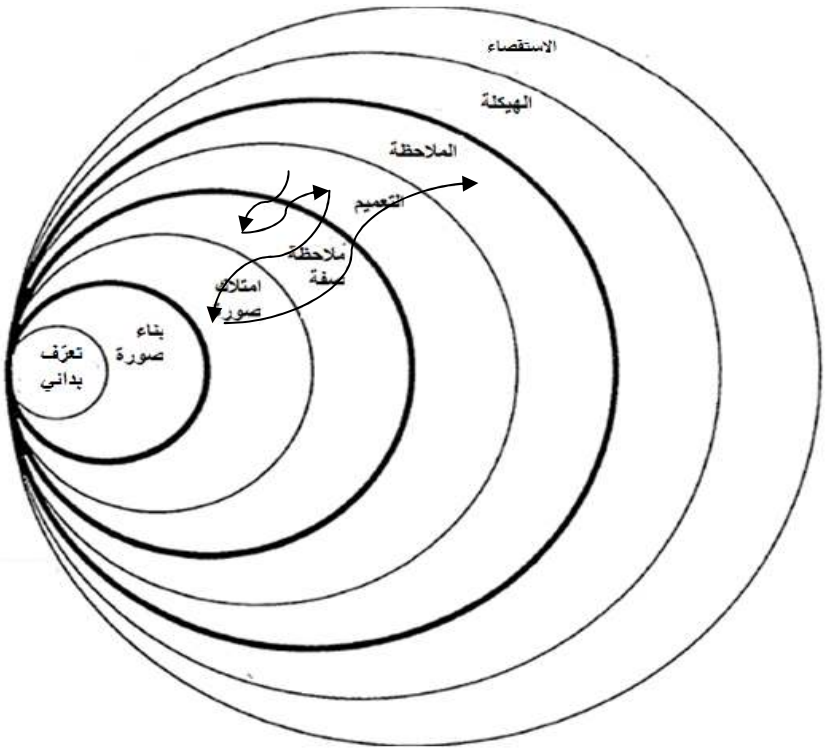
شكل (42): رسمة التمرين على جيوجبرا

مرّ الطلاب أثناء حل هذا التمرين بالمستوى السادس من مستويات الفهم وهو الملاحظة، فالطالب هنا لاحظ بعض خصائص الأشكال التي سبق له تعلمها واستفاد من هذه الملاحظة في حل التمرين.

قام الطلاب برسم الشكل بمساعدة من قبل المعلمة في رسم الدائرة، وبعد الإنتهاء من الرسم بدأ الطلاب التفكير في حل التمرين فاستطاعوا الربط بين ما تعلموه من نظريات تتعلق بالمثلث متساوي الأضلاع وما تعلموه من نظريات تتعلق بالمثلث متساوي الساقين (بناء أفكار)، فمثلا لإيجاد طول الضلع س ع عمّم الطلاب النظرية الخاصة بالمثلث القائم الزاوية حيث أنّ طول س ع يساوي نصف طول الوتر م س في المثلث القائم م ع س ويساوي 3سم (شرح أفكار) (سطر 49)، ولإيجاد طول الضلع س ص عمّم كريم إحدى النظريات الخاصة بالمثلث متساوي الساقين، إذ أنّ العمود النازل على القاعدة ينصفها وبالتالي فإن س ص يساوي 6سم (شرح أفكار)(سطر51)، أما قياس الزاوية م ص س فأوجدها الطلاب بإيجاد زاوية الرأس أولاً، إذ أنّ العمود م ع نصّف زاوية الرأس وبالتالي فإن زاوية الرأس م تساوي 60 درجة (شرح أفكار) (سطر53)، ثم أوجد كل من كريم وعمر زوايا القاعدة باستخدام النظرية الخاصة بالمثلث متساوي الساقين، إذ أنّ زوايا القاعدة فيه تكون متساوية وبالتالي قياس كل زاوية يساوي 60 درجة (شرح أفكار)(سطر54-55)، عندها استنتج الطلاب أنّ هذا المثلث هو مثلث متساوي الأضلاع لأنّ كل زاوية فيه تساوي 60 درجة (بناء أفكار) (سطر56-57). الحوار التالي يوضح ذلك:

47	يرسم الطلاب الشكل على جيوجبرا
48	يوسف: بدو نطلع س ع.. حكى انو م ع عمود.. هاد بعني انو زاوية ع هاي(يشير باصبعه عليها) بتساوي 90 يعني المثلث قائم وحاطلنا هون زاوية 30
49	عمر: وحسب النظرية الضلع المقابل للزاوية 30 هو س ع وبساوي نصف الوتر إذن س ع = 3سم.
50	كريم ويوسف: اه صح
51	كريم: هلأ بدو س ص هادا المثلث متساوي الساقين (يشير الى المثلث م س ص) والعمود بنصف القاعدة، هاي طلعت 3 (يشير الى س ع) يعني س ص بتساوي 6
52	يوسف: هلا زاوية م ص س
53	يوسف: هاي الزاوية (يشير الى م) بتساوي 60 لأنو م ع نصّف زاوية م
54	عمر: عشان نوجد زوايا القاعدة بنحكي 180 – 60 يساوي 120
55	كريم: إذن 120 على 2 يساوي 60
56	كريم: يعني المثلث بطلع متساوي الاضلاع
57	يوسف: اه صح لأنو كل زوايا بتساوي 60.

الرسم التالي هو تخطيط لتطور فهم الطلاب في التطبيقات المباشرة للنظرية:



شكل (43): مخطط يوضح تطور فهم الطلاب في التطبيقات المباشرة للنظرية الخاصة بالمثلث قائم الزاوية.

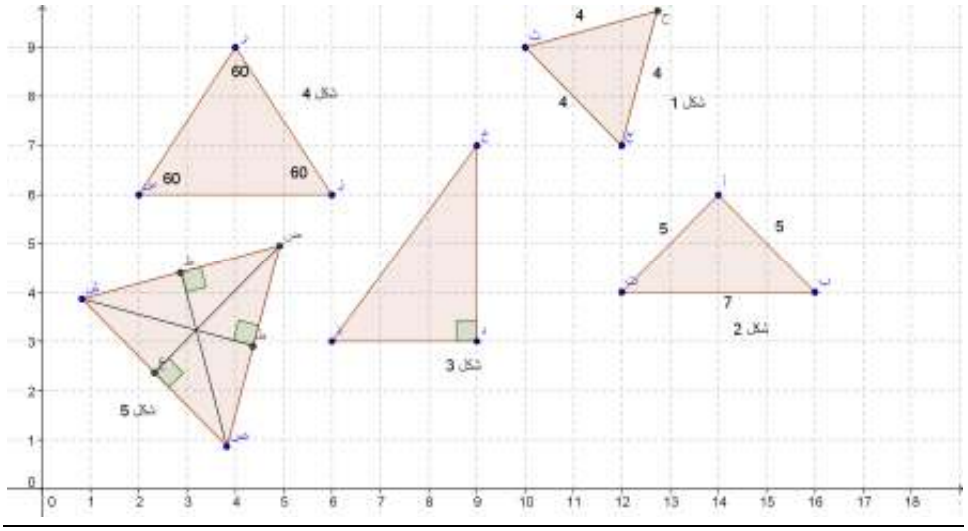
الجدول التالي يبين تطور فهم مجموعة كريم في التطبيقات المباشرة للنظرية الخاصة بالمثلث القائم الزاوية:

جدول (9): تطور فهم مجموعة كريم في التطبيقات المباشرة للنظرية الخاصة بالمثلث قائم الزاوية

التطور	مثال
التعميم	**تعميم أحد خصائص المثلث متساوي الأضلاع** كريم: بما أنه المثلث متساوي الأضلاع يعني كل الأضلاع طولها 6 سم يعني أ جـ = 6 سم
ملاحظة الصفات	**ملاحظة أن كل مثلث متساوي الأضلاع هو متساوي الساقين** يوسف: هلأ كل مثلث متساوي الأضلاع هو متساوي الساقين يعني أ س نصّف القاعدة اذن ب س = 3، س جـ = 3.
التعميم	**تعميم أحد نظريات المثلث متساوي الساقين في حل السؤال** عمر: بدو زوايا الرأس.. حكينا انه أ س عمود والعمود بنصّف زاوية الرأس ومثل ما اخدنا بالنظرية اذن زاوية ب أ س = 30 درجة وزاوية جـ أ س = 30 درجة
امتلاك الصورة	**امتلاك صورة ذهنية للمثلث القائم الزاوية** قام الطلاب برسم المثلث المطلوب إذ انهم امتلكوا صورة ذهنية للمثلث القائم الذي يحوي زاويتي 30، 60
الملاحظة	**ملاحظة ان أنصاف الأقطار متساوية والأستفادة منها في الحل** كريم: حتى نطلع قياس الزاوية م ص س اول شي في المثلث م س ع القائم زاوية س بتساوي 60 عمر: وطول م ص بساوي 6 سم لانهم انصاف اقطار، وانصاف الاقطار متساوية. اذن زاوية س = زاوية ص يوسف: يعني زاوية ص المطلوبة = 60 درجة

تطبيقات غير مباشرة على النظرية الخاصة بالمثلث قائم الزاوية

تمرين1: فيما يلي مجموعة من المثلثات، ميِّز المثلث متساوي الأضلاع منها.



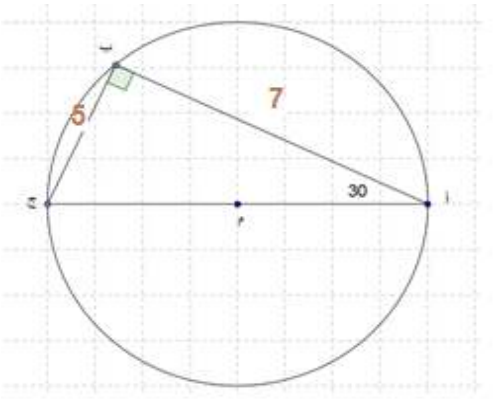
شكل (44): رسمة التمرين على جيوجبرا

مرَّ الطلاب هنا بمستوى امتلاك الصورة فقد امتلكوا صوراً مختلفة للمثلث متساوي الأضلاع، فكريم مثلاً ميّز المثلث متساوي الأضلاع اعتمادا على تساوي أطوال أضلاعه الثلاثة (تقديم أفكار) (سطر59)، عمر أيضاً ميّز المثلث متساوي الأضلاع اعتمادا على قياسات زواياه الداخلية والتي تساوي 60 درجة لكل منها (تقديم أفكار) (سطر61)، كذلك يوسف امتلك صورة للمثلث متساوي الأضلاع والتي من خلالها استطاع أن يُصنِّف الأشكال 2،3 على أنها ليست مثلثات متساوية الأضلاع (تقديم أفكار) (الاسطر60،62)، ثم عاد كريم مرة أخرى وصنّف الشكل 5 على أنّه متساوي الأضلاع بناء على محاور التماثل المرسومة فيه (تقديم أفكار) (الأسطر64،66). الحوار التالي يبين ذلك:

المعلمة: طيب يا طلاب.. أنا هلأ بدي ارسم مجموعة مثلثات وبدي منكم تحددولي المثلث المتساوي الأضلاع من غيرو وتحكولي السبب في اختياركم.	58
كريم:. شكل 1 مبين إنه متساوي الأضلاع لأنو أضلاعه كلها بتساوي 4.	59
يوسف: شكل 2 متساوي الساقين مش الأضلاع	60
عمر: شكل 4 كمان متساوي الأضلاع لأنه كل زاوية فيه بتساوي 60.	61

يوسف: الشكل 3 مستحيل يكون متساوي الأضلاع لأنو في زاوية قائمة... صح	62
المعلمة: ممتازين لحد الآن حلكم صح... بس ضايل عنا شكل 5	63
كريم: هدول الأعمدة اللي في شكل 5 هدول سميناهم خطوط تماثل كل خط بشكل زاوية قائمة وبقسم المثلث لمثلثين متطابقين...	64
المعلمة: يعني شو يا كريم؟	65
كريم: يعني هادا المثلث متساوي الأضلاع	66

تمرين2: أ ب جـــ مثلث قائم الزاوية رُسم داخل الدائرة التي مركزها م كما فـــي الشـــكل، إذا علمت أنّ أ ب=4سم، ب جـــ= 3سم، فجد طول قطر الدائرة أ جـــ.



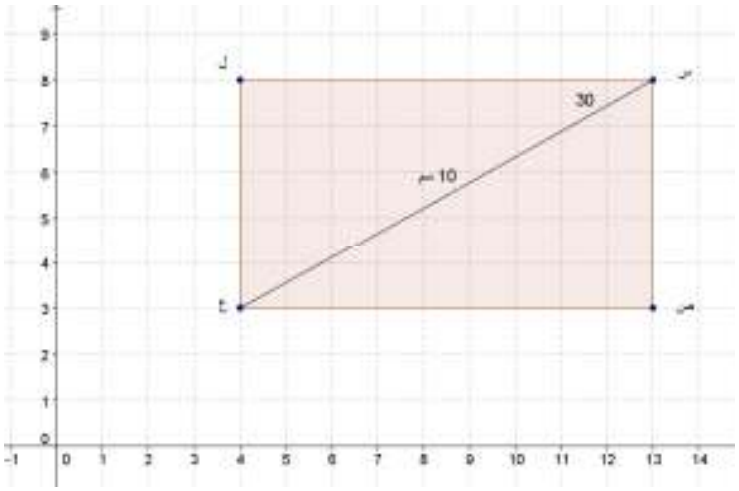
شكل (45): رسمة التمرين على جيوجبرا

مرّ الطلاب هنا بمستوى التعميم، فقد تعلموا أنّ طول الضلع المقابل للزاويـــة 30 فـــي المثلث القائم يساوي نصف طول الوتر، المعلمة هنا حاولت صياغة هذا السؤال كتعمـــيم علـــى النظرية ولكن بشكل غير مباشر، فرسمت المثلث داخل دائرة كما أنها لم تطلب مباشرة إيجـــاد طول الوتر في المثلث القائم، وإنما طلبت منهم إيجاد طول قطر الدائرة أ جـــ (استفســـار عـــن أفكار)، وذلك كي تختبر قدرة الطلاب على إدراك المطلوب الحقيقي وبالتالي تعمـــيم النظريـــة بشكل صحيح.

وهذا بالفعل ما تنبه له يوسف حيث لاحظ أنّ القطر أ جـــ في الدائرة هو وتر في المثلث القائم (تقديم أفكار) (سطر69)، كذلك لاحظ كريم وجود زاوية 30 درجة وبالتالي يمكنهم تعميم النظرية (تقديم أفكار) (سطر70).الحوار التالي يبين ذلك:

67	عمر: يرسم السؤال على جيوجبرا.
68	يوسف: خلينا نفكر شوي... طالب نوجد طول القطر أ جـــ
69	يوسف: القطر أ جـــ هو نفسه الوتر بالنسبة للمثلث القائم... صح؟
70	كريم: اه صح اطلعوا عنا زاوية 30 يعني بدنا نطبق النظرية
71	عمر: ماشي الضلع المقابل للزاوية 30 هو هاد (يشير بإصـــبعه علـــى ب جـــــ) وطوله 5 سم.
72	يوسف: يعني أ جـــ بساوي 5 × 2 ويساوي 10 سم
73	كريم: اطلعوا حاطلنا طول أ ب عشان يخربشنا..هههههه
74	كريم وعمر ويوسف يضحكون.

تمرين 3: س ص ع ل مستطيل، طول قطره س ع= 10 سم، إذا علمت أنّ قياس زاوية ل س ع = 30 درجة، فجد طول الضلع س ص.



شكل (46): رسمة التمرين على جيوجبرا

مرّ الطلاب هنا بمستوى الملاحظة، فقاموا بداية برسم السؤال على جيـــوجبرا، ولكـــي تتوضح الفكرة لهم قاموا بكتابة المعطيات على الرسمة (بناء أفكار)(سطر77)، فلاحـــظ عمـــر مباشرة أنّ وجود الزاوية 30 في مثلث قائم يمكنه من إيجاد طول الضلع المقابل لها(ل ع) حيث أنّ طوله يساوي نصف طول الوتر(القطر في المستطيل) ويساوي 5سم (شرح أفكار)(سطر79)، هنا تدخل يوسف معترضاً حيث وضح لعمر أنّ المطلوب ليس ل ع وإنما س ص (إعادة تنظيم أفكار) (سطر80).

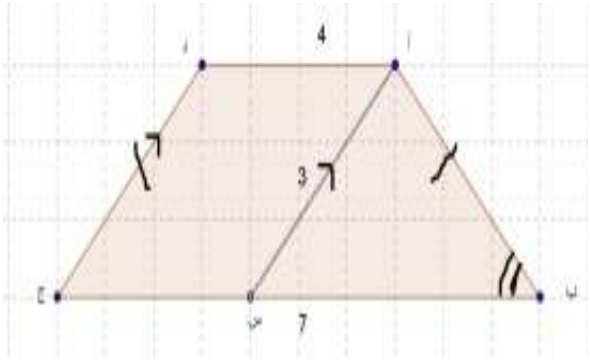
لكن أفكار كريم هنا كانت أكثر تنظيما ودقة فقد وضح لهما أنّ ما قام به عمر صحيح ولكن لإيجاد طول س ص يجب ملاحظة أنّ أضلاع المستطيل المتقابلة تكون متساوية (إعادة تنظيم أفكار) وبالتالي فإن ل ع يقابل س ص ومنه فإن س ص تساوي 5سم أيضاً (شرح أفكار) (سطر81). الحوار التالي يوضح ذلك:

المعلمة: شو رأيكم تحلوا هادا السؤال؟	75
كريم: يرسم الشكل على جيوجبرا	76
يوسف: كريم اكتب المعطيات على الرسمة.. القطر طوله 10 والزاوية هاي30 (يشير بإصبعه إلى زاوية ع س ل).	77
كريم: طيب وبعدين	78
عمر: في عنا زاوية 30 الضلع المقابل لها بساوي نص الوتر.. الوتر طوله10 اذاً هاد الضلع طوله 5سم.(يشير بإصبعه إلى الضلع ل ع)	79
يوسف: اه بس انتبه انو بدوش ل ع بدو س ص...	80
كريم: صح.. بس يا فصح إحنا بنعرف انو في المستطيل كل ضلعين متقابلين متساويين معناتو ل ع بتقابل س ص يعني س ص بتساوي 5سم	81

هنا لاحظ يوسف أنّ بإمكانه حل السؤال بطريقة مختلفة (بناء تصورات متعددة)، حيث بإمكانه الاستفادة من خصائص التوازي (سطر82)، وقام بتوضيح الفكرة لعمر وكريم حيث أنّ الزاوية 30 تساوي زاوية س ع ص بالتبادل ومنها يمكن إيجاد س ص مباشرة (شرح أفكار) (سطر84)، والحوار التالي يبين ذلك:

يوسف: بس ممكن نحل السؤال بطريقة تانية... من التوازي.	82
عمر وكريم: كيف؟	83
يوسف: الزاوية 30 بتساوي هاي الزاوية بالتبادل (يشير إلى زاوية س ع ص) والضلع اللي بقابل الزاوية هاي هو س ص ومباشرة بنحكي س ص = 5سم	84
المعلمة: ممتازين يا أبطال.	85

تمرين4: أ ب جـــ د شبه منحرف بناء على المعطيات الموجودة جد قياس زاوية ب.

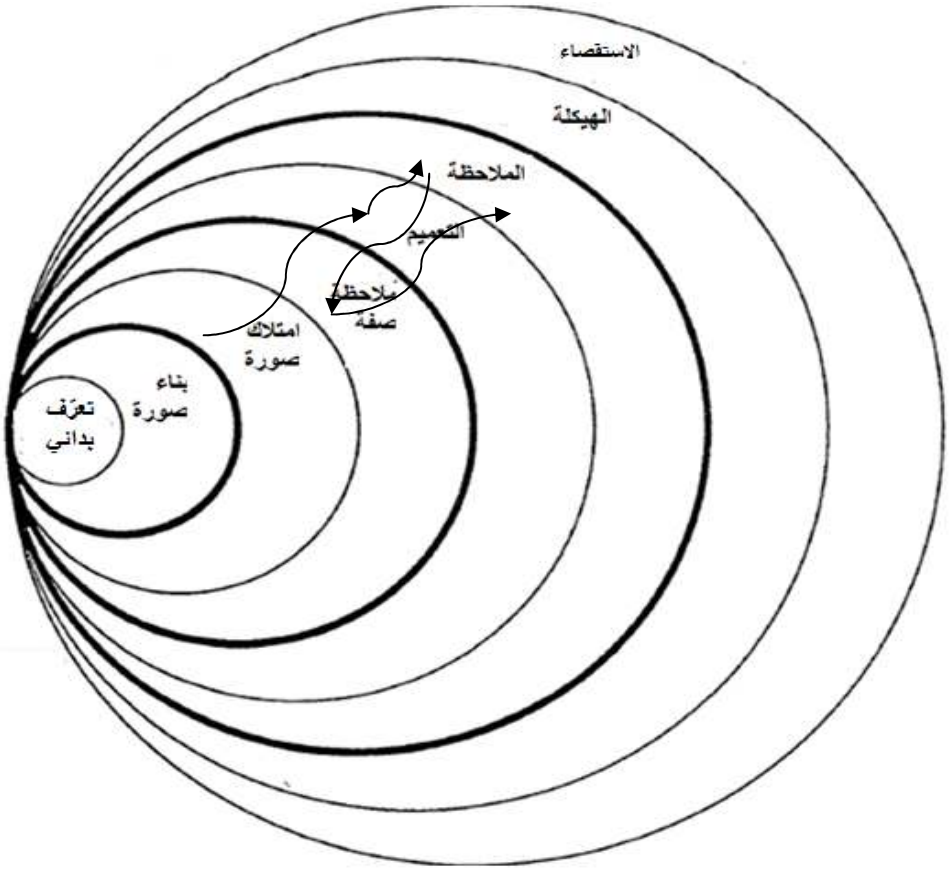


شكل (47): رسمة التمرين على جيوجبرا

في البداية لم يستطع الطلاب البدء بحل السؤال حيث أخذوا يتمعنون في الشكل المرسوم في محاولة للبحث عن نقطة يبدأون منها بالحل (سطر87)، فذكر يوسف أنّ المطلـــوب إيجـــاد قياس زاوية في حين أنّ المعطى أطوال أضلاع ولا يمكنهم الاستفادة منها (سطر88)، فـــاقترح كريم أن يقرأوا معطيات السؤال برويّة وبدأ يحلل بتلك المعطيات، فذكر أن قاعدتا شبه المنحرف تكونان متوازيتين (ملاحظة صفات)(تقديم أفكار)(سطر90)، ومن ذلك توصل إلى أنّ الشـــكل أ س جـــ د يكون متوازي أضلاع حيث يمكن إيجاد أطوال أضلاعه الناقصة وهي س جـــ=4، د جـــ=3 (شرح أفكار) (سطر92-93)، نلاحظ هنا أن كريم وصل إلى مستوى كاف من الفهـــم الرياضي يمكنه من متابعة حل السؤال، في حين أنّ زميليْه عمر ويوسف لم يصلا إلـــى هـــذا المستوى من الفهم، فهم لم يعرفوا سبب قيام كريم بتلك الخطوات، فتابع كريم حل السؤال حيث أوجد طول ب س =3سم (سطر95)، وطلب من عمر إيجاد طول أ ب، لكنّ عمر لـــم يســـتطع (سطر96)، وتابع كريم حيث أوجد طول أ ب اعتماداً على معطيات الســـؤال القائـــل إنّ شـــبه المنحرف متساوي الساقين، اذاً د جـــ = أ ب = 3سم (شرح أفكار)(سطر97)، وصل كريم إلى مستوى متقدم في حل السؤال في حين يوسف وعمر لم يفهما ما يريد كريم الوصول له من كل الخطوات التي قام بها، وفي خطوة أخيرة وضّح كريم أنه أصبح بالإمكان إيجاد زاوية ب وذلك لان أ س= ب س= أ ب =3سم (شرح أفكار) وبالتالي فالشكل أ ب س هـــو مثلـــث متســـاوي الأضلاع، ومنه فإن زاوية ب تساوي 60 درجة (بناء أفكار)(سطر99). الحوار التالي يبين ذلك:

86	المعلمة: ارسموا الشكل على جيوجبرا وحاولوا تحلوا السؤال... طالب منكم الزاوية ب
87	ينظر الطلاب إلى الشكل بتمعن وعلامات الحيرة تبدو عليهم
88	يوسف: طالب نطلع زاوية ومش معطينا إلّا أطوال أضلاع مش معطينا زوايا!!
89	كريم: اسمعوا خلينا نمشي بالسؤال شوي شوي
90	كريم: هلأ القاعدتين في شبه المنحرف بكونو متوازيات... صح
91	عمر: اه صح.. شو اللي بدك تحكيه؟
92	كريم: انو الشكل أ س جـ د بكون متوازي أضلاع معناها س جـ طولها 4
93	يوسف: وطول د جـ 3
94	يوسف: بس بإيش بفيدنا هالحكي؟
95	كريم: أنا بحكيلك ب جـ كلها 7 راح منها 4 بضل ل (ب س) 3سم...عمر طلّع أب
96	ينظر عمر إلى الشكل ويهز رأسه مشيرا إلى عدم معرفته
97	كريم: مالك يا زلمة مهو بحكي انو شبه المنحرف متساوي الساقين يعني أ ب=3سم
98	يوسف وعمر: طيب.. بعدين
99	كريم: شو طيب خلص انحل السؤال...أب=3، أس=3، ب س=3 يعني أ ب س طلع مثلث متساوي الأضلاع يعني زاوية ب بتساوي 60 درجة
100	المعلمة: رااااائع جدا يا كريم برافو عليك يا بطل

الرسم التالي هو تخطيط لتطور فهم الطلاب في التطبيقات غير المباشرة للنظرية:



شكل (48): مخطط يوضح تطور فهم الطلاب في التطبيقات غير المباشرة للنظرية الخاصة بالمثلث قائم الزاوية.

الجدول التالي يوضح تطور فهم مجموعة كريم في التطبيقات غير المباشرة للنظرية الخاصة بالمثلث قائم الزاوية:

جدول (10): تطور فهم مجموعة كريم في التطبيقات غير المباشرة للنظرية الخاصة بالمثلث قائم الزاوية

التطور	مثال
امتلاك الصورة	**امتلاك صورة المثلث متساوي الأضلاع** المعلمة: بدي أرسم مجموعة من المثلثات وبدي تحددولي المثلث متساوي الاضلاع من غيرو والسبب في اختياركم كريم: شكل 1 مبين أنه متساوي الأضلاع لأنه أضلاعه كلها بتساوي 4 عمر: شكل 4 متساوي الأضلاع لانه كل زاوية فيه بتساوي 60 كريم: هدول الأعمدة اللي في شكل 5 سميناها خطوط تماثل كل خط بقسم المثلث لمثلثين متطابقين.. يعني المثلث متساوي الاضلاع
التعميم	**تعميم النظرية الخاصة بالمثلث قائم الزاوية** يوسف: القطر أ جـ هو نفسه الوتر بالنسبة للمثلث القائم كريم: صح.. اطّلعوا عنا زاوية 30 يعني بدنا نطبق النظرية عمر: الضلع المقابل للزاوية 30 هيو طوله 3 سم يوسف: يعني أ جـ = 3 × 2 = 6
الملاحظة	**ملاحظة خصائص المستطيل والأستفادة منها في الحل** كريم: إحنا بنعرف انه في المستطيل كل ضلعين متقابلين متساويين معناها ل ع بقابل س ص بتساوي 5 سم.
ملاحظة الصفات	**ملاحظة أن الشكل متوازي أضلاع** كريم: القاعدتين في شبه المنحرف بكونو متوازيات.. صح عمر: اه صح شو اللي بدك تحكيه؟ كريم: انه الشكل أ س جـ د بكون متوازي اضلاع يعني س جـ طولها 4 يوسف: وطول د جـ يساوي 3
الملاحظة	**ملاحظة أن الأضلاع متساوي وبالتالي الشكل مثلث متساوي الأضلاع** كريم: أ ب= 3، أ س= 3، ب س= 3 يعني أ ب س طلع مثلث متساوي الأضلاع يعني زاوية ب بتساوي 60 درجة

المقابلات التي أجرتها الباحثة مع الطلاب

قامت الباحثة بتصوير الطلاب خلال عملهم في مجموعات تعاونية، وأثناء تعلّمهم لموضوع المثلثات باستخدام برنامج جيوجبرا، وأثناء ذلك قامت الباحثة بإجراء مقابلات مع مجموعات الطلاب لمعرفة رأيهم في برنامج جيوجبرا ومدى استفادتهم منه، وهل هناك اقتراحات من قبل الطلاب حول استخدام جيوجبرا بطريقة تساعدهم أكثر في تعلمهم لمادة الرياضيات.

اتضح من المقابلات التي أجرتها الباحثة أنّ توجهات الطلاب نحو استخدام برنامج جيوجبرا كانت ايجابية، فقد وجدوا في استخدامه ميزات ساعدتهم ومكّنتهم من القيام بأفعال تعلّمية ورياضية مختلفة، ومنها: الأفعال الإدراكية، الأفعال الوجدانية.

الأفعال الإدراكية

العمل في محيط جيوجبرا مكن الطلاب من القيام بالأفعال الإدراكية التالية:

1- التّعمُّق في فهم الموضوع

المقصود هنا هو التطرق إلى جزئيات الموضوع؛ وذلك عن طريق رسم أشكال مختلفة وبأكثر من طريقة.

أمثلة من كلام الطلاب:

المعلمة: طيب ما هي الميزات في جيوجبرا اللي خلتكم تفهموا الرياضيات أكثر من الأول؟	1
كريم: بنقدر نرسم أي شكل بدنا اياه وبأكثر من طريقة.. يعني رسمنا مثلثات كتير ومضلعات رباعية وغيرها ودوائر ورسمنا زوايا بقياسات مختلفة كمان.	2

مرونة في التعامل مع الأشكال الهندسية

هذه المرونة تمثلت في قدرة الطلاب على رسم الشكل الذي يريدونه، وكذلك في قدرتهم على تغيير صفات الشكل كما يريدونه. انظر المثال السابق كمثال على الإشارة إلى مرونة التعامل مع الأشكال الهندسية.

تحويل الرياضيات من رموز وأشكال مجردة إلى رموز وأشكال يمكن التعامل معها بمرونة أكثر. الحوار التالي يبين ذلك:

المعلمة: طيب شو هي الميزات في جيوجبرا اللي خلتكم تفهموا الرياضيات أكثر من الأول؟	3
نادين: جيوجبرا حوّلنا الرياضيات من إشي مجرد لاشي مش مجرد يعني بطلت مجرد رموز وأشكال.	4

2- **الديناميّة؛** بمعنى أنّ الأشكال التي كان الطلاب يرسمونها كانوا يحركونها ببساطة وسلاسة، فمثلا أثناء تعلمهم لموضوع شروط تطابق المثلثات قام الطلاب برسم مثلثين وتحريك احدهما ووضعه فوق المثلث الآخر لاختبار إمكانية تطابقهما (سطر7). الحوار التالي يوضح ذلك:

طرحت المعلمة السؤال السابق على مجموعة خالد	5
المعلمة: شو هي ميزات جيوجبرا اللي خلتكم تحبوه؟	6
سمير: مس بنقدر نرسم أي شكل بدنا اياه زي المثلثات والدوائر والأشكال الرباعية وكمان كنا نحرك المثلثات ونطبقها على بعض.	7

3- **التعامل مع إمكانيات بصرية مختلفة،** فأي نشاط قام به الطلاب على جيوجبرا كان باستطاعتهم رؤيته، فمثلاً شاهدوا الأشكال تتحرك والزوايا تكبر وتصغر، فتارة تكون حادة وتارة تكون قائمة وتارة أخرى تكون منفرجة (الأسطر9-10). الحوار التالي يوضح ذلك:

المعلمة: هل شعرتوا انه جيوجبرا فادكم؟ وبإيش؟	8
نادين: صرنا نرسم الأشكال ونحركها بإدينا.. وكنا ننبسط كتير لما نشوف	9
المثلثات بتتحرك متل ما بدنا، والزوايا بتكبر وبتصغر، لما نشوفها بتتحرك قدام	10

عيونا بفرق عما نشوفها بالكتاب.	

إذن يتضح مما سبق أنّ الطلاب وجدوا أنّ جيوجبرا امتاز بقدرته على تعميق الفهم لديهم كما امتاز بالديناميّة والمرونة بالإضافة إلى توفير إمكانيات بصرية متنوعة. كما عبّر الطـــلاب عن رغبتهم في أن يكون منهاج الرياضيات مدعما بتطبيقات حاسوبية مثل برنامج جيـــوجبرا. الحوار التالي يبين ذلك:

المعلمة: طيب لو كان الخيار بإيدكم شو بتختاروا.. تدرسوا الرياضيات بالطريقة العادية ولا باستخدام جيوجبرا؟	11
كريم: أكيد باستخدام جيوجبرا.. بدهاش سؤال	12
عمر: طبعا باستخدام جيوجبرا خاصة انو إحنا بنحب الشغل على الكمبيوتر.	13

الجانب الوجداني

كذلك أثّر العمل في محيط جيوجبرا على الجانب الوجداني للطلاب، فقد عبّر الطـــلاب عن الجانب الوجداني من خلال الأفعال التعلُّمية التالية:

1- المتعة والتشويق

استخدام جيوجبرا أضفى جوا من المتعة والإثارة على درس الرياضيات، وهذا بـــدوره اثر على مستوى أداء الطلاب خلال الدرس، وهذا مثال من كلام الطلاب:

المعلمة: هل شعرتوا انو جيوجبرا أضاف إشي لحصة الرياضيات؟	14
نورا: أضاف أشياء كتير... بكفي اننا صرنا نستمتع فـــي حصـــة الرياضـــيات وصرنا نستناها بفارغ الصبر.	15

2- **الدافعيّة:** برنامج جيوجبرا زاد من دافعية الطلاب لتعلم الرياضيات، وعزّز علاقتهم بها، فقد أصبح الطلاب أكثر إقداما على تعلم الرياضيات. الحوار التالي يبين ذلك:

المعلمة: هل شعرتوا انو جيوجبرا غيّر إشي فيكم؟	16
خالد: بالنسبة إلي حسيت انو صار عندي دافع كبير عشان أتعلـــم الرياضـــيات وصرت أحاول احضر الدرس على جيوجبرا قبل ما نوخذوه.	17

مناقشة النتائج

عرضت الباحثة ملخصاً للنتائج التي تم التوصل لها من خلال تطبيق برنامج جيــوجبرا في تعلُّم الطلاب لموضوع المثلثات في وحدة الهندسة، كما عرضت مستويات الفهم التي مــرّوا بها أثناء تعلم هذا الموضوع. ثم قامت الباحثة بمناقشة هذه النتائج موضحةً أهم الأسباب التــي قادت للوصول إلى مثل هذه النتائج واهم خصائص الفهم التي من الممكن أن يكون الطلاب قــد مرّوا بها أثناء التعلم مثل خاصية الطي العكسي ولا حاجة إلى حــدود بــين الحلقــات، وأهــم الممارسات التي قام بها الطلاب في كل مستوى فهم مرّوا به، كل ذلك وصفته الباحثة مع إعطاء أسباب له.

تطور معرفة الطلاب في موضوع تصنيف المثلثات

مرّت مجموعة كريم بالمستويات الأولى من الفهم وهي التعرُّف البدائي، حيث كان مهماً أن يمتلك الطلاب مفهوم المثلث كأحد الأشكال الهندسية، لكنهم لم يتمكنوا من تعريفه تعريفاً دقيقاً مما اضطر المعلمة للتدخل كي توضح لهم مفهوم المثلث بشكل واضح ودقيق. بعدها مرّ الطلاب بمستوى تكوين الصورة إذ قادتهم الأنشطة إلى تكوين صورة ذهنية لأصناف المثلثات المختلفة، ولأجل ذلك قام الطلاب بمجموعة أفعال تعلُّمية مثل تصريح القصد وطرح الأسئلة وتحسين اللغة الرياضية وأخيرا استخدام برنامج جيوجبرا، حيث كان هذا الإستخدام من قبل المعلمة والطلاب. وبمساعدة من المعلمة وصل الطلاب إلى مستوى امتلكوا فيه صوراً عقلية خاصة بذلك، وتمثــل امتلاكهم للصورة في معرفة نوع المثلث بمجرد رؤيته ودون الحاجة لتدخل المعلمة.

مما سبق يمكن الاستنتاج أنّ الطلاب وصلوا إلى مستوى امتلاك الصورة، لكــنهم لــم يتمكنوا من الوصول الى مستويات متقدمة من الفهم (ملاحظة الصفات – الاستقصاء)؛ وهــذا يعود إلى طبيعة المادة في المنهاج والمأخوذة منها الأنشطة التي قام الطلاب بتعلمها، فهي تكتفي فقط بعرض أساسيات موضوع تصنيف المثلثات، دون تقديم معرفة جديــدة. الصــورة التاليــة توضح المادة كما هي في منهاج الرياضيات:

تمهيـــد:

أولاً - أنواع المثلث:

تعلّمتَ في السّنوات السابقة أنّ المثلّثَ يُصنف حسب قياسات زواياه إلى ثلاثة أنواع هي:

أ- مُثلّث حادّ الزوايا ب- مثلّث قائم الزاوية جـ- مثلّث مُنْفَرِج الزاوية، كما هو في الأشكال أدناه:

أ- مُثلّث حادّ الزوايا ب- مُثلّث قائم الزاوية جـ- مُثلّث منفرج الزاوية

كما يُصنّفُ المثلّثُ حسب أطوال أضلاعه إلى ثلاثة أنواع وهي:

١- مثلث مختلف الأضلاع ٢- مثلث متساوي الساقين ٣- مثلث متساوي الأضلاع

كما هو في الأشكال أدناه:

١- مثلّث مختلف الأضلاع ٢- مثلّث متساوي الساقين ٣- مثلّث متساوي الأضلاع

شكل (49): موضوع تصنيف المثلثات كما هو في منهاج الرياضيات للصف الثامن

بالنسبة لوصول الطلاب إلى مستوى امتلاك الصورة، فقد قام الطلاب بممارسات تعلُّمية ساعدتهم في الوصول إلى هذا المستوى من الفهم، وأكثر هذه االممارسات تكراراً هو الاستفسار عن الأفكار وعن طريق ذلك بناء الأفكار. لكن من الجدير ذكره ان الطلاب لم يقوموا بالرجوع إلى مستويات سابقة من الفهم أثناء تعلمهم للموضوع وهو ما أسميناه بالطي العكسي، لأن الموضوع كان بسيطا بالنسبة لهم. هذه النتائج تتوافق مع صفات نظرية بناء المعرفة حسب بيري وكيرين، إذ أنّ الطي العكسي يحدث عندما يعرف الطلاب ما هم بحاجة إليه لكي يحلوا مشكلة، ولكن معرفتهم ليست كافية للتذكر التلقائي للمعرفة الضرورية (Pirie & Martin,2000).

بالنسبة للمجموعتين الأخريين (مجموعتي خالد ونادين) فقد مرّتا بنفس مستويات الفهم التي مرت بها مجموعة كريم، وسبب ذلك أنّ المجموعات الثلاث امتلكت تقريبا نفس المستوى التعليمي، فالمجموعتان الأخريان لم تقوما بأي عمليات طي عكسي، وقامتا بممارسات تعلّمية مثل الاستفسار عن الأفكار والتي مكنتها من بناء أفكار جديدة شأنها في ذلك شأن مجموعة

كريم. لكن الاختلاف كان في مدى تدخل المعلمة، حيث كانت مجموعة نادين اقلها حاجةً لتدخل المعلمة؛ إذ أنها كانت قادرة على تعلم الأنشطة الخاصة بتصنيف المثلثات بالاعتماد على نفسها، حيث يحتاج الطلاب إلى تدخل المعلمة حين يستصعبون حل مشكلة رياضية معينة (Gersten et al., 2009).

تطور معرفة الطلاب في موضوع شروط التطابق (ض ض ض)

في هذا الموضوع تنوعت مستويات الفهم التي مرّ بها الطلاب في مجموعة كريم أثناء تعلّمهم، فقد مروا بداية بالتعرّف البدائي والتي تمثلت في امتلاكهم لمفهوم التطابق، بعد ذلك مرّوا بمستوى تكوين الصورة وهو المستوى الذي يقوم به الطلاب بأفعال تعلّمية متنوعة لتساعدهم في تكوين صورة ذهنية عن شرط تطابق مثلثين بثلاثة أضلاع، ومن هذه الأفعال تصريح القصد فمثلاً صرحت المعلمة ان الموضوع الذي سيتعلّمه الطلاب في ذلك الدرس هو أحدى حالات تطابق المثلثات وقبل البدء به لا بدّ من تعريف التطابق، واستخدام برنامج جيوجبرا وتحسين الطلاب للغتهم الرياضية فمثلاً كان الطلاب بداية يستخدمون تعبير "قد بعض" للدلالة على تساوي ضلعين لكن فيما بعد أصبح الطلاب يستخدمون تعبير "ضلعين متساويين". ومن وجهة نظر الباحثة إنّ هذه الأفعال ضرورية جدا فعندما تُصرِّح المعلمة بما تريد تقديمه للطلاب فهي بذلك تعطيهم الفرصة لتكوين صورة أوليّة ولو كانت بسيطة عمّا سيتعلمونه وذلك بما يوحيه الاسم للطلاب، أيضا استخدام برنامج جيوجبرا وفّر على الطلاب الوقت والجهد، وفي هذا يشبه برنامج جيوجبرا بقية البرامج التكنولوجية (الرشيد، 2007)، فبدلاً من قيامهم بقص مثلثين من الورق لمعرفة إمكانية تطابقهما، أصبح بإمكانهم رسم مثلثين على جيوجبرا بسهولة وتحريك أحدهما ووضعه فوق الآخر ثم استكشاف إمكانية التطابق، وهذه العملية لا تحتاج للكثير من الوقت على عكس الطريقة اليدوية والتي تحتاج إلى وقت أكبر وأدوات أكثر. هذا الاستكشاف مكّنته في حالتنا التكنولوجيا، حيث تُمكِّن التكنولوجيا من استكشاف مواقف رياضية جديدة بسهولة(Gillis,2005).

المستوى الثالث الذي مرّ به الطلاب هو مستوى امتلاك الصورة، فقد تبيَّنت معرفة مدى امتلاك الطلاب للصور الذهنية الخاصة بشرط التطابق من خلال تكليفهم باستكشاف إمكانية تطابق مجموعة من المثلثات. وقد استطاع الطلاب فعلا امتلاك الصورة الخاصة بهذا الشرط، المستوى التالي من الفهم هو ملاحظة الصفات، إذ استطاع الطلاب ملاحظة أنّه إذا وجد ضلع في مثلث لا يساو ضلع مناظر له في مثلث آخر، فإنه لا يمكن تطبيق شرط التطابق هنا ومن ذلك توصّل الطلاب إلى أنّ المثلثين غير متطابقين، تلا ذلك مستوى التعميم حيث استطاع الطلاب تعميم ما توصلوا له من شرط التطابق في مثال جديد قامت المعلمة بتكليفهم بحله، هنا عمم الطلاب المعرفة التي تعلموها حول شرط التطابق في حل المثال وتوصلوا إلى أنّ المثلثين متطابقان، أما المستوى الاخير الذي وصل الطلاب له فهو الملاحظة، الطلاب هنا توصّلوا لإمكانية التعبير عن شرط التطابق بالرموز بدلاً من كتابته بالكلمات في كل مرة، فقد عبّروا عنه بالرمز (ض ض ض).

يمكن الملاحظة أنّ الطلاب لم يقوموا بعمليات طي عكسي أثناء تعلّمهم لشرط التطابق، فهم لم يواجهوا أي مشاكل أو صعوبات تتطلب منهم الرجوع إلى مراحل سابقة من الفهم (Pirie & Martin,2000)، كذلك كان انتقالهم بين مستويات الفهم انتقالاً تدريجياً؛ بمعنى أنهم كانوا ينتقلون من مستوى فهم إلى المستوى الذي يليه مباشرة، كما قاموا بممارسات تعلُّمية متنوعة فقد قدموا أفكارا واستفسروا عنها وهذا بدوره دفعهم إلى بناء أفكار جديدة كانوا يتحققون من صحتها في بعض الأحيان بواسطة التكنولوجيا. هذا التحقق ساعد الطلاب في تقدمهم إلى مستويات أعلى من الفهم وهو ما تذكره دراسات سابقة (Ferreira & Jacobini, 2008).

التطبيقات المباشرة وغير المباشرة على شرط التطابق (ض ض ض)

في التطبيقات المباشرة وغير المباشرة التي قامت مجموعة كريم بحلها، تبيّن أنّ الطلاب لم يقوموا بعمليات طي عكسي، ربما كان السبب في ذلك أنهم وصلوا إلى مستوى كاف من الفهم تمكّنهم من حل هذه التطبيقات بسهولة، كما تبين أنهم مروا بمستويات التعميم والملاحظة والهيكلة، لكن من الملاحظ أنّ الحد الذي يفصل مستويي الملاحظة والهيكلة لم يكن ظاهراً. من

هنا يمكن ملاحظة خاصية لا حاجة إلى حدود بين مستويي الملاحظة والهيكلة؛ فقد تعدّى الفهم لديهم حدود مستوى الملاحظة ليصل إلى مستوى الهيكلة مباشرة. هذه الملاحظة توافق ما جاء في أبحاث سابقة والتي استخدمت نفس نظرية بناء المعرفة لبيري وكيرين، مثل بحث وولتر وجيبونز (2010).

بالنسبة للمجموعتين الأخريين، فقد مرتا بمستويات التعرف البدائي وتكوين الصورة وامتلاكها وملاحظة الصفات والتعميم، وكان مرور المجموعتين بمستوى ملاحظة الصفات ضمنيا، بمعنى أنهما وصلتا إلى مرحلة التعميم دون أن يكون هناك حد بين مستويي ملاحظة الصفات والتعميم، وبالتالي تظهر هنا خاصية لا حاجة إلى حدود، يمثل هذا أحد أوجه الشبه بين المجموعات الثلاث. تتشابه المجموعات كذلك في عدم وجود تدخل للمعلمة أثناء تعلمهم لشرط التطابق، كما لم تحدث أي عمليات طي عكسي مع أيٍّ منها.

تطور معرفة الطلاب في موضوع المثلث متساوي الساقين

تعلَّم الطلاب باستخدام جيوجبرا إحدى النظريات الخاصة بالمثلث المتساوي الساقين، والتي تنص على أنّ العمود النازل من رأس المثلث المتساوي الساقين على القاعدة ينصف زاوية الرأس. وأثناء تعلُّم الطلاب لهذه النظرية مروراً بمستويات مختلفة من الفهم وهي: التعرّف البدائي، حيث امتلك الطلاب معرفة بدائية تتمثل في معرفة بعض خصائص المثلث المتساوي الساقين وشروط التطابق التي سبق تعلمها، هذا بدوره ساعد في انتقال الطلاب إلى المستوى الثاني من الفهم وهو تكوين الصورة، ولكي تتكون لديهم صورة ذهنية حول النظرية قام الطلاب ببعض الأفعال التعلُّمية مثل تصريح القصد واستخدام برنامج جيوجبرا، في حين لم يكن هناك الكثير من الأسئلة المطروحة من قبل المعلمة أو الطلاب، ولم يكن هناك تحسين للغة الطلاب الرياضية، وذلك لأن تقدم الطلاب في تعلم النظرية لم يكن بحاجة لتوجيه الكثير من الأسئلة من قبل المعلمة، أيضا حاول الطلاب أن يكونوا أكثر دقة في استخدام المصطلحات الرياضية التي تمر معهم أثناء التعلم، لذا لم يكونوا بحاجة لأن تقوم المعلمة بتصحيح لغتهم الرياضية.

في المستوى الثالث امتلك الطلاب من خلال بعض الأسئلة والتمارين الصورة الخاصة بالنظرية، ومنه انتقلوا إلى مستوى ملاحظة الصفات بمساعدة الأجوبة التي أعطتها المعلمة للطلاب، وانتقل الطلاب من خلال مثال أعطته المعلمة لهم إلى مستوى التعميم. مما سبق تبين أنّ تدخل المعلمة خلال تعلم الطلاب كان محدوداً، وهذا بدوره يعكس انطباعا قويا عن أداء الطلاب أثناء التعلّم وربما يعود السبب في قوة الأداء هذه إلى استخدام برنامج جيوجبرا الذي جعل من عملية التعلم لدى الطلاب أمرا سهلاً وشيقاً وممتعاً، فقد قدمت جيوجبرا لهم إمكانيات بصرية وأدوات ساعدت في اكتشاف علاقات رياضية معينة (Adams & Muilenburg، 2012)، في حالتنا خاصة بموضوع نظرية المثلث متساوي الساقين. كما تبيّن أنّ انتقال الطلاب بين مستويات الفهم كان انتقالا تدريجيا وخطيا فلم تحدث أي عمليات طي عكسي يمكن ذكرها، إنّ الطلاب قاموا بممارسات تعلُّمية متنوعة ساعدتهم في التعلم مثل بناء الأفكار والاستفسار عنها.

أما المجموعات التعاونية الأخرى فقد تبين أن هذه المجموعات مرّت بنفس مستويات الفهم التي مرّت بها مجموعة كريم ابتداءً بالتعرّف البدائي وانتهاءً بالتعميم، فهنا امتلكت المجموعات الثلاث المستوى التعليمي نفسه دون أن تتفوق إحداها على الأخرى، أما بالنسبة لتدخل المعلمة فلم يكن واضحاً فيما يخص مجموعة نادين، أما مجموعة خالد فقد كانت المعلمة تتدخل بين الحين والآخر، فقد تدخلت في مستويي تكوين الصورة وملاحظة الصفات، إذ ساعدت المجموعة من خلال طرح أسئلة من وقت لآخر ولفت انتباههم إلى قضايا ساعدتهم في إتمام المستوى الذي هم فيه. أيضا الانتقال بين مستويات الفهم كان تدريجيا وخطيا في المجموعات الثلاث فلم تحدث عمليات طي عكسي لمستويات سابقة من الفهم، ولعل أكثر الممارسات التعلّمية التي قام الطلاب بها في هاتين المجموعتين هي تقديم الأفكار وبناء الأفكار؛ إذ كان الطلبة يقدمون أفكارا وبناءً عليها يبنون أفكارا جديدة؛ فطبيعة الأنشطة التي قام الطلاب بها(حيث كانت أنشطة مثيرة ومتنوعة) جعلتهم يقدمون أفكارا جديدة، وتقديم هذه الأفكار قاد الطلاب إلى بناء أفكار جديدة تعتمد على تلك التي تم تقديمها.

التطبيقات المباشرة على النظرية الخاصة بالمثلث متساوي الساقين

وبالنظر إلى التطبيقات المباشرة التي قامت المجموعات بحلها فقد اتّضح أنّ مجموعة كريم مرت بمستويات الفهم التالية: التعرّف البدائي وتكوين الصورة وامتلاكها، ومن الملاحظ أنّ قدرة الطلاب على تكوين صورة ذهنية كانت سريعة فلم يكونوا بحاجة للقيام بأفعال تعلّمية كالتي سبق ذكرها لتكوين هذه الصورة، كما انتقلوا من مستوى امتلاك الصورة إلى التعميم، مرور الطلاب بملاحظة الصفات هنا كان ضمنيا؛ أي لم يكن هناك حاجة لوجود حد بين مستويي ملاحظة الصفات والتعميم، وذلك بسبب قدرة الطلاب على تعميم النظرية التي تعلموها دون حاجة لملاحظة صفات خاصة بها. وبعد وصول الطلاب إلى مستوى التعميم حدثت عملية طي عكسي حيث عاد الطلاب إلى مستوى سابق من الفهم وهو ملاحظة الصفات، فلم يستطع الطلاب إتمام حل المثال بوصولهم إلى مستوى التعميم لذا كان لا بد لهم من البحث عن صفات معينة تعينهم على إتمام الحل وهذا ما دعاهم للرجوع إلى مستوى ملاحظة الصفات.

إذن من الملاحظ أنّ الخصائص الثلاث التالية للفهم ظهرت أثناء تعلُّم مجموعة كريم للتطبيقات المباشرة وهي: الطي العكسي، ولا حاجة إلى حدود بين الحلقات، وقيام الطلاب بممارسات تعلّمية أهمها بناء الأفكار وشرح الأفكار، فبعد أن بنى الطلاب أفكارا قاموا بشرح كيفية بناء هذه الأفكار.

التطبيقات غير المباشرة على النظرية الخاصة بالمثلث متساوي الساقين

فيما يخص التطبيقات غير المباشرة فقد مرّت المجموعات الثلاث بمستوى التعميم بداية، هنا لم يكن الطلاب بحاجة لأن يبدأوا من التعرّف البدائي؛ ذلك لأنّ التمرين كان من وجهة نظر الطلاب تعميما على النظرية التي تعلموها، ثم قامت المجموعات بعملية طي عكسي لمستوى ملاحظة الصفات، فلم يستطع الطلاب إيجاد قيمة أحد الرموز المجهولة إلّا بملاحظة صفة خاصة بالمثلث وهي أنّ مجموع زوايا المثلث يساوي 180 درجة، ثم انتقلت المجموعات إلى مستوى التعميم لمتابعة حل المثال، وأثناء ذلك قامت ببعض الممارسات التعلُّمية مثل بناء الأفكار وشرحها.

تعلّم الطلاب موضوع المثلث متساوي الأضلاع

تعلَّم الطلاب هنا بعض خصائص المثلث متساوي الأضلاع باستخدام جيوجبرا، وأهمها النظرية الخاصة بالمثلث قائم الزاوية باعتباره نصف مثلث متساوي الأضلاع، والتي تنص على أنه في المثلث القائم الذي زواياه 30، 60، 90، الضلع المقابل للزاوية 30 يساوي نصف الوتر.

مرّت مجموعة كريم أثناء تعلُّمها لهذه النظرية بالممستويات الخمس الأولى من الفهم. ومن الأفعال التعلّمية الأساسية التي قام بها الطلاب استخدام التكنولوجيا المتمثلة باستخدام برنامج جيوجبرا، وهذا مكنهم من الانتقال إلى مستوى امتلاك الصورة حيث امتلكوا المعرفة التي من شأنها أن تساعدهم في التقدم في فهم النظرية، وهذا أدّى بهم للانتقال إلى مستوى ملاحظة الصفات. أيضا واجه الطلاب أثناء تعلمهم بعض الصعوبات التي استدعت تدخل المعلمة في بعض الأحيان، خاصة في مستويي تكوين الصورة وملاحظة الصفات، وهذا بالطبع ساعدهم في الانتقال إلى المستويات التالية من الفهم. كما تبيّن أن تعلمهم كان تعلما تدريجيا فقد انتقلوا من مستوى إلى الذي يليه مباشرة وأنهم لم يقوموا بطي عكسي إلى مستويات سابقة.

تبيّن أيضا أن الطلاب قاموا بممارسات تعلّمية كثيرة ساعدت في التعلم وأهمها بناء الأفكار وتقديمها والاستفسار عنها؛ حيث تحقق الطلاب من صحة الأفكار التي قاموا ببنائها. أي أنّ تواصل الطلاب بطرق مختلفة ساعدهم على بناء معرفتهم، وتشير الأبحاث السابقة إلى أهمية التواصل في صف الرياضيات وإسهامه في عملية بناء الطلاب لمعرفتهم الرياضية (Arzarello, 2006; NCTM, 2000).

أما بالنسبة للمجموعتين الأخريين فقد مرّتا بنفس مستويات الفهم التي مرت بها مجموعة كريم، إلّا ان مجموعة خالد كان مرورها بمستوى ملاحظة الصفات ضمنيا فلم يكن هناك حد بينها وبين التعميم، أيضا احتاجت المجموعتان لتدخل اكبر من قبل المعلمة في معظم المستويات التي مرت بها؛ لأنهما واجهتا صعوبات كثيرة شكّلت عائقا أمام تقدمهما في الفهم. تبين أيضا أن الانتقال في الفهم كان انتقالا تدريجيا وخطيا بمعنى أنهما لم تقوما بطي عكسي لمراحل سابقة؛

وذلك لأن تدخل المعلمة ساعد المجموعتين في التقدم في الفهم فلم تكونا بحاجة للرجوع إلى مستويات سابقة، أما الممارسات التي قام بها طلاب المجموعتين فقد تنوعت بين بناء الأفكار والاستفسار عنها وشرحها.

التطبيقات المباشرة على النظرية الخاصة بالمثلث قائم الزاوية

في التطبيقات المباشرة التي قام طلاب المجموعات الثلاث بحلها، مرّت المجموعات بمستويات مختلفة من الفهم، أولها التعميم ثم قامت بطي عكسي لمستوى ملاحظة الصفات؛ لأنها لم تستطع إتمام الحل إلّا بمحاولة ملاحظة صفات معينة تساعد في ذلك، ثم انتقلت مرة أخرى لمستوى التعميم ثم قامت بطي عكسي لمستوى امتلاك الصورة، ومنها وصلت إلى المستوى السادس من الفهم وهو الملاحظة مرورا بمستويات ملاحظة الصفات والتعميم. مما سبق اتّضح أنّ تعلم الطلاب في التطبيقات المباشرة كان تعلما متنوعا وغنيا بخصائص مختلفة للفهم، فكان هناك طي عكسي، ولا حاجة إلى حدود بين الحلقات، وممارسات تعلّمية للطلاب مثل بناء الأفكار وشرحها.

التطبيقات غير المباشرة

في التطبيقات غير المباشرة مرّت المجموعات بمستويات تختلف نوعا ما عن تلك التي مرت بها في التطبيقات المباشرة، فمجموعة كريم مرت بداية بمستوى امتلاك الصورة ومنه انتقلت إلى التعميم مرورا بملاحظة الصفات، إلّا أنّ الحد الذي يفصل مستوى ملاحظة الصفات عن التعميم لم يكن موجودا، وذلك لأن الطلاب عمموا النظرية التي تعلموها دون حاجة لملاحظة صفات خاصة بها، فهذه الصفات سبق لهم ملاحظتها عندما تعلموا النظرية. وهنا تظهر خاصية لا حاجة إلى حدود، ومن ثم انتقلت مجموعة كريم لمستوى الملاحظة، حيث استطاع الطلاب ملاحظة بعض الخصائص الخاصة بمتوازي الأضلاع وشبه المنحرف، والاستفادة منها جميعها في إيجاد مقدار الزاوية المطلوبة؛ فطبيعة المثال هنا جعلت الطلاب يصلون إلى هذا المستوى من الفهم، حيث يؤكد الباحثون على علاقة عمل الطلاب الرياضي

ونجاحهم به بنوع المشكلة الرياضية وملاءمتها لخلفيتهم ومستواهم (Awawdeh- Shahbari & Daher, 2014).

مما سبق يمكن ملاحظة أن تعلم الطلاب في التطبيقات غير المباشرة كان حافلاً بخصائص الفهم المختلفة وهي الطي العكسي، ولا حاجة إلى حدود بين الحلقات، وقيام الطلاب بممارسات تعلُّمية مثل بناء الأفكار وشرحها.

وما مرّت به مجموعة كريم شبيه إلى حد كبير مع ما مرّت به باقي المجموعات، إلّا أنها لم تقم بعمليات طي عكسي لأيٍّ من المستويات السابقة، فقد حسّنت المجموعات من مستوى تفكيرها، كما أن استخدام جيوجبرا ساعدها كثيرا في تخطي مستويات الفهم الواحد تلو الآخر، كل ذلك مكّن المجموعتان من التقدم في الفهم والوصول إلى مستوى الملاحظة بشكل خطي دون الرجوع إلى مستويات سابقة من الفهم.

من النتائج السابقة المتعلقة بموضوع المثلثات لوحظ أنّ الطلاب لم يصلوا إلى مستويي الهيكلة والاستقصاء وهما أعلى مستويات الفهم؛ وهذا يعود إلى طبيعة الأنشطة التي قامت المعلمة بتقديمها لهم، فوصول الطلاب إلى هاذين المستويين استلزم إعطاء المعلمة للطلاب تطبيقات غير مباشرة تجمع بين كل النظريات التي تعلمها الطلاب في موضوع المثلثات، لكن المعلمة لم تقم بذلك، وبهذا لم يصل الطلاب إلى الهيكلة التي تستلزم منهم الربط بين مجموعة من النظريات وتفسير هذا الارتباط بشكل منطقي. أيضا الأنشطة التي قام بها الطلاب والتطبيقات التي حلّوها لم تكن مُحفِّزة لهم للوصول إلى مستوى الاستقصاء والذي يستلزم منهم اكتشاف مفاهيم جديدة لم يسبق لهم تعلمها. مثلا من الممكن الطلب منهم اكتشاف نظريات تطابق جديدة تتعلق بالمثلث قائم الزاوية بدون إعطائهم إرشادات استدراجية.

المقابلة التي أجرتها الباحثة مع الطلاب

اتضح من المقابلة التي أجرتها الباحثة مع الطلاب أثناء عملهم في مجموعات أن لديهم توجه ايجابي وكبير نحو استخدام جيوجبرا في تعلمهم لمادة الرياضيات عامة وموضوع المثلثات

خاصة، فقد وجدوا في جيوجبرا ميزات ساعدتهم في القيام بأفعال تعلُّمية إدراكية مثل الديناميّة والمرونة وتوفير إمكانيات بصرية مكنتهم من تطوير فهم عميق للنظريات التي تعلموها، وأفعال تعلّمية وجدانية كالمتعة والتشويق والدافعية. ولعل سبب ذلك أن جيوجبرا ساعد الطلاب على إدراك المفاهيم الخاصة بموضوع المثلثات وتجسيدها بطريقة محسوسة، وهذا بدوره أدّى إلى تنمية مهارات التفكير لديهم وإبراز أكبر لقدراتهم وإمكاناتهم (تكنولوجيا التعليم العربي، 2012).

الاستنتاجات والتوصيات

عرضت الباحثة في هذا الفصل ملخصا للنتائج التي تم التوصل لها من خلال تطبيق نظرية بيري- كيرين للفهم الرياضي على ثلاث مجموعات من طلاب الصف الثامن في موضوع المثلثات باستخدام برنامج جيوجبرا، كما عرضت دلائل هذه النتائج. وبعدها قدّمت الباحثة بعض التوصيات مؤكدة على أهميتها وضرورة الأخذ بها للارتقاء بمستوى أداء الطلاب في مادة الرياضيات.

بعد القيام بتحليل مخرجات التجربة توصلت الباحثة إلى أنّ الطلاب مروا بمستويات مختلفة من الفهم أثناء تعلّمهم لموضوعات المثلثات المختلفة (المثلث، المثلث متساوي الساقين، المثلث متساوي الأضلاع) ابتداء بالمستوى الأول (التعرّف البدائي) وحتى المستوى السادس (الملاحظة)، لكنهم لم يصلوا إلى المستويين الاخيرين من مستويات الفهم (الهيكلة والاستقصاء) بسبب عدم تقديم تطبيقات وأنشطة من قبل المعلمة تحفزهم للوصول إلى هاذين المستويين. كما تميز كل مستوى فهم مرّ الطلاب به بخصائص مختلفة من خصائص الفهم مثل حدوث عملية الطي العكسي، وعدم وجود حدود بين مستويات الفهم، وقيام الطلاب بممارسات تعلّمية مختلفة في كل مستوى مثل تقديم الأفكار وبنائها والاستفسار عنها والتحقق من صحتها وإعادة تنظيمها.

وبناء على النتائج التي تم التوصل لها فقد أكّدت الباحثة على أهمية إعطاء الطلاب الفرصة لمعالجة نظريات جديدة بالاعتماد على النظريات التي تعلموها وبدون إرشاد وتدخل كبير من قبل المعلمة.

كما أوصت الباحثة بضرورة استخدام برنامج جيوجبرا في تعليم الطلاب مادة الرياضيات، إذ أن جيوجبرا مكنهم من استكشاف مواقف رياضية جديدة، والتقدم إلى مراحل أعلى من الفهم، وما لذلك من اثر في تحسين أدائهم في مادة الرياضيات والارتقاء بمستوى تحصيلهم العلمي في هذه المادة، اقترحت الباحثة أيضا أن يتم عقد دورات تدريبية لمشرفي ومعلمي الرياضيات حول كيفية استخدام برنامج جيوجبرا في تدريس الرياضيات.

كذلك اوصت بإجراء مزيد من الدراسات الكيفية (النوعية) حول موضوع الفهم الرياضي، واستخدام نظرية بيري-كيرين التي استخدمتها الباحثة في هذا البحث.

قائمة المصادر والمراجع

المراجع العربية

جبر، معين حسن (2006). "**فاعلية طريقة تدريس قائمة على استراتيجيات التعلم الذاتي الموجه لتدريس الهندسة في التحصيل وحل المسألة الهندسية واتجاهات الطلبة نحوها**. رسالة دكتوراة غير منشورة، جامعة عمان العربية للدراسات العليا، عمان، الاردن.

الجمعية المصرية لتربويات الرياضيات.(2007). **المؤتمر العلمي السابع بالاشتراك مع كلية التربية ببنها: الرياضيات للجميع**، جامعة عين شمس، جمهورية مصر.

الرشيد، إخلاص سعد عبد الكريم (2007). **اثر استخدام تقنية البرامج المعتمدة على الحاسوب على تحصيل طالبات الصف الأول متوسط في مادة العلوم بمدينة الرياض**. رسالة ماجستير منشورة، جامعة الملك سعود، المملكة العربية السعودية.

سلامة، حسن علي. (2005). **اتجاهات حديثة في تدريس الرياضيات**. دار الفجر للنشر والتوزيع، القاهرة، جمهورية مصر.

الشريف، فاتن (2002). **اثر استخدام الحاسوب في تدريس الهندسة على التحصيل الآني والمؤجل لدى طالبات الصف الثامن الأساسي واتجاهاتهم نحو التعلم**. رسالة ماجستير غير منشورة، جامعة اليرموك، الأردن.

العبادلة، محمود رضوان عبد العال (2006). **فاعلية استخدام الكمبيوتر في تدريس الهندسة الفراغية على التحصيل والتفكير الهندسي والتصور المكاني للصف الثاني الثانوي العلمي.** رسالة دكتوراة غير منشورة، جامعة عين شمس وجامعة الأقصى بفلسطين.

العبوشي، مصعب (2002). **اثر استخدام الحاسوب التعليمي على تحصيل طلبة الصف العاشر الأساسي في الهندسة الفضائية واتجاهاتهم نحوه**. رسالة ماجستير غير منشورة، جامعة النجاح الوطنية، نابلس، فلسطين.

مقدادي، فاروق (2001). الوسائل التعليمية في الرياضيات المدرسية. دار الامل، اربد، الاردن.

http://www.qou.edu/arabic/researchProgram/researchersPages/maher Qarawani/r3_drMaherQarawani.pdf

المراجع الأجنبية

Adams, C. & Muilenburg, L. (2012**). Incorporating GeoGebra into Secondary Mathematics Instruction to Improve Student Understanding.** In P. Resta (Ed.), Proceedings of Society for Information Technology & Teacher Education International Conference 2012 (pp. 3507-3510). Chesapeake, VA: AACE.

Arzarello, F.: 2006, '**Semiosis as a multimodal process', Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking**, 267-299.

Bayazit, I. & Aksoy, Y. (2010). **Connecting Representations and Mathematical Ideas with GeoGebra.** GeoGebra: The New Language for the Third Millenium, 1 (1), 93-106.

Cheng, K., Sung, Y., & Lin, S., (2007**). Developing geometry thinking through multimedia learning activities**. Computers in Human Behavior, 23(5), 2212-2229.

Clark, D.L (2005**). The Effect of using computer assisted instruction to assist high school geometry student achieve higher levels of**

success on the Florida Competency Achievement Test (FCAT). Dissertation Abstracts International**.** 65(12),4499A/2005.

Ferreira, D-H & Jacobini, O. (2008). **Mathematical modelling: From Classroom to the real world. In M. Blomhøj & S. Carreira (Ed.), Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics**: Proceedings from Topic Study Group 21 at the 11th International Congress on Mathematical education, 35-46.

Gersten et al. (2009). Assisting Students Struggling with Mathematics: Response to Intervention (RtI) for Elementary and Middle Schools. Institute of Edcation Scinces. http://ies.ed.gov/ncee/wwc/pdf/practice_guides/rti_math_pg_042109.pdf

Gillis, J. M. (2005). **An investigation of student conjectures in static and dynamic geometry environment.** Ph.D. Dissertation., Auburn University-Alabama.

Glaser, BG. & Strauss, AL. (1967). **The discovery of grounded theory: strategies for qualitative research**, New York: Aldine de Gruyter.

Glaserfeld, E.: 1987, **Learning as aconstructive activity, in C. Janvier (ed), Problems of Representations in the Learning and Teaching of Mathematics**, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, N.J. pp. 3-18.

Guncaga, J. & Majherova, J. (2012). ***GeoGebra as a motivational tool for teaching and learning in Slovakia***. **North American GeoGebra Journal, 1(1), 45-48.**

Hohenwarter, M. (2012). Geogebra 3.2 help in Arabic. Retrieved 28/8/2012 from: http://geogebra.org/help/docuar.pd

http://www.utc.edu/~cpmawata/instructor /tsukuaba1.html

Idris, N. (2009). ***The Impact of Using Geometers' Sketchpad on Malaysian Students' Achievement and Van Hiele Geometric Thinking***. **Journal of Mathematics Education, 2(2), 94-107.**

National Council of Teachers of Mathematics.(2000).Principles and Standards for School Mathematics. Reston,VA:NCTM

Papadopoulos, I., & Dagdilelis, V. (2008). ***Students' use of technologica tools for verification purposes in geometry problem solving.*** **Journal of Mathematical Behavior, 27, 311–325.**

Pirie, S. & Kieren, T. (1994). **Growth in mathematical understanding: How can we characterize it and how we can represent it**? Educational Studies in Mathematics, 26, 2-3, 165-190.

Pirie, S. E. B. and Kieren, T. E.: 1991, **Folding back: Dynamics in the growth of mathematical understanding, in F. Furinghetti** (ed.), Proceedings Fifteenth Psychology of Mathematics Education Conference, Assisi.

Pirie, S. E. B., & Martin, L. (2000). ***The role of collecting in the growth of mathematical understanding.*** **Mathematics Education Research Journal**, 12(2), 127-146.

Pirie, S. E.B.: 1988**, Understanding – Instrumental, relational, formal, intuitive…, How can we know**?, For the Learning of Mathematics 8(3), 2-6.

Serpinska, a.: 1990, Some **remarks on understanding in mathematics**, For the Learning of Mathematics 10(3), 24-36**.**

Shahbari, J. A., Daher, W. & Rasslan, S. (accepted**). Mathematical Knowledge and the Cognitive and Metacognitive Processes Emerged in Model-eliciting Activities. Proceeding of the International Conference on New Trends in Education and Their Implications.** Antalya, Turkey: ICONTE 2014.

Skemp, R. R.: 1976, **Relational understanding and instrumental understanding**, Mathematics Teaching 77, 20- 26.

Slaten, K.M. (2010). **Effective Folding Back via Student Research of the History of Mathematics. A paper presented at the Conference on Research in Undergraduate mathematics education**. Raleigh, North Carolina, February, 25-28.

Sprinthall, R. C. and Sprinthall, N. A. (1981)**. Educational Psychology**, Reading **:** ddison- Welson, Co.

Strauss, A. & Corbin, J. (1998). Thousand Oaks, CA: Sage

Walter, J. & Gibbons, S. (2010). **Student problem-solving behaviors: Traversing the Pirie-Kieren model for growth of mathematical understanding. A paper presented at the Conference on Research in Undergraduate mathematics education**. Raleigh, North Carolina, February, 25-28.

Wilson, H. P. & Stein, C. C. (2007**). The Role of Representations in Growth of Understanding in Pattern-Finding Tasks**. Paper presented at the Ninth International Conference Mathematics Education in a Global Community. Charlotte, North Carolina, September 7-12, 2007.

الملاحق

ملحق (1): المادة التدريبية التي اعدتها الباحثة لتعليم الطلاب موضوع المثلثات باستخدام جيوجبرا

دليل المعلم للتعرف على المادة التدريبية:

يوضح هذا الدليل آلية استخدام برنامج جيوجبرا من قبل الباحثة في شرح وحدة الهندسة للصف الثامن الأساسي في كتاب الرياضيات الجزء الأول، حيث يتم توضيح كيفية استخدامه في تدريس هذه الوحدة، من خلال التمارين والأنشطة المقترحة والتي تهدف لتحقيق الأهداف السلوكية الخاصة بدروس الوحدة وذلك وفق عدة خطوات وهي:

موضوع الدرس، المحتوى الرياضي للموضوع، عدد الحصص المقترحة لتدريس الموضوع، الأهداف السلوكية للموضوع، استخدام جيوجبرا، المدخل (التهيئة)، التمارين والأنشطة المساعدة، الواجب البيتي، علما بأن الخطوات ستكون متسلسلة وسيتم عرضها بطريقة جذابة ومشوقة، وصولاً إلى تحقيق الأهداف المرجوة، مع إمكانية تقديم الدروس بالطريقة التي تراها المعلمة مناسبة للعرض باستخدام هذه الوسائل.

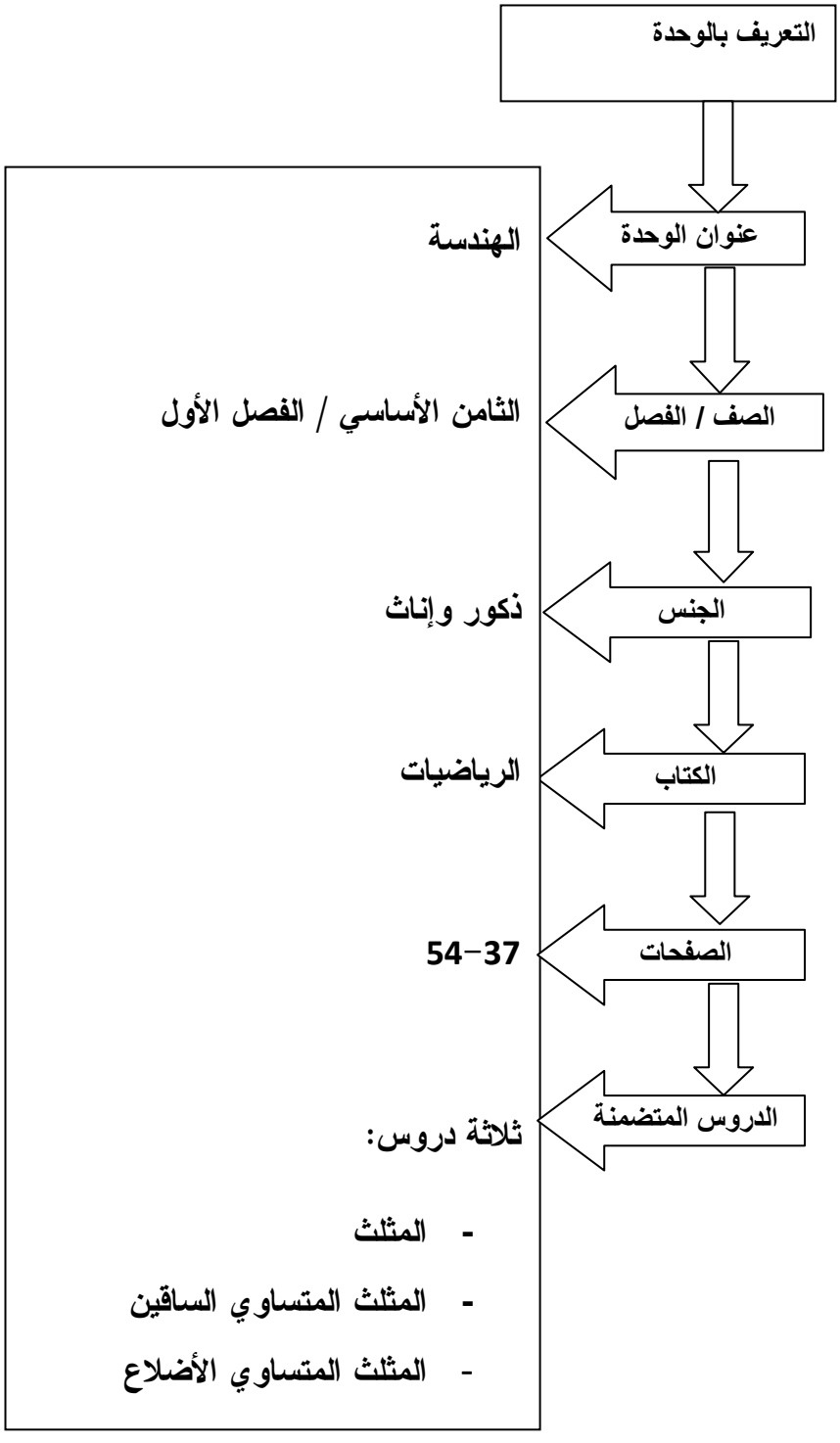
إرشادات للمعلم عند استخدام الجيوجبرا:

إن جميع ما يقدم في هذا الدليل هو بمثابة مقترحات للمعلم، فله أن يأخذ منها ما يحتاج وله أن تضيف عليها أو يكيفها بما يتفق مع أسلوبه في التدريس

الاهتمام بالطالب واعتباره المحور الأساسي للعملية التعليمية وذلك بإتاحة الفرصة أمامهم للقيام بالأنشطة والتمارين الرياضية.

يجب الاهتمام بالمفاهيم وتكوينها، والعناية بالمهارات واكتسابها وأن لا يكون الاهتمام بأحدهما دون الآخر.

مخطط وحدة الهندسة:



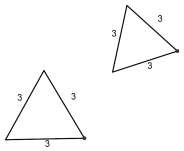
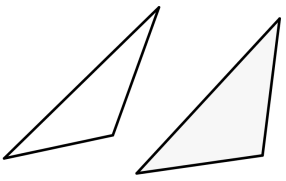
عدد الحصص المقترحة:

لتدريس وحدة الهندسة للصف الثامن الأساسي باستخدام برنامج جيوجبرا:

الرقم	اسم الدرس	رقم الصفحة	عدد الحصص
	المثلث: أنواع المثلث شروط تطابق مثلثين	 38 38	6 حصص
	المثلث متساوي الساقين: خصائص المثلث متساوي الساقين تساوي زاويتين في مثلث نظرية العمود النازل من رأس المثلث إلى القاعدة	43 47 50	6 حصص
	المثلث المتساوي الأضلاع: محاور تماثل المثلث متساوي الأضلاع نصف المثلث متساوي الأضلاع	53 53	حصة حصتان
	مجموع الحصص		15حصة

الحصة الاولى: المثلث، المدة الزمنية (40 دقيقة).

المراجع المستخدمة	مدخلاتي كمعلم	نشاط المتعلم	المدة الزمنية
مقدمة تثير اهتمام الطلبة			
مراجعة تعريف المثلث مع الطلاب. تقسم المعلمة الطلاب في مجموعات. تكلف المعلمة الطلاب بفتح برنامج جيوجبرا. توزع المعلمة على الطلاب ورقة العمل الاستدراجية.	أسئلة ومناقشة صفية: تطرح المعلمة على الطلاب مجموعة من الأسئلة وهي: عرف المثلث. عدد أنواع المثلثات حسب زواياها عدد أنواع المثلثات حسب أطوال أضلاعها.	أجوبة الطلبة إجابات الطلاب المتوقعة: المثلث: شكل هندسي مغلق يتكون من ثلاثة أضلاع. تصنّف المثلثات حسب الزوايا إلى: مثلث منفرج الزاوية، قائم الزاوية، حاد الزاوية. تصنّف المثلثات حسب أطوال الأضلاع إلى: مثلث متساوي الأضلاع، متساوي الساقين، مختلف الأضلاع.	5 دقائق 5 دقائق
مرحلة التفاعل مع المعرفة الرياضية:			
شرح الحالة الأولى من تطابق المثلثات: ضلع،ضلع،ضلع (ض،ض،ض) تعرض المعلمة باستخدام جيوجبرا مثالا لمثلثين متساويين في أطوال	تقسم المعلمة الطلاب إلى مجموعات يتكون كل منها من (2-3) طلاب ويقوم بتدريبهم على استخدام البرنامج يقوم الطلاب في كل مجموعة برسم المطلوب باستخدام	يشترك الطلاب مع المعلمة في كل خطوة تقوم بها في رسم المثلثين متساويي الأضلاع ثم يحاولون تطبيق احدهما على الآخر.	5 دقيقة 4 دقيقة

الأضلاع  تقوم المعلمة بإعطاء الطلاب السؤال التالي: تحقق من تطابق المثلثين التاليين: 	البرنامج. تكلف المعلمة الطلاب ضمن كل مجموعة باستخدام برنامج جيوجبرا في الحل. كما سبق تكلف المعلمة الطلاب باستخدام البرنامج في الرسم. تكلف المعلمة كل طالب في المجموعات بكتابة الملاحظات والاستنتاجات على دفتره.	يقوم الطلاب بكتابة ما توصلوا إليه، وهل تطابق المثلثان أم لا، واستنتاج شرط التطابق في هذه الحالة. يكتب كل طالب ما توصل إليه من ملاحظات فيما يخص تطابق المثلثين. ينفذ الطلاب المطلوب ثم يقومون بتطبيق المثلثين على بعضهما وملاحظة هل ينطبقان أم لا؟ واستنتاج شرط التطابق هنا. يقوم الطلاب بمتابعة المعلمة في الرسم ثم يقومون بتطبيق المثلثين والوصول إلى شرط التطابق.	10 دقائق 5 دقائق
	مناقشة الصف: اكتب الأفكار على السبورة. أنواع المثلثات تطابق المثلثين بثلاثة أضلاع حيث تقوم المعلمة بتوضيح هذه الأفكار وشرحها	يقارن الطلبة بين استنتاجاتهم وما عرضته المعلمة يذكر الطالب أنواع المثلثات يذكر الطالب شرط تطابق المثلثين من حيث الأضلاع.	10 دقائق

ملحق (2): تفريغ فيديو للدرس الاول في موضوع المثلث متساوي الساقين – نظرية تنصيف زاوية الراس

المعلمة: افتحوا جيوجبرا.

المعلمة: شو رأيكم يا ولاد نراجع مع بعض شروط التطابق اللي اخدناها..

كريم: اه مس اول شرط هو ثلاث اضلاع والتاني ضلعين وزاوية محصورة.

عمر يقاطع كريم: وكمان زاويتين وضلع

يوسف: واخر شي وتر وقائمة واحد ضلعي القائمة

المعلمة: ممتازين

المعلمة: درسنا اليوم عن احد نظريات المثلث المتساوي الساقين واللي بتحكي إنو العمود النازل من رأس المثلث المتساوي الساقين على القاعدة ينصف زاوية الرأس.

عمر: شكلها صعبة مس

المعلمة: لأ بالعكس كتير سهلة خاصة إنّا راح نتعلمها على جيوجبرا.

المعلمة: ارسموا معي على جيوجبرا مثلث متساوي الساقين وبعديها نزلوا من زاويـــة الـــراس عمود على القاعدة

يرسم الطلاب مع المعلمة

المعلمة: هل أبدي توجدولي قياس زاويتي الراس.. هدول شايفينهم(تؤشر على الشاشة)

كريم: الزاوية الاولى قياسها 35 درجة

يوسف: والزاوية التانية برضو 35 درجة

المعلمة: طيب شو بتلاحظوا؟

يوسف: الزاويتين متساويتين

عمر: قصدك مس بدك نستنتج النظرية؟

المعلمة: اذا بتقدر يا عمر تستنتجها احكيلنا اياها

عمر: العمود النازل على القاعدة في المثلث المتساوي الساقين بنصف زاوية الراس.

المعلمة: ممتاز يا عمر.. وطبعا شفنا وتحققنا من صحة النظرية قبل شوي.

المعلمة: طيب بدي ارسم مثلث على جيوجبرا... ارسموا معي وبدي منكم تطلعوا قياس زاويـــة دأجـــ

يرسم الطلاب مع المعلمة على جيوجبرا...

يقرع الجرس... ينتهي الدرس الاول قبل ان يحل الطلاب السؤال.

ملحق (3): تحليل درس المثلث

المتكلم: النص	التحليل حسب بيري– كيرين
المعلمة: مين يحكيلي شو تعريف المثلث؟	
عمر: هو مجسم مغلق الو ثلاثة أضلاع.	
المعلمة: هسه إحنا لما رسمنا المثلث وين رسمناه؟ عالورقة...الورقة مجسم	
ولا سطح مستوي؟	
عمر: سطح مستوي	تعرّف بدائي
المعلمة: طيب شو معنى مجسم يا عمر؟	
عمر: إشارات في وجهه على عدم المعرفة	
المعلمة: المجسم هو الشكل إلي بكون الو ثلاثة أبعاد طول وعرض	
وارتفاع مثل شكل الهرم أو المكعب.	
المعلمة: نيجي لاصناف المثلثات،على أي اساس ممكن نصنف المثلثات؟	تكوين الصورة (تصريح قصد)
كريم: ممكن نصنف المثلثات حسب طول الأضلاع.	
المعلمة: عجيوجبرا شوفو هادا المثلث، شو بتلاحظو على اطوال اضلاعه؟	
يوسف: الاضلاع مش متساوية.	
المعلمة: يعني شو ممكن نسمي هذا المثلث؟	
كريم: مثلث مختلف الاضلاع.	
المعلمة: طيب انتبهو لو حركنا الزر(اي) والزر (بي) حتى نوصلهم	(طرح اسئلة)
للطول 2شو بصير للمثلث؟	
كريم: صار فيه ضلعين متساويين(يشير بإصبعه على المثلث)	(طرح اسئلة)
المعلمة: إذن شو ممكن نسمي هاذ المثلث يا عمر؟	
عمر: متساوي الساقين	(طرح اسئلة)
يوسف: مس.. ولو حركنا كل الازرار لحتى يصير طولهم 2 بصير المثلث	امتلاك الصورة
متساوي الاضلاع.	
المعلمة: طيب هالسؤال للعبقري الفهمان...هل كل مثلث متساوي الساقين	
بكون متساوي الأضلاع؟	
عمر: لا مس ما بكون لأنو الضلع الثالث في المثلث المتساوي الساقين	
مش قد هدول الضلعين (يشير بإصبعه على المثلث)	

ملحق (4): قائمة أعضاء لجنة تحكيم المادة التدريبية

الرقم	الاسم	الدرجة العلمية	التخصص	العمل الحالي	جهة العمل
1	وجيه ضاهر	دكتوراة	اساليب تدريس الرياضيات	دكتور	جامعة النجاح الوطنية / نابلس / فلسطين
2	مها فيصل غنام	بكالوريوس	رياضيات	معلمة	مدرسة الزبيدات الثانوية/ اريحا
3	محمد راتب غنام	بكالوريوس	رياضيات	معلم	المدرسة الاساسية للبنين / عقابا / طوباس
4	كريم العارضة	ماجستير	أساليب تدريس الرياضيات	مشرف تربوي	مديرية التربية والتعليم /نابلس
5	احمد رشدي ابو عرة	بكالوريوس	رياضيات	رئيس قسم الاشراف	مديرية التربية والتعليم / طوباس
6	نداء ياسر عرفات	ماجستير	قياس وتقويم واحصاء بحث	مشرفة تربوية	مديرية التربية والتعليم/ نابلس

An-Najah National University
Faculty of Graduate Studies

Stages of Grouth of Geometric Understanding in Triangles Using Geogebra for the Eighth Grade Students

By
Ragaa Lutfi Ahmad Abu Ara

Supervised By
Dr. Wageeh Daher

This Thises is Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements of the Degree Master in Methods of Teaching Mathematics, Faculty of Graduate Studies, An-Najah National University, Nablus, Palestine.

2014

Stages of Grouth of Geometric Understanding in Triangles Using Geogebra for the Eighth Grade Students

By
Ragaa Lutfi Ahmad Abu Ara
Supervised By
Dr. Wageeh Daher

Abstract

This study aimed at identifying the levels of geometric understanding of the eighth grade learners, studying the unit of "Triangle", depending on the theory of mathematical understanding developed by Pirie and Kieren (1991).

The participants in the research were eighth grade students in a school in one of the Directorate of Education private schools in Nablus, where the students' achievement in mathematics was at least 80, and they worked as three groups consisting of 2-3 students each group.

The researcher monitored and followed up the actions and discussions of the students during their work in groups, and videoed their learning actions and discussions. The researcher also interviewed the participants to get information about their perceptions of learning with geogebra.The researcher, based on the grounded theory (Strauss & Corbin, 1998), and the theory of Pirie and Kieren, analyzed the data of the experiment, where the participants understanding stages were identified, as well as the characterizes of every stage, when learning the topic of triangle with geogebra. The researcher also studied what affected the participants' transition from stage to stage of understanding. The researcher found that

the participants passed some stages of understanding according to Pirie and Kieren during their learning the subject of triangles. These stages were different according to the topic that they learned. In all the topics they passed through the six stages of primitive knowing, image making, image having, property noticing, formalizing, and observing. At the same time, they were unable to reach the advanced stages of understanding: structuring and Inventising. This situation could be related to the nature of the indirect applications which were provided by their teacher, which were not constructive for them to get to the new concepts.

The results showed that the stages of understanding acheived by the participants in each topic were distinguished from the stages experienced by the participants in other topics in terms of the occurrence of Folding back or not, and the presence of boundaries between the stages of understanding or lack of it. In addition they were distinguished by the participants actions and discussions

Based on the results of the research, the researcher stresses on the importance of giving the students the opportunity to deal with new geometric theorems based on the theorems they have learned, and giving them the opportunity to explore them by themselves without much help from the teacher. The researcher also recommends to perform further qualitative studies on mathematical understanding, because of the lack of Arabic studies focusing on students' understanding and using the theory of Pirie – Kieren. The researcher also recommends the use of GeoGebra by

school students to further their mathematical knowledge. GeoGebra would help them explore new mathematical situations and problems, and progress to higher stages of understanding, and thus improve their attainment in mathematics. The researcher suggests planning training courses for administrators and mathematics teachers on the integration of GeoGebra in teaching mathematics, as well as planning the upgrade of the mathematics curriculum in Palestine to include GeoGebra activities.